LEUDERS, Timo; LOIBL, Katharina & BÖCHERER-LINDER, Katharina
Pädagogische Hochschule Freiburg und Universität Freiburg

Grundvorstellungen für den Umgang mit mehrstufigen Wahrscheinlichkeiten beim Bayes'schen Schließen

1. Was ist Bayes'sches Schließen?

Bayes'sches Urteilen ist eine Schlussweise, bei der die subjektive Wahrscheinlichkeit von Hypothesen H über die Welt durch Berücksichtigung neuer Daten D revidiert wird: Beispielsweise wird die Wahrscheinlichkeit einer Krankheit (H) nach einem positiven Testergebnis (D) beurteilt, unter Nutzung von Informationen über die Prävalenz der Krankheit sowie die Sensitivität und Spezifität des Tests [1,2]. Auch ohne numerische Werte sind solche Schlüsse qualitativ möglich, etwa beim Diagnostizieren von Fehlkonzepten aus Schülerfehlern (Leuders & Loibl, 2020), wenn das Vorliegen eines Fehlkonzeptes bei einem Lernenden wahrscheinlicher wird, wenn dieser einen bestimmten Fehler macht. Kern des Bayes'schen Schließens ist die multiplikative Kombination von Prävalenz und Likelihood (Trefferrate): $p^{\text{posterior}}(H|D) \propto \mathrm{p}(D|H)p^{\text{prior}}(H)$. Wann und warum Menschen zu solchen Urteilen fähig sind, wurde umfassend in Situationen mit quantifizierten Daten [3], aber auch in Handlungssituationen, in denen die Information erfahrungsbasiert vorliegt [4], untersucht. In diesem Beitrag schlagen wir eine Brücke der Forschung zum Bayes'schen Schließen aus kognitionspsychologischer und mathematikdidaktischer Perspektive unter Rückgriff auf das Konstrukt der Grundvorstellung. Das Verzeichnis der in diesen Kurzreview einbezogenen Artikel [1-29] findet man online in der Langversion unter

www.researchgate.net/publication/393801877_Grundvorstellungen_fur_den_Umgang_mit_mehrstufigen_Wahrscheinlichkeiten_beim_Bayes'schen_Schliessen

2. Welche Kognitionen sind beim Bayes'schen Schließen beteiligt?

Die relevanten mentalen Repräsentationen und mentalen Operationen während des Bayes'schen Schließens werden im Hinblick auf die idealisierten Lösungsschritte beschrieben (Abb.1, nach Loibl & Leuders, 2024). Diese Schritte finden sich in der gesamten Literatur zum Bayes'schen Denken, jedoch oft nur implizit oder ohne eine Unterscheidung zwischen externen Prozessen (Berechnungen) und mentalen Prozessen.

Schritt 1: Bayes'sche Situationen, die verbale, numerische und grafische Informationen umfassen, können als (mathematische) Textaufgaben betrachtet werden [5,6,7]. Textaufgaben wurden umfassend im Hinblick auf das Text- und Bildverständnis [8,9] sowie deren Integration [10] untersucht.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Entscheidend ist die Konstruktion einer mentalen Repräsentation der Situation und die mentalen Operationen, die zu einer Lösung führen.

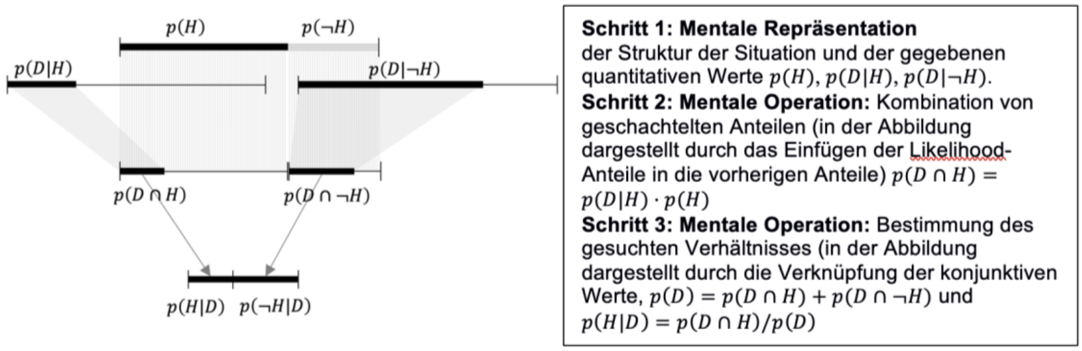

Abb. 1 Modell für die impliziten Lösungsschritte beim Bayes'schen Schließen

(a) Die *mentale Repräsentation der Struktur der Situation* umfasst das Verständnis ihrer relevanten Bestandteile und deren Beziehungen. Beim Bayes'schen Urteilen bedeutet dies, eine spezifische Konfiguration von Teilmengen zu erkennen [11,12], die manchmal als „geschachtelte Mengenstruktur“ bezeichnet wird [13]. Die Identifikation dieser Struktur wird als eine der zentralen Herausforderungen beim Bayes'schen Denken betrachtet. Insbesondere erfordert die Schätzung posteriorer Werte eine Verlagerung des Fokus von einer Teil-Ganzes-Struktur (positiver Test bei Krankheit) auf eine andere (Krankheit bei positivem Test). Dieses Phänomen wurde sowohl in der kognitiven Forschung (z. B. [14]) als auch in der Mathematikdidaktik (z. B. [15]) untersucht.

(b) Die *mentale Repräsentation der quantitativen Werte* geschieht auf Basis der quantitativen Informationen durch numerische Symbole (absolute Häufigkeiten („20 Fälle“), relative Häufigkeiten/Proportionen („20 % von …“) und Wahrscheinlichkeiten („20 % Wahrscheinlichkeit, dass …“)) oder grafische Darstellungen (z.B. Balken). Sie können interne mentale Repräsentationen aktivieren. Es gibt zahlreiche Belege dafür, dass Menschen in der Lage sind, kontinuierliche Anteile zu erfassen (ratio sense, [16,17]).

(c) *Schlussfolgerungen innerhalb der mentalen Repräsentation* auf Basis des mentalen Modells erlauben es, fehlende Werte (hier, der der komplementären Hypothese) abzuleiten [18].

Schritt 2: Die mentale Repräsentation von Anteilen als Teil-Ganzes-Verhältnisse kann mentale Operationen unterstützen, um die gegebenen Informationen zu kombinieren. Wenn die Basisrate $p(H)$ und die Trefferquote $\mathrm{p}(D|H)$ mental als Anteile dargestellt werden, kann man das eine als Teil des anderen sehen. Die Kombination von Basisrate und Trefferquote auf Basis der Grundvorstellung "*Anteil eines Anteils*" entspricht im Wesentlichen einer formalen Multiplikation, wenn diese durch Zahlen dargestellt werden (vgl. [19]).

Schritt 3: Schließlich erfordert das Bayes'sche Schließen noch zwei mentale Operationen, um das gesuchte Verhältnis zu bestimmen. Erstens müssen die beiden geschachtelten Anteile zu einem neuen Ganzen zusammengeführt werden. Zweitens muss das Verhältnis eines Teils zu diesem neuen Ganzen bestimmt werden.

Das hier beschriebene Modell kann als "komplexe Grundvorstellung des Bayes'schen Schließens" aufgefasst werden. Seine Elemente (hierarchische Situation, Wahrscheinlichkeit als Anteil, Anteil von Anteil, Verhältnis von Anteilen) sind, wie die genannten Forschungen anzeigen, sowohl in der Mathematikdidaktik als Grundvorstellungen beschrieben (und damit auch curricular als Lernvoraussetzungen identifizierbar), als auch in der Kognitionsforschung als grundlegende mentale Repräsentationen beschrieben.

3. Wie verbessert/lernt man Bayes'sches Schließen?

Forschung zum Bayes'schen Urteilen hat immer schon Vorschläge generiert, auf welche Weise die empirischen Befunde genutzt werden können, um Urteile zu verbessern – ohne dass dabei ein explizites Verständnis z.B. in Form einer mathematischen Modellierung vorbeugen muss. Seltener sind Vorschläge [20, 21] oder gar Untersuchungen, wie eine schulische Instruktion aussehen kann [22, 23].

3.1 Welche Unterstützung verbessert Bayes'sches Schließen?

In der Forschung zum Bayes'schen Denken wurden viele Elemente der Informationspräsentation systematisch variiert, um die zugrunde liegenden kognitiven Prozesse zu untersuchen (vgl. [24]). Ein starker Fokus liegt überwiegend auf dem Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten und natürlichen Häufigkeiten. Die Lösungsraten steigen erheblich an, wenn die Daten als natürliche Häufigkeiten dargestellt werden. Hier sind jedoch die Basisrate (Prävalenz) und die Trefferquote (Testspezifität) bereits in den gegebenen Informationen enthalten („10 von 140 von 1000"), wodurch der Kombinationsschritt allerdings überflüssig wird. Ein anderer Fokus besteht in der unterstützenden Wirkung von graphischen Repräsentationen [25, 26, 27].

Kaum systematisch beachtet wurde bisher der Effekt des Denkens in Anteilen als Vorform des Denkens in Wahrscheinlichkeiten. Leuders & Loibl (2024) konnten (in der Oberstufe des berufsbildenden Gymnasiums) unter Kontrolle der graphischen Repräsentation und Vermeidung numerisch-symbolischen Kalküls nachweisen, dass die verbale Rahmung durch Anteilsbegriffe derjenigen durch Wahrscheinlichkeitsbegriffe überlegen ist.

3.2 Mit welcher Instruktion lernt man Bayes'sches Schließen?

Viele Interventionen nutzen obige Darstellungen als Unterstützung beim Aufbau von Wissen und Fertigkeiten zum Lösen von Bayes'schen Aufgaben [28] vergleichen verschiedene unterrichtsnahe Lerngelegenheiten und stellen fest, dass grafische Repräsentationen die Lösungsquoten bei Bayes-Aufgaben steigern, allerdings mit der Erstellung solcher Repräsentation in einem späteren Anwendungsfall, neue Schwierigkeiten erzeugt werden.

Insbesondere Lernende mit geringeren Lernvoraussetzungen nicht per se von Visualisierungen mehrstufiger Wahrscheinlichkeiten profitieren, sondern explizit bei der Darstellungsvernetzung unterstützt werden müssen [29].

4. Fazit und Ausblick

Man kann und sollte beim Erarbeiten des Bayes'schen Urteilens konsequent aufbauen auf Grundvorstellungen der Sekundarstufe, insbesondere auf Anteilsdenken als Fundament für (ein- und mehrstufiges) Wahrscheinlichkeitsdenken (vgl. Böcherer-Linder et al., 2017). Dabei kann man mit (wenigen) durchgehenden visuellen Darstellungen als Verstehensunterstützung arbeiten (z.B. Bruchstreifen – Prozentstreifen – Wahrscheinlichkeitsstreifen), so wie die bekannten Werkzeuge zur Unterstützung beim Lösen von Textaufgaben heranziehen. Abschließend wird eine bisher selten herangezogene Visualisierung diskutiert, die die verschiedenen elementaren Grundvorstellungen des Bayes'schen Schließens miteinander verbindet: Das "Röhrendiagramm", bekannter auch als Sankey-Plot (Abb. 2, Schmidt, 2008).

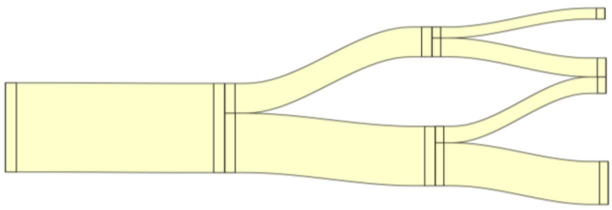

Abb. 2 Der Sankey-Plot repräsentiert Grundvorstellungen beim Bayes'sches Schließen

Literatur

Böcherer-Linder, K., Eichler, A., & Leuders, T. (2018). Anteile und Wahrscheinlichkeiten darstellen – das Einheitsquadrat als Visualisierung nach dem Spiralprinzip. MU - *Der Mathematikunterricht*, 63(6), 11–18.

Loibl, K., & Leuders, T. (2024). Thinking in proportions rather than probabilities facilitates Bayesian reasoning. In: *Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (Vol. 46).

Schmidt, M. (2008). The Sankey diagram in energy and material flow management: part II: methodology and current applications. *Journal of industrial ecology*, 12(2), 173-18