FEIL, Lidia
Marburg

„Das ist ein Beispiel, das gefällt mir (nicht).“ – Studierende bewerten Beweisansätze mit einem Beispiel oder mit einer Beispielklasse bei falscher All- und wahrer Existenzaussage

Korrekter Umgang mit quantifizierten Aussagen ist beim mathematischen Arbeiten wichtig. Dies stellt jedoch insbesondere für Studienanfänger*innen eine Herausforderung dar (z.B. Epp, 1999; Dubinsky et al., 1988). Ein Aspekt, der zum korrekten Umgang mit quantifizierten Aussagen gehört, ist das Beweisen bzw. Widerlegen solcher. Eine Allaussage lässt sich mit einem Gegenbeispiel widerlegen, eine Existenzaussage mit einem Beispiel beweisen. In diesen beiden Fällen sprechen wir von einem *Beweis durch Beispiel*.

Hintergrund und Forschungsanliegen

Manche Studierende setzen solche Beweise durch Beispiel in ungeeigneten Fällen ein. Dies stützt beispielsweise die Studie von Stavrou (2014), in der einige Studierende Beispiele genutzt haben, um eine allgemeingültige Aussage zu beweisen, auch wenn dies als Beweis nicht ausreichend war. Es kommt auch vor, dass Studierende Gegenbeispiele als Ausnahmen und nicht als Widerlegung ansehen, wenn ihnen diese zu Aussagen vorgelegt werden, die sie eigenständig formuliert haben (Zazkis & Chernoff, 2008). Manche Studierende scheinen also in Bezug auf Allaussagen, sowohl beim eigenständigen Führen von Beweisen durch Beispiel als auch beim Validieren vorgegebener Beweise durch Beispiel Schwierigkeiten zu haben. Es ist bisher wenig untersucht, wie Studierende in Bezug auf Existenzaussagen Beweise durch Beispiel führen und vorgegebene Beweise validieren.

In diesem Projekt werden quantifizierte Aussagen der Form $\forall x \in D: P(x)$ und $\exists x \in D: P(x)$ betrachtet. (Der Definitionsbereich D kann hierbei mehrdimensional und die Variable x entsprechend ein Tupel von Variablen sein.) Ein *Beispiel* ist eine konkrete Belegung der Variable x mit einem mathematischen Objekt (s. Buchbinder & Zaslavsky, 2009, für ein Rahmenmodell zur Nutzung von Beispielen zum Beweisen oder Widerlegen solcher Aussagetypen).

Beim Beweisen oder Widerlegen von Aussagen können anstelle von Einzelbeispielen auch Mengen von Beispielen zur Argumentation eingesetzt werden; solche Mengen können etwa durch Eigenschaften *spezifiziert* sein. Wir nennen eine Menge von Beispielen, die nicht einelementig ist und nicht dem gesamten Definitionsbereich gleicht, eine *Beispielklasse.*

Ein Beispiel erfüllt beim Beweisen einer wahren Existenzaussage bzw. beim

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Widerlegen einer Allaussage in logischer Hinsicht dieselbe Funktion wie eine Beispielklasse und es stellt sich die Frage, ob Studienanfänger*innen das erkennen. Expert*innen könnten in manchen Situationen die Verwendung einer Beispielklasse einem Einzelbeispiel vorziehen, weil diese eher eine Grundlage zum Generalisieren bietet. Die diesbezüglichen Präferenzen von Studierenden sind hingegen nicht bekannt. Es stellt sich also die Frage, ob und ggf. warum Studierenden Beweise mit einem Beispiel besser (oder schlechter) gefallen (Beweisevaluation, vgl. Pfeiffer, 2011) als Beweise mit einer Beispielklasse.
In diesem Beitrag berichten wir über einen Teil einer Studie und betrachten dazu die folgenden Forschungsfragen:
(FF1) Welche *Kriterien* formulieren Studierende, wenn sie bewerten sollen, wie gut ihnen vorgelegte Beweisansätze gefallen?
(FF2) Inwieweit *unterscheiden* sich die Bewertungen der Beweisansätze, die ein Beispiel enthalten, im Vergleich zu den Bewertungen der Beweisansätze, die Beispielklassen enthalten?

Methodisches Vorgehen

Es wurde eine zweiteilige Interviewstudie mit zwölf Studienanfänger*innen der Studiengänge (Wirtschafts-)Mathematik BSc, LA Mathematik und Physik BSc durchgeführt. Im ersten Teil sollten Studierende zwei Aussagen, eine wahre Existenz- und eine falsche Allaussage, beweisen bzw. widerlegen. In der als erste gestellten Aussage ging es um linear (un-)abhängige Mengen. Eine Hälfte der Studierenden hat die Aussage als falsche Allaussage erhalten, die andere Hälfte hat die Negation dieser Aussage bearbeitet, was einer wahren Existenzaussage entspricht (s. Tab. 1). Analog wurden zwei Versionen für die zweite Aussage, die zu linearen Abbildungen formuliert war, erstellt. Auf diese Weise konnte die jeweilige Aussage in beiden Versionen mit demselben Beispiel bzw. derselben Beispielklasse bewiesen bzw. widerlegt werden.

Version 1 falsche $\forall$-Aussage	Für jeden Vektorraum V und für jede linear abhängige Teilmenge S von V gilt: Jede Teilmenge von S ist linear abhängig.
Version 2 wahre $\exists$-Aussage	Es gibt einen Vektorraum V und eine linear abhängige Teilmenge S von V mit der Eigenschaft: Es gibt eine linear unabhängige Teilmenge von S.

Tab. 1: Aussage 1 beider Versionen

Im zweiten Teil der Studie wurden den Studierenden fiktive, kurze und ohne Erklärtext verfasste Beweisansätze vorgelegt, sechs zu Aussage 1 und fünf zu Aussage 2. Manche der Beweisansätze enthielten ein Beispiel, andere eine Beispielklasse. Zudem gab es zu jeder Aussage auch falsche Beweisansätze. Abbildung 1 und Abbildung 2 sind Beispiele der eingesetzten Beweisansätze zu Aussage 1. Beweisansatz B enthält eine Beispielklasse, denn die

Teilmenge von S wird nur dadurch spezifiziert, dass sie einelementig sein soll.

Aussage 1
Für jeden Vektorraum V und für jede linear abhängige Teilmenge S von V gilt: Jede Teilmenge von S ist linear abhängig.

Notizen (zu Deinen Überlegungen):

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^2 \text{ und } \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\subset\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Abb. 1: Beweisansatz K zur Aussage 1 mit einem Beispiel, Version 1

Aussage 1
Für jeden Vektorraum V und für jede linear abhängige Teilmenge S von V gilt: Jede Teilmenge von S ist linear abhängig.

Notizen (zu Deinen Überlegungen):

Seien $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$ linear abhängig und alle v_i ungleich dem Nullvektor,
$\{v_i\}$ ist linear unabhängig.

Abb. 2: Beweisansatz B zur Aussage 1 mit einer Beispielklasse, Version 1

Die Beweisansätze dienten als Grundlage für ein Interview, in dem die Studierenden unter anderem aufgefordert wurden, eine Bewertung mit einer Punktzahl zwischen 0 und 10 abzugeben, die wiedergibt, wie gut ihnen die Beweisansätze gefallen haben (Frage nach der Bewertung). Des Weiteren sollten sie versuchen zusammenzufassen, nach welchen Kriterien sie ihre Bewertung vorgenommen haben (Frage nach Kriterien).

Einblick in die Ergebnisse

Nach einer ersten Analyse der Studierendenantworten konnten Kriterien verschiedener Art identifiziert werden. Zum einen wurden von Studierenden Kriterien wie „Richtigkeit“ und „Allgemeinheitsgrad“ der Beweisansätze als Bewertungskriterien formuliert. Dies sind Kriterien, die sich den objektiven Eigenschaften der Beweisansätze zuordnen lassen. Zum anderen nannten sie auch „Verständlichkeit“ als verwendetes Bewertungskriterium. Dies ist eine subjektbezogene Einschätzung. Während einige der Studierenden ihre vergebene Bewertungspunktzahl ausschließlich mit objektiven Eigenschaften der Beweisansätze begründeten, bezogen sich andere hauptsächlich auf Kriterien ihrer subjektiven Einschätzung. Eine Erklärung für diesen Unterschied könnte sein, dass Studierende, die beim Bewerten objektive Eigenschaften berücksichtigten, weniger Schwierigkeiten hatten, die Beweisansätze zu verstehen, als Studierende, die beim Bewerten Kriterien subjektiver Einschätzung heranzogen.
Das Kriterium „Allgemeinheitsgrad“ ist insofern besonders, als dass im Vergleich zu den anderen Kriterien hier a priori keine begründete Vermutung

formuliert werden kann, ob Studierende den Beweisansätzen, die sie allgemeiner als andere bezeichnen, eine bessere Bewertung geben oder nicht. Ein Vergleich der Bewertungspunkte der Beweisansätze B und K zeigt, dass die Mehrheit, acht der zwölf Personen, den Beweisansatz B (mit Beispielklasse) besser bewertet hat als den Beweisansatz K (mit Beispiel). Die meisten von den Studierenden begründeten dies durch die verschiedenen Allgemeinheitsgrade der beiden Beweisansätze. Allerdings implizierten einige von ihnen fälschlicherweise, dass der Beweisansatz K nicht beweiskräftig sei. Andere beschrieben etwa, dass sie allgemeinere Beweisansätze für schöner hielten oder dass diese mehr Aussagekraft hätten. Drei der zwölf Studierenden bewerteten den Beweisansatz K besser als B. Dies begründeten sie beispielsweise damit, dass der Beweisansatz K nicht so allgemein, sondern ein Beispiel ist und für sie gut zu verstehen sei. Außerdem gibt es eine Person, die zwar äußerte, dass K und B unterschiedlich allgemein sind, aber dennoch beide mit derselben Punktzahl bewertete. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass zwar die meisten Studierenden Unterschiede im Allgemeinheitsgrad zwischen den Beweisansätzen erkannten und diesen als Kriterium beim Bewerten hinzuzogen, sie jedoch einen hohen Allgemeinheitsgrad sehr unterschiedlich bewerteten sowohl hinsichtlich der Einordnung als gut oder schlecht als auch hinsichtlich der dafür angeführten Begründungen. Denn scheinbar gibt es Unterschiede in Bezug darauf, welche Bedeutungen Studierende einem Beweisansatz beimessen, den sie als (wenig) allgemein ansehen.

Literatur

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2009). A framework for understanding the status of examples in establishing the validity of mathematical statements. In M. Tzekaki et al. (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 225–232).

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. (1988). The student's construction of quantification. *For the learning of mathematics*, *8*(2), 44-51.

Epp, S. (1999). The language of quantification in mathematics instruction. *Developing mathematical reasoning in grades K-12 (1999 Yearbook)*, 188-197.

Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: Observations from proof validation and evaluation performances.* [Dissertation] National University of Ireland, Galway.

Stavrou, S. G. (2014). Common Errors and Misconceptions in Mathematical Proving by Education Undergraduates. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1.*

Zazkis, R. & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary?. *Educational Studies in Mathematics, 68*(3), 195–208.