

Ingenieurmathematik
in erster Näherung
mit vielen Beispielen

S. Kessel
(em. Prof. für Mechanik)

Universität Dortmund

Inhalt

Vorwort

1. Zahlen
 - 1.1 Reelle Zahlen
 - 1.2 Bruchrechnung
 - 1.3 Komplexe Zahlen
2. Geometrische Grundlagen
 - 2.1 Grundbegriffe
 - 2.2 Kegelschnitte
3. Elementare Funktionen
 - 3.1 Potenzrechnung
 - 3.2 Polynome
 - 3.3 Trigonometrische Funktionen
 - 3.4 Exponentialfunktionen
 - 3.5 Erläuterung einiger Begriffe
4. Geradengleichungen
5. Differentialgleichungen
 - 5.1 Der Differentialquotient
 - 5.2 Differentiationsregeln
 - 5.3 Kurvendiskussion
 - 5.4 Differentialgleichungen
 - 5.5 Reihenentwicklungen
6. Integralrechnung
7. Vektoren im dreidimensionalen Raum
8. Funktionen von zwei Variablen
 - 8.1 Differentialrechnung
 - 8.2 Integralrechnung
9. Kurvengeometrie
10. Matrizen
11. Dyaden und Tensoren

Vorwort

Viele Jahre hatte ich Studierende der Ingenieurwissenschaften im Fach Technische Mechanik auszubilden und musste dabei zunehmend Zeit für Hilfestellungen bei der Anwendung von mathematischem Grundlagenwissen aufwenden, das bei der Beschreibung physikalischer Sachverhalte erforderlich ist. Auf die in den Vorlesungen über höhere Mathematik systematisch und nach strengen Regeln behandelten Sachgebiete konnte ich meistens nicht verweisen, weil die entsprechenden Themen aus fachlichen Gründen erst später im Vorlesungsprogramm vorgesehen sind. Um dieses Dilemma etwas zu entschärfen, habe ich in zusätzlichen Vorlesungen und Übungen versucht, das zu Beginn eines ingenieurwissenschaftlichen Studiums unbedingt notwendige Werkzeug mathematischer Begriffe und Methoden in vereinfachter Darstellung zu beschreiben und in Beispielen vorzuführen.

Meine Erfahrungen aus diesen freiwilligen Ergänzungskursen waren das Motiv für dieses Buch, dessen Titel „Ingenieurmathematik in erster Näherung“ ausdrücken soll, dass sein Inhalt zwar notwendig aber in vielen Fällen nicht hinreichend für ein wissenschaftliches Ingenieurstudium ist. Es soll eine Hilfe sein für die Anwendungsfächer im Grundlagenstudium und eine Anregung zur Beschäftigung mit den Themen der Fachvorlesungen in angewandter Mathematik. Deshalb wurde auf strenge Beweisführungen weitgehend verzichtet und der ausführlichen Behandlung von Beispielen mehr Platz eingeräumt. Die Themenauswahl beruht auch auf meinen Erlebnissen, die ich in Sprechstunden und bei der Durchsicht von Prüfungsklausuren hatte. Mir ist dabei aufgefallen, dass in einem Brückenkurs für Studienanfänger leider auch an die Regeln der Bruchrechnung erinnert werden muss.

Für Anregungen und kritische Hinweise bin ich dankbar. Sie erreichen mich über

sgfrd.kessel@t-online.de

1

Zahlen

1.1 Reelle Zahlen (R)

Bei der Nummerierung von Objekten und der mathematischen Beschreibung von geometrischen und physikalischen Größen werden reelle Zahlen gebraucht. Man unterscheidet:

Natürliche Zahlen (N):

1 2 3 4 ...

Ganze Zahlen (Z):

... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ...

Rationale Zahlen (Q):

Beispiele: $\frac{1}{4} = 0,25$ $\frac{2}{3} = 0,666\dots =: 0,\bar{6}$ $\frac{1}{11} = 0,090909\dots =: 0,\overline{09}$

endlicher oder periodisch - unendlicher Dezimalbruch

Nichtrationale (irrationale) Zahlen:

Beispiele: $\sqrt{2} = 1,414213562\dots$ $\sqrt[3]{10} = 2,15443469\dots$

nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch

Algebraische Zahlen: nichtrationale Lösungen der Gleichungen

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n \text{ ganzzahlig})$$

Transzendente Zahlen (nichtalgebraische Zahlen):

Beispiele: $\pi = 3,141592654\dots$ $e = 2,71828182846\dots$

1.2 Bruchrechnung

Beim Rechnen mit Zahlen und Ausdrücken muß die Bruchrechnung unbedingt beherrscht werden. Deshalb werden hier die entsprechenden Regeln als Erinnerung an die Grundschulzeit zusammengestellt.

Der Wert eines Bruches B ändert sich nicht, wenn der Zähler Z und der Nenner N mit der gleichen Zahl $a \neq 0$ multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert werden:

$$B := \frac{Z}{N} = \frac{aZ}{aN} = \frac{Z/a}{N/a}, \quad a \neq 0.$$

Bei Multiplikation und Division eines Bruches mit einer Zahl a gilt:

$$aB = \frac{aZ}{N}, \quad \frac{1}{a}B = \frac{Z}{aN}.$$

Für die Addition und Subtraktion von Brüchen ist die Einführung eines gemeinsamen Nenners N_g erforderlich:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \frac{Z_1}{N_1}, \quad B_2 := \frac{Z_2}{N_2}, & \rightarrow & \quad N_g = a_1 N_1 = a_2 N_2, \\ B_1 &:= \frac{Z_1}{N_1} = \frac{a_1 Z_1}{N_g}, \quad B_2 := \frac{Z_2}{N_2} = \frac{a_2 Z_2}{N_g}, \\ B_1 + B_2 &= \frac{a_1 Z_1 + a_2 Z_2}{N_g}, \quad B_1 - B_2 = \frac{a_1 Z_1 - a_2 Z_2}{N_g}. \end{aligned}$$

Bei Multiplikation und Division von Brüchen ist zu beachten:

$$B_1 \cdot B_2 = \frac{Z_1 Z_2}{N_1 N_2}, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{Z_1 N_2}{N_1 Z_2}.$$

▼ Beispiel 1.2.1

Mit $B_1 = 2/3$, $B_2 = 4/7$ sollen die Zahlen $(B_1 + B_2)$, $(B_1 - B_2)$, $B_1 B_2$ und B_1/B_2 berechnet werden.

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= \frac{14}{21} + \frac{12}{21} = \frac{26}{21}, & B_1 - B_2 &= \frac{14}{21} - \frac{12}{21} = \frac{2}{21}, \\ B_1 B_2 &= \frac{8}{21}, & B_1/B_2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$



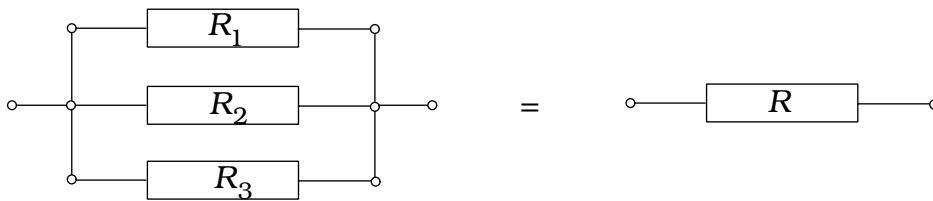
▼ Beispiel 1.2.2

Man berechne mit $B_1 = 1/2$, $B_2 = 1/3$, $B_3 = 1/4$ die Zahlen $(B_1 + B_2 + B_3)$ und $(B_1 B_2 B_3)$.

$$B_1 + B_2 + B_3 = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}, \quad B_1 B_2 B_3 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{1}{24}.$$



▼ Beispiel 1.2.3



Drei parallel geschaltete elektrische Widerstände R_1, R_2 und R_3 können durch einen Widerstand R ersetzt werden, wenn

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{R_i}$$

ist, also

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3}, \quad R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2}.$$

Wenn $R_1 > R_2 > R_3$ ist, wird

$$R = \frac{R_1}{1 + R_1/R_2 + R_1/R_3} < \frac{R_1}{3}.$$



▼ Beispiel 1.2.4

Der Bruch

$$B = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + a}}}$$

kann in die einfachere Darstellung

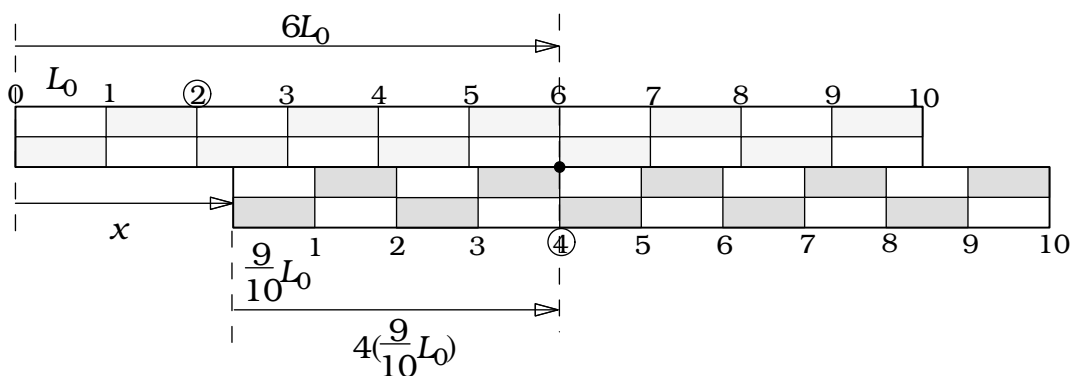
$$B = \frac{1}{1 + \frac{1+a}{2+a}} = \frac{2+a}{3+2a}$$

umgeformt werden.



▼ Beispiel 1.2.5

Mit einem beweglichen Hilfsmaßstab (Nonius) kann man die Dezimalstellen bei einer Längenmessung genau ablesen, wenn man den Hilfsmaßstab mit $9/10$ der Längeneinheit L_0 skaliert. Der Meßwert ergibt sich aus der Position der übereinanderliegenden Skalenstriche auf der festen und der beweglichen Skala.



$$x = 6L_0 - 4\left(\frac{9}{10}L_0\right) = (6 - 3,6)L_0 = 2,4L_0.$$



▼ Beispiel 1.2.6

Beim Vergleich von zwei Größen in gleicher Dimension und Maßeinheit, wobei b_0 die Bezugsgröße und v die damit zu vergleichende Größe ist, verwendet man oft das dimensionslose Verhältnis v/b_0 , das man gern in Prozent (%) ausdrückt, also auf die Bezugsgröße von $b_0 = 100$ Maßeinheiten bezieht.

Hat ein ungedehntes Gummiband die Länge $L_0 = 15\text{cm}$, so ist es bei einer Verlängerung um $\Delta L = 5\text{cm}$ um

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{5\text{cm}}{15\text{cm}} = \frac{1}{3} = 0,333 = 33,3\% .$$

gedehnt.

Ist 135 € als unverbindlicher Richtpreis einer Ware angegeben, der Verkaufspreis aber 178 € , so beträgt der auf den Richtpreis bezogene Preisaufschlag

$$\alpha = \frac{178 - 135}{135} = 0,32 = 32\% .$$

Wenn 37 von 81 Teilnehmern an einer Klausur die Prüfung bestanden haben, sind

$$\delta = \frac{81 - 37}{81} = 0,54 = 54\%$$

der Kandidaten durchgefallen.

In 0,100 kg Wasser kann man bei 20°C Wassertemperatur maximal 0,204 kg Zucker auflösen. Der Zuckergehalt der gesättigten Lösung beträgt dann

$$\zeta = \frac{0,204}{0,304} = 0,67 = 67\% ;$$

trinkt man 0,1 kg der Zuckerlösung, so nimmt man 0,067 kg Zucker zu sich.



▼ Beispiel 1.2.7

Die Gleichung

$$\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{a_2 \cdot b}{a_1}$$

beschreibt das Schema des „Dreisatzes“:

Wenn für die Aussage a_1 die Aussage b gilt, welche Aussage x gilt dann
 7 Brötchen kosten 1,82 Euro wieviel Euro kosten
 für die Aussage a_2 ?
 9 Brötchen

$$\frac{7 \text{ Brötchen}}{1,82 \text{ Euro}} = \frac{9 \text{ Brötchen}}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{9 \text{ Brötchen} \cdot 1,82 \text{ Euro}}{7 \text{ Brötchen}} = 2,34 \text{ Euro}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Aussagenpaare $\{a_1, a_2\}$ und $\{b, x\}$ jeweils in gleichen Maßeinheiten zu formulieren sind. ▲

1.3 Komplexe Zahlen (C)

Beim wissenschaftlichen Rechnen ist die Beschränkung auf reelle Zahlen unzureichend. Die abstrakten komplexen Zahlen erlauben häufig eine elegante und leistungsfähige Darstellung von mathematischen und physikalischen Sachverhalten und sind in diesem Anwendungsbereich unverzichtbar.

Wir definieren als komplexe Zahl \mathbf{z} die aus zwei Teilen bestehende Zahl

$$\mathbf{z} = a + ib \quad (a, b: \text{reelle Zahlen})$$

$$i := \text{imaginäre Einheit} \quad i^2 := -1, \quad \sqrt{-1} := i.$$

$$a: \text{Realteil von } \mathbf{z}, \quad b: \text{Imaginärteil von } \mathbf{z},$$

und dazu

$$\bar{\mathbf{z}} := a - ib$$

als zu $\mathbf{z} = a + ib$ konjugiert komplexe Zahl.

(Insbesondere in der Elektrotechnik verwendet man für die imaginäre Einheit den Buchstaben j .)

Es gelten die folgenden Regeln für das Rechnen mit den komplexen Zahlen

$$\mathbf{z}_1 = a_1 + ib_1, \quad \mathbf{z}_2 = a_2 + ib_2.$$

$$\lambda \mathbf{z}_1 = \lambda a_1 + i \lambda b_1, \quad (\lambda \text{ reelle Zahl})$$

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2 := (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 := (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1),$$

$$\mathbf{z}_1 \bar{\mathbf{z}}_1 := a_1^2 + b_1^2.$$

$$|\mathbf{z}| := \sqrt{\mathbf{z} \bar{\mathbf{z}}} \quad \text{Betrag der komplexen Zahl } \mathbf{z},$$

$$|a + ib| = \sqrt{(a + ib)(a - ib)} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{1}{\mathbf{z}} = \frac{\bar{\mathbf{z}}}{\mathbf{z} \bar{\mathbf{z}}} = \frac{\bar{\mathbf{z}}}{|\mathbf{z}|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

▼ Beispiel 1.3.1

Mit den komplexen Zahlen $\mathbf{z}_1 = 3 + i4$, $\mathbf{z}_2 = 2 - i6$ berechne man $|\mathbf{z}_1|$, $|\mathbf{z}_2|$, $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2$, $1/\mathbf{z}_1$ und $\mathbf{z}_1/\mathbf{z}_2$.

$$|\mathbf{z}_1| = \sqrt{9 + 16} = 5, \quad |\mathbf{z}_2| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40},$$

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = 5 - i2,$$

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = (3 + i4)(2 - i6) = 6 - i18 + i8 + 24 = 30 - i10 = 10(3 - i),$$

$$1/\mathbf{z}_1 = \frac{1}{3 + i4} = \frac{3 - i4}{(3 + i4)(3 - i4)} = \frac{1}{25}(3 - i4),$$

$$\mathbf{z}_1/\mathbf{z}_2 = \frac{3 + i4}{2 - i6} = \frac{(3 + i4)(2 + i6)}{(2 - i6)(2 + i6)} = \frac{6 + i18 + i8 - 24}{40} = \frac{1}{20}(-9 + i13).$$



▼ Beispiel 1.3.2

Mit den komplexen Zahlen

$$\mathbf{z}_1 = 1, \quad \mathbf{z}_2 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \quad \mathbf{z}_3 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) = \bar{\mathbf{z}}_2$$

wird

$$\mathbf{z}_2 + \bar{\mathbf{z}}_2 = -1, \quad \mathbf{z}_2 \bar{\mathbf{z}}_2 = 1,$$

$$(\mathbf{z} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_3) = (\mathbf{z} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}}_2) = \mathbf{z}^2 - \mathbf{z}(\mathbf{z}_2 + \bar{\mathbf{z}}_2) + \mathbf{z}_2 \bar{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{z}^2 + \mathbf{z} + 1,$$

$$(\mathbf{z} - 1)(\mathbf{z}^2 + \mathbf{z} + 1) = \mathbf{z}^3 + \mathbf{z}^2 + \mathbf{z} - \mathbf{z}^2 - \mathbf{z} - 1,$$

$$(\mathbf{z} - \mathbf{z}_1)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_2)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_3) = \mathbf{z}^3 - 1.$$

$\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ und \mathbf{z}_3 sind die drei Lösungen der Gleichung

$$\mathbf{z}^3 - 1 = 0.$$



2

Geometrische Grundlagen

2.1 Grundbegriffe

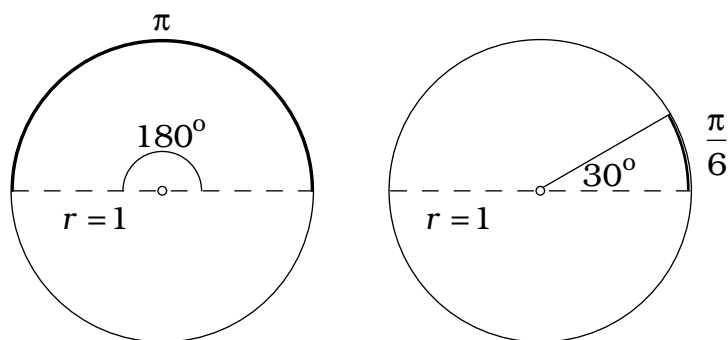
Um beispielsweise in der Mechanik die mathematische Simulation des Verhaltens technischer Systeme vorzubereiten, sind elementare Grundkenntnisse aus der **EUKLIDISCHEN Geometrie** zur Formulierung der entsprechenden Gleichungen erforderlich. Die wichtigsten sind im folgenden zusammengestellt und werden bei Studienbeginn als bekannt vorausgesetzt; sie gehören zur mathematischen Allgemeinbildung.

Grundlage für die Winkelmessung ist das Verhältnis der Länge des entsprechenden Kreisbogenabschnittes zum Radius des Kreises:

$$\alpha = \frac{\text{Umfangsabschnitt}}{\text{Radius}}.$$

Weil das Bogenmaß $\alpha = 1$ als Bezugsgröße für die praktische Winkelmessung zu groß ist (Umfangsabschnitt = Radius), verwendet man oft als Maßeinheit den Winkel

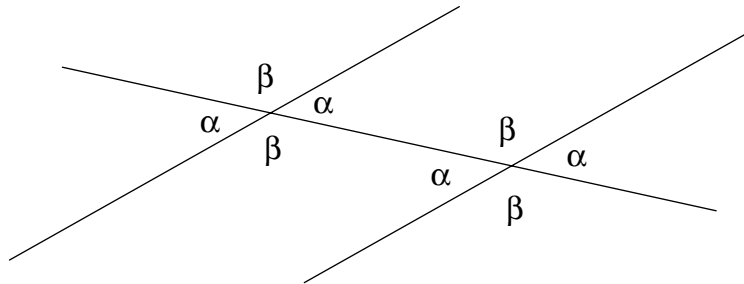
$$\alpha = \frac{\pi}{180} =: 1^\circ$$



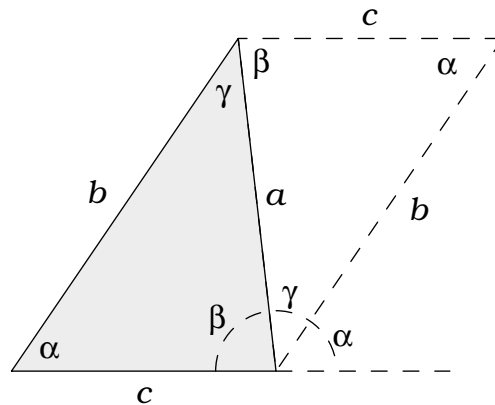
Es ist dann beispielsweise

$$\alpha = 30^\circ = 30 \cdot 1^\circ = 30 \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}.$$

Die gegenüberliegenden Schnittwinkel einer Geraden mit zwei Parallelen sind gleich.



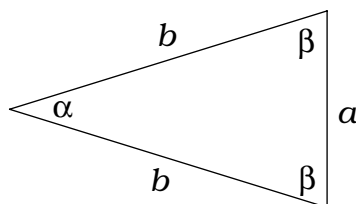
Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

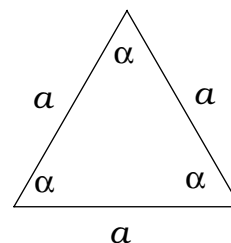
Spezielle Dreiecksformen sind das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck:

gleichschenkliges Dreieck



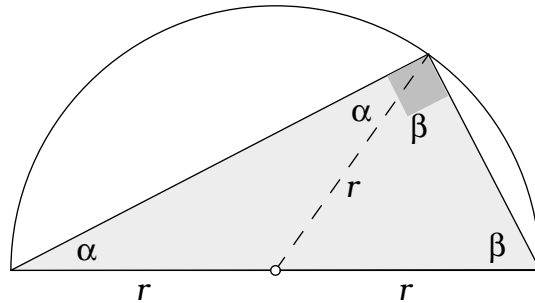
$$\beta = 90^\circ - \alpha/2$$

gleichseitiges Dreieck



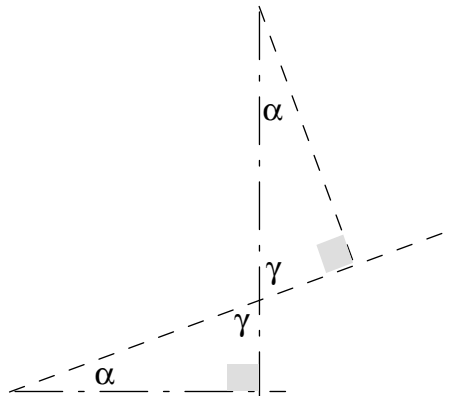
$$\alpha = 60^\circ$$

Alle Dreiecke, deren Eckpunkte auf einem Kreis liegen und den Durchmesser des Kreises als Dreiecksseite haben, sind rechtwinklig.



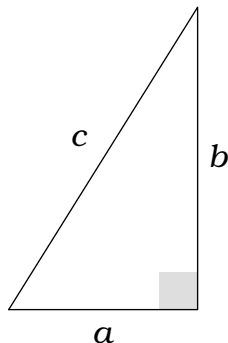
$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \quad \rightarrow \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich:

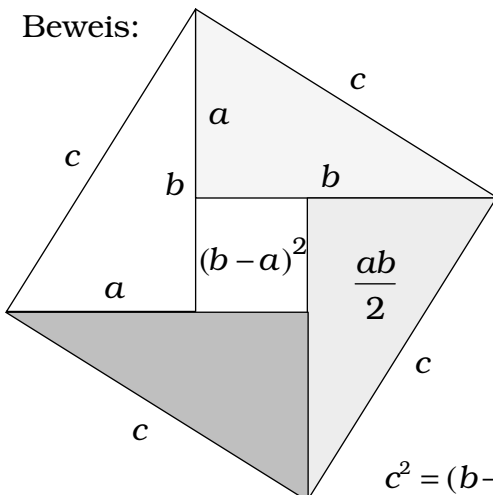


Besonders häufig wird die Aussage des **Satzes von PYTHAGORAS** benötigt: In einem *rechtwinkligen* Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse (der längsten Dreiecksseite c) gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten (a und b).

Beweis:



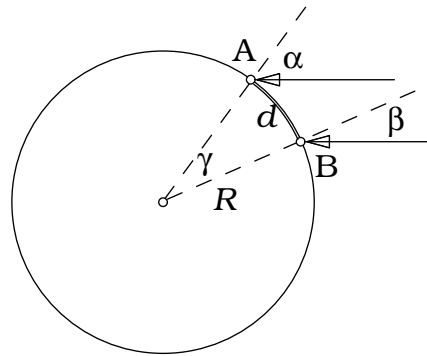
$a^2 + b^2 = c^2$



$c^2 = (b - a)^2 + 4 \left(\frac{ab}{2} \right) = a^2 + b^2$

▼ Beispiel 2.1.1

Werden an zwei Orten A und B mit dem Abstand d auf einem Meridian bei höchstem Sonnenstand die Einfallswinkel α und β der Sonnenstrahlen gemessen, so kann man den Radius R der Erdkugel berechnen:



$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$d = \gamma R$$

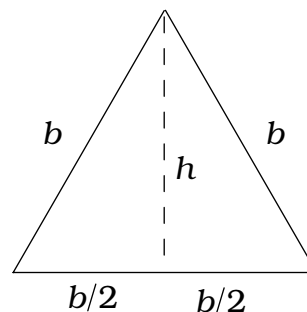
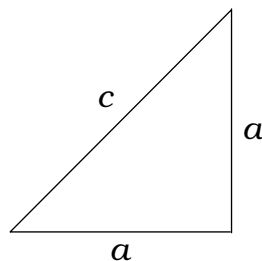
$$R = \frac{d}{\alpha - \beta}$$

(Messverfahren von ERATOSTHENES um 200 v. Chr.)



▼ Beispiel 2.1.2

Im gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck berechne man die Hypotenuse c und im gleichseitigen Dreieck die Höhe h .



Aus Anwendungen des Satzes von PYTHAGORAS auf die speziellen rechtwinkligen Dreiecke folgt

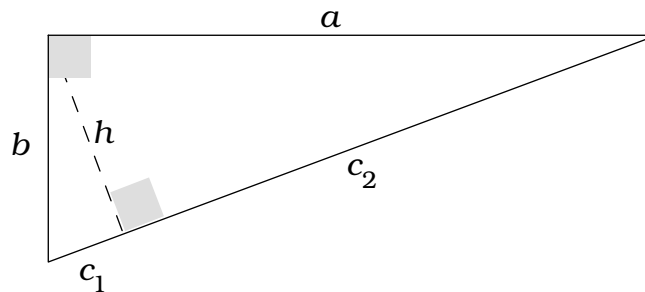
$$c^2 = a^2 + a^2 \quad \rightarrow \quad c = \sqrt{2}a$$

$$h^2 = b^2 - (b/2)^2 = \frac{3}{4}b^2, \quad \rightarrow \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}b.$$



▼ Beispiel 2.1.3

Man berechne in dem rechtwinkligen Dreieck die Höhe h aus den Hypotenusenabschnitten c_1 und c_2 .



Aus dem Satz von PYTHAGORAS, angewendet auf die beiden durch h getrennten Teildreiecke, folgt:

$$h^2 = b^2 - c_1^2,$$

$$h^2 = a^2 - c_2^2,$$

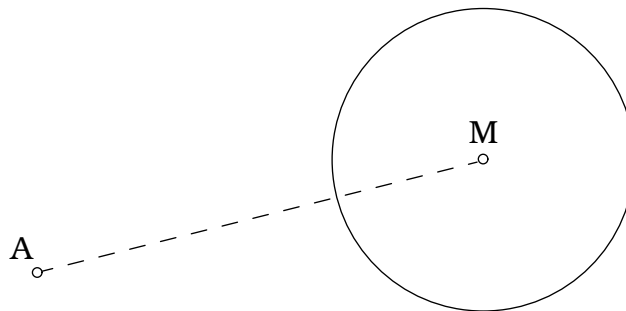
$$2h^2 = a^2 + b^2 - c_1^2 - c_2^2 = (c_1 + c_2)^2 - c_1^2 - c_2^2 = 2c_1c_2,$$

$$h = \sqrt{c_1c_2}.$$

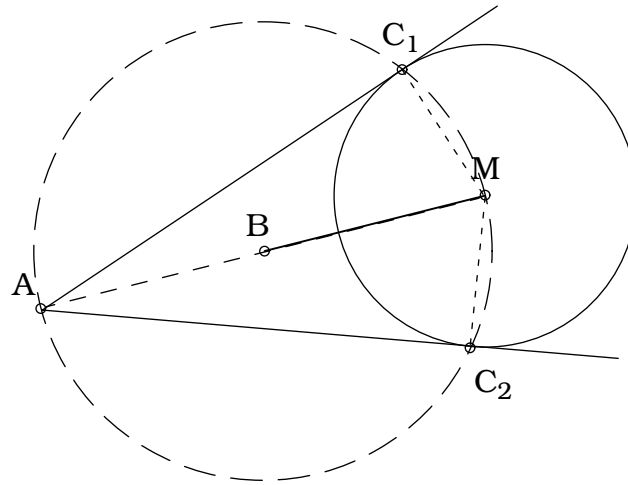


▼ Beispiel 2.1.4

Man konstruiere die von A ausgehenden Tangenten an den Kreis um M. Tangente und Kreisradius stehen aufeinander senkrecht.



Um den Mittelpunkt B der Strecke AM wird der Kreis durch M gezeichnet. Er schneidet den Kreis um M in den Punkten C_1 und C_2 . Die beiden Dreiecke AC_1M und AC_2M über dem Kreisdurchmesser AM haben in C_1 und C_2 rechte Winkel, also sind AC_1 und AC_2 die Tangenten von A an den Kreis um M.



▼ Beispiel 2.1.5

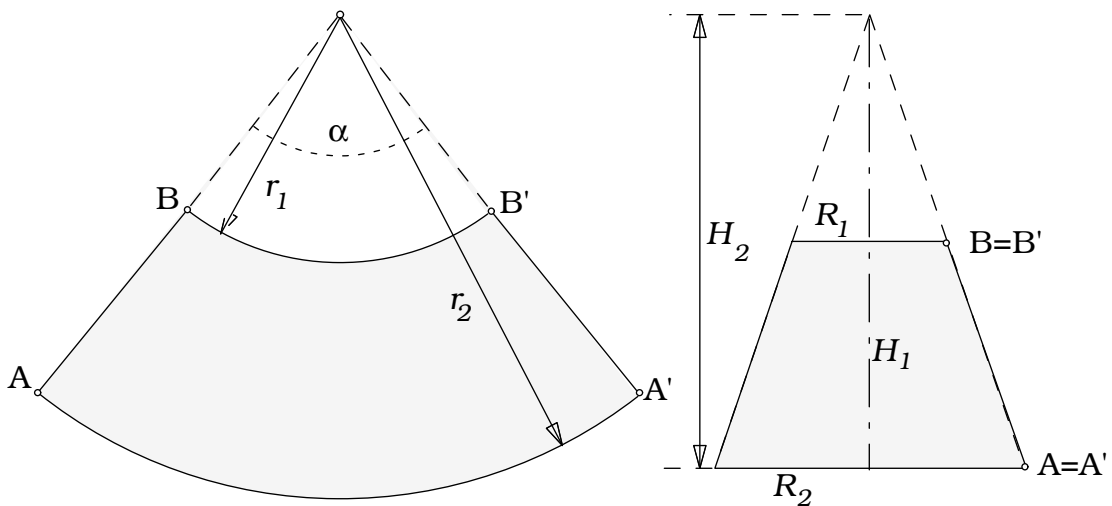
Wenn man die Seiten AB und A'B' eines kreisringsektorförmigen Papierstreifens verbindet, erhält man einen dünnwandigen Kreiskegelstumpf. Den Kreisringsektor nennt man die Abwicklung des Kreiszyklindermantels.

Gegeben sind α, r_1, r_2 , gesucht R_1, R_2, H_1, H_2 .

Es gilt

$$r_1 \alpha = 2\pi R_1, \quad r_2 \alpha = 2\pi R_2,$$

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + H_1^2}, \quad \frac{H_2}{R_2} = \frac{H_2 - H_1}{R_1}.$$



Daraus folgt:

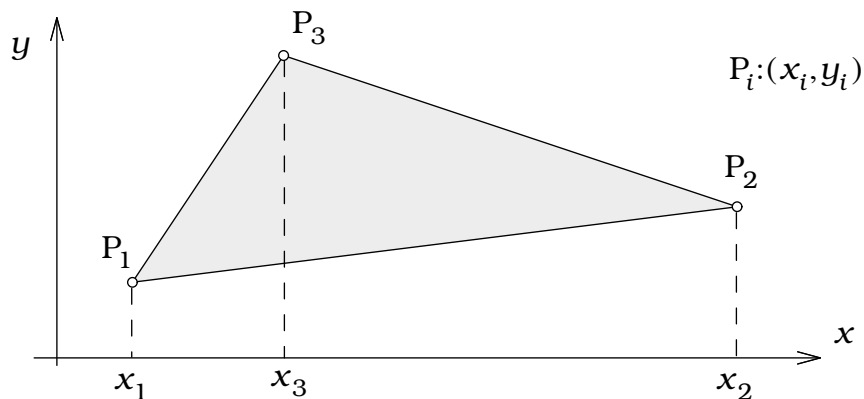
$$R_1 = \frac{\alpha}{2\pi} r_1, \quad R_2 = \frac{\alpha}{2\pi} r_2,$$

$$H_1 = (r_2 - r_1) \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}, \quad H_2 = r_2 \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}.$$



▼ Beispiel 2.1.6

Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks, das durch die Koordinaten der drei Eckpunkte in der xy -Ebene gegeben ist, kann berechnet werden, indem wir die Fläche unter den Dreieckseiten P_1P_2 und P_3P_2 in drei Trapeze zerlegen, von deren Flächeninhalten zwei addieren und den dritten subtrahieren.



$$A_{13} = \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1),$$

$$A_{32} = \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3),$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1),$$

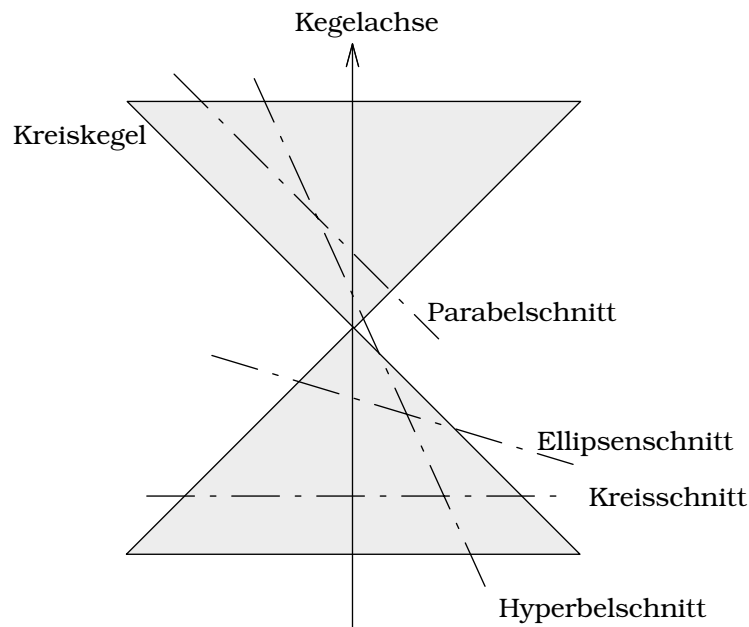
$$A = A_{13} + A_{32} - A_{12},$$

$$A = \frac{1}{2}(x_3y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2).$$

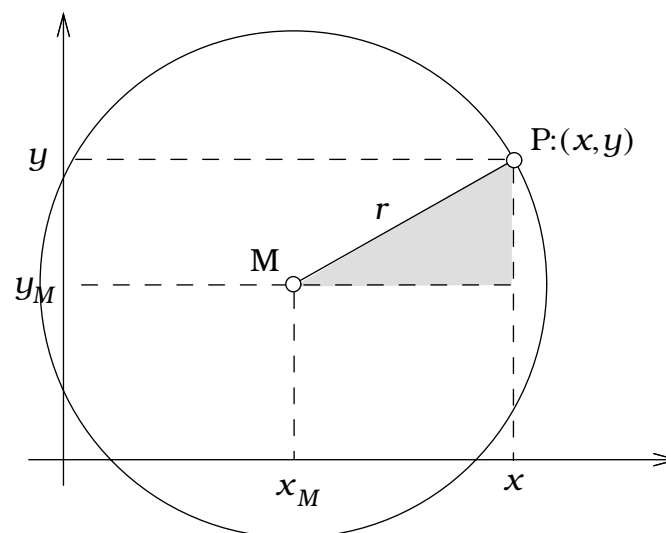


2.2 Kegelschnitte

Kreis, Ellipse, Parabel und Hyperbel sind Schnittkurven von Kreiskegeln mit unterschiedlich zur Kegelachse geneigten Ebenen.



Ein **Kreis** ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt M den gleichen Abstand r haben. Daraus ergibt sich die **Gleichung eines Kreises** in der xy -Ebene um den Mittelpunkt $M:(x_M, y_M)$ mit dem Radius r :

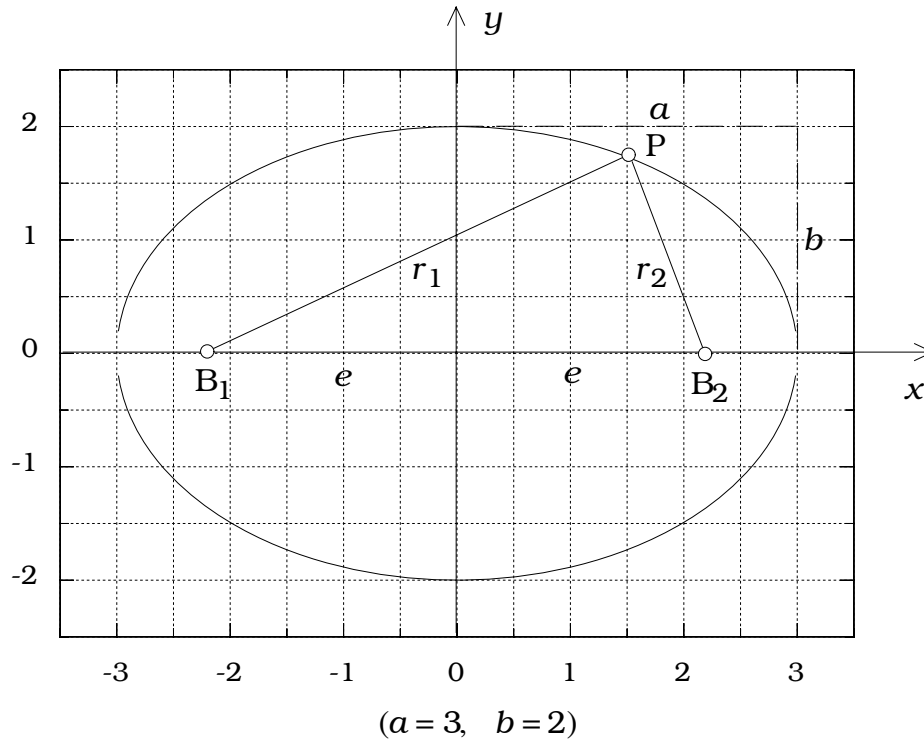


$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Gleichung des Kreises um den Koordinatenursprung ($x_M = 0, y_M = 0$):

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Eine **Ellipse** ist der geometrische Ort aller Punkte P, bei denen die *Summe* der Abstände von zwei Punkten B_1 und B_2 konstant ist; B_1 und B_2 sind die Brennpunkte der Ellipse, a und b die beiden Halbachsen, e/a die Exzentrizität.



$$r_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2},$$

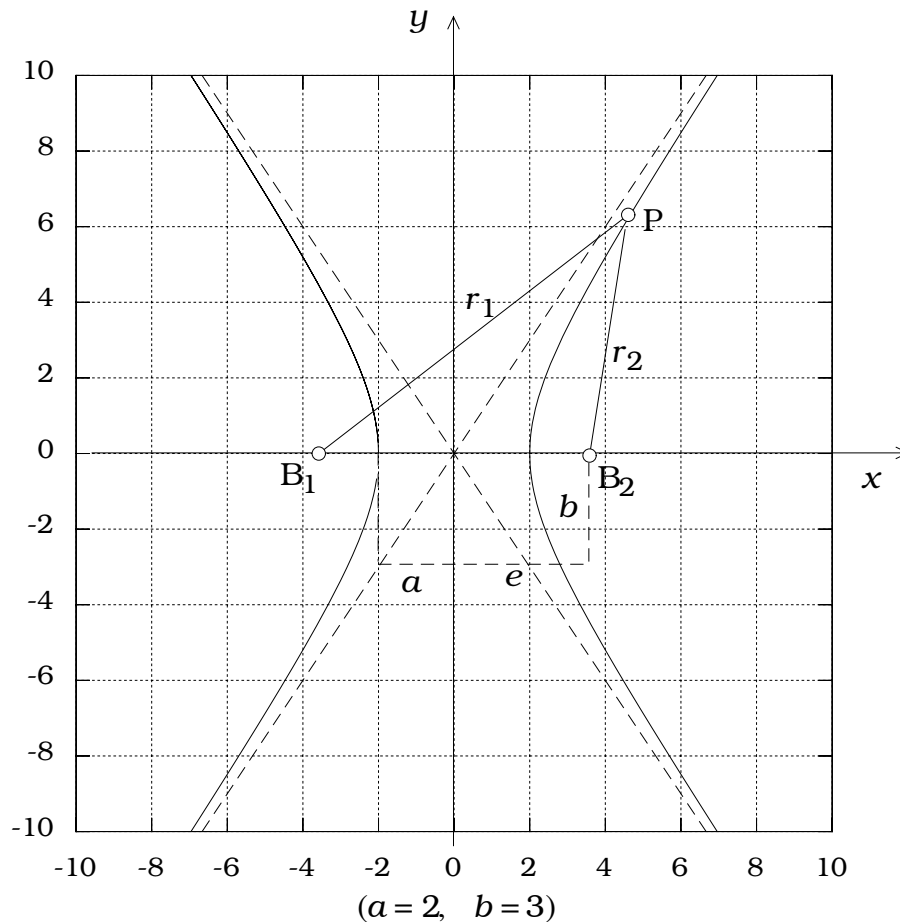
$$r_1 + r_2 = 2a,$$

$$b = \sqrt{a^2 - e^2}$$

Setzt man r_1 und r_2 in die Gleichung $r_1 + r_2 = 2a$ ein, so erhält man nach elementarer Rechnung die **Gleichung einer Ellipse** in der xy -Ebene um den Koordinatenursprung mit den Halbachsen a und b auf den Koordinatenachsen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aus der geometrischen Definition einer Ellipse ergibt sich die „Gärtnerkonstruktion“: Ein Faden der Länge $2a$ wird mit den Endpunkten in B_1 und B_2 befestigt und mit einem Stift in P gespannt. Bewegt man den Stift unter Aufrechterhaltung der Fadenspannung, so beschreibt P eine Ellipse.

Eine **Hyperbel**

ist der geometrische Ort aller Punkte P, bei denen die *Differenz* der Abstände r_1 und r_2 von zwei Punkten B_1 und B_2 konstant ist.

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

$$r_1 - r_2 = 2a,$$

$$b = \sqrt{e^2 - a^2}.$$

Setzt man r_1 und r_2 in die Gleichung $r_1 - r_2 = 2a$ ein, so erhält man die **Gleichung einer Hyperbel** in der xy -Ebene um den Koordinatenursprung und symmetrisch zu den Koordinatenachsen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

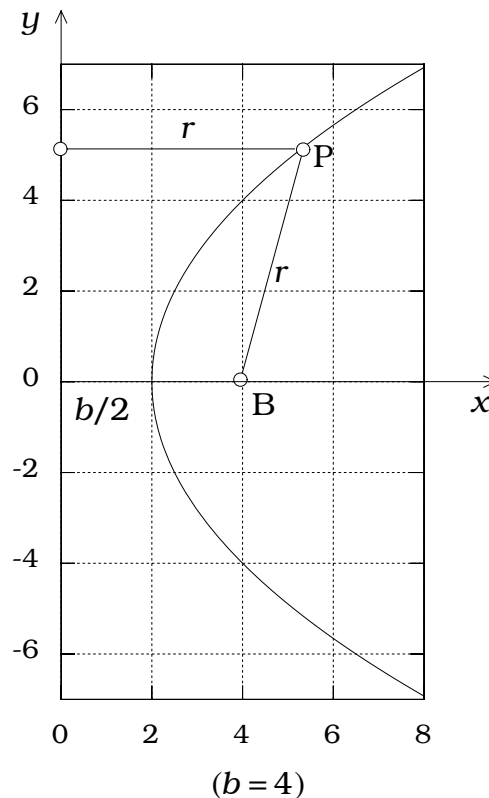
Die Geraden durch den Nullpunkt

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

sind die **Asymptoten** der Hyperbel. Aus der Hyperbelgleichung folgt

$$y = \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}, \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{b}{a}x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \pm \frac{b}{a}x.$$

Eine **Parabel**



ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt B und einer Geraden jeweils gleiche Abstände haben; B nennt man den Brennpunkt der Parabel. Wir wählen die y -Achse als Bezugsgerade und legen den Punkt B auf die x -Achse.

$$r = \sqrt{(b-x)^2 + y^2}, \quad r = x.$$

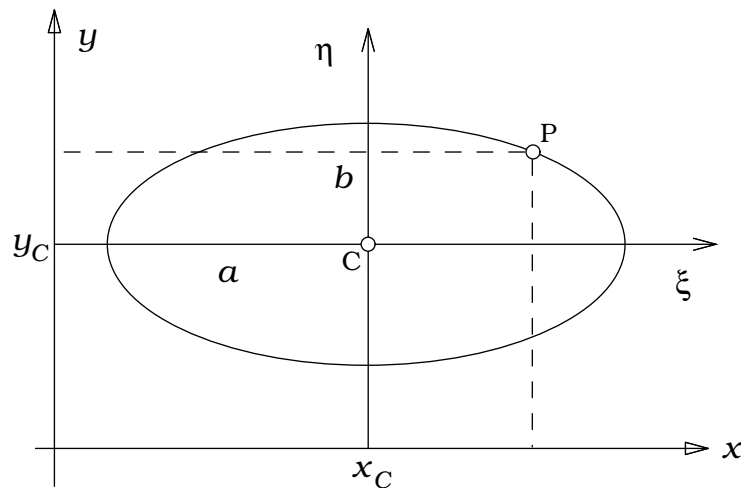
Dann ergibt sich die **Gleichung einer Parabel** in der xy -Ebene, die symmetrisch zur x -Achse liegt, wenn man die beiden Formeln für die Abstände eines Parabelpunktes P von der Geraden und vom Punkt B gleich setzt:

$$y = \pm \sqrt{2bx - b^2}.$$

▼ Beispiel 2.2.1

Im $\xi\eta$ -Koordinatensystem lautet die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$



Mit der Koordinatentransformation zwischen den parallel zueinander verschobenen Koordinatensystemen

$$\xi = x - x_C, \quad \eta = y - y_C.$$

erhalten wir als Ellipsengleichung im xy -System

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1.$$

Die Gestalt der Ellipsengleichung ist vom verwendeten Koordinatensystem abhängig.

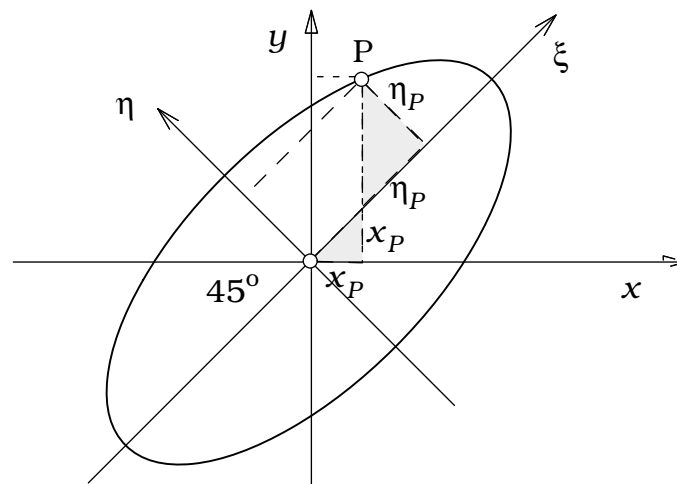


▼ Beispiel 2.2.2

Im $\xi\eta$ -Koordinatensystem lautet die Gleichung der Ellipse

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

In dem um -45° (im Uhrzeigersinn) um den Mittelpunkt der Ellipse gedrehten xy -Koordinatensystem



hat der Ellipsenpunkt P die Koordinaten (x_P, y_P) . Aus den grau dargestellten, gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecksflächen kann man entnehmen:

$$\xi_P = \sqrt{2}x_P + \eta_P, \quad y_P = x_P + \sqrt{2}\eta_P.$$

Aufgelöst nach den ξ, η -Koordinaten

$$\eta_P = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_P - x_P), \quad \xi_P = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_P + x_P),$$

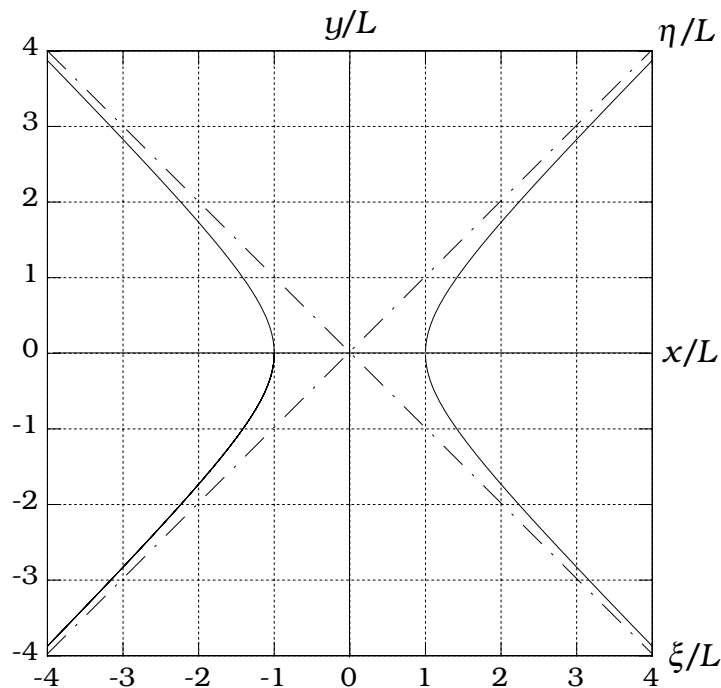
und eingesetzt in die ursprüngliche Ellipsengleichung ergibt

$$\frac{(y+x)^2}{2a^2} + \frac{(y-x)^2}{2b^2} = 1.$$

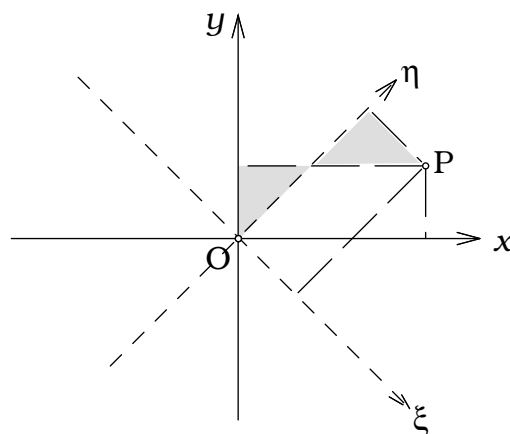


▼ Beispiel 2.2.3

Die beiden Äste der Hyperbel $x^2 - y^2 = L^2$ haben die Geraden $y = x$ und $y = -x$ zu Asymptoten (gestrichelt). Wie lautet die Hyperbelgleichung im $\xi\eta$ -Koordinatensystem der Asymptoten, das um -45° (im Uhrzeigersinn) gegen das xy -System gedreht ist?



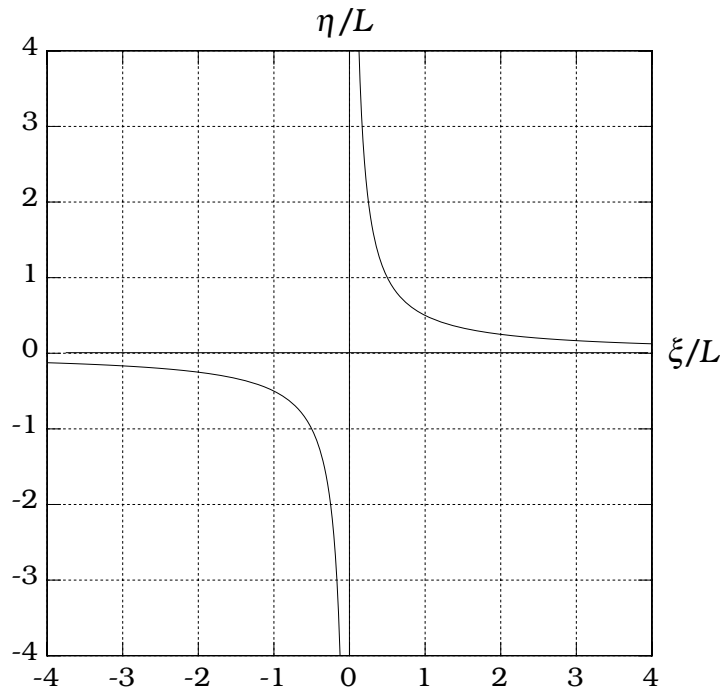
Die Beziehungen zwischen den $\xi\eta$ - und den x,y -Koordinaten eines Hyperbelpunktes lassen sich aus den markierten gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecken im folgenden Bild ablesen:



$$\begin{aligned}
 x_P &= y_P + \sqrt{2}\xi_P, \\
 \eta_P &= \sqrt{2}y_P + \xi_P.
 \end{aligned}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{aligned}
 x_P &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_P + \xi_P), \\
 y_P &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_P - \xi_P).
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Ausgangsgleichung ergibt

$$x^2 - y^2 = L^2, \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}(\eta + \xi)^2 - \frac{1}{2}(\eta - \xi)^2 = L^2, \quad \rightarrow \quad \eta = \frac{L^2}{2\xi}.$$



Hinweis:

Das Stoffgesetz eines idealen Gases lautet:

$$pV = nRT.$$

Dabei ist p der Druck des Gases, das im Volumen V bei der absoluten Temperatur T eingeschlossen ist.

$$n = \frac{m}{M} = \frac{\text{Masse des Gases}}{\text{Molmasse des Gases}}$$

ist die Molzahl der Gasmenge und

$$R = 8,31441 \frac{\text{kJ}}{\text{kmol} \cdot ^\circ\text{K}}$$

die universelle Gaskonstante.

Ändert man bei konstant gehaltener Temperatur T das Volumen V , so ändert sich der Druck p nach dem Gesetz

$$pV = \text{const} = p_0 V_0 \quad \rightarrow \quad p = \frac{p_0 V_0}{V}.$$

Die graphische Darstellung in einem pV -Diagramm nennt man Isotherme; sie ist eine Hyperbel. Für unterschiedliche Temperaturen T erhält man Hyperbeln mit jeweils einem der Temperatur entsprechenden Parameter.



3

Elementare Funktionen

3.1 Potenzrechnung

Zu den am häufigsten benötigten mathematischen Operationen gehört die wiederholte Produktbildung von Zahlen, Variablen oder mathematischen Ausdrücken a . Für diese Potenzrechnung gelten die folgenden Regeln (n, m : ganze Zahlen):

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}, \quad a^0 := 1.$$

$$a^n a^m = a^{(n+m)}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m},$$

$$\frac{1}{a^m} =: \sqrt[m]{a}, \quad \frac{n}{a^m} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (\sqrt[m]{a})^n.$$

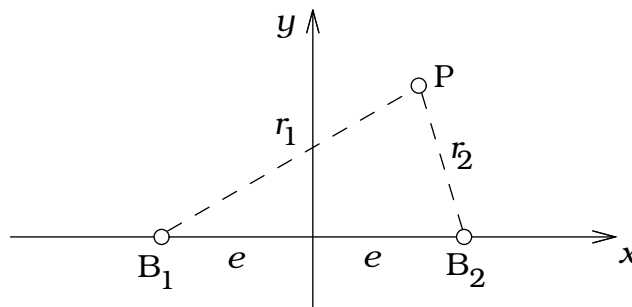
Für die Umformung von mathematischen Ausdrücken ist es sehr hilfreich, wenn man sich insbesondere die folgenden Formeln merkt:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

▼ Beispiel 3.1.1



Aus der geometrischen Definition einer Ellipse: {Die Summe der Abstände r_1 und r_2 eines Ellipsenpunktes $P:(x,y)$ von den Punkten $B_1:(-e,0)$ und $B_2:(e,0)$ ist konstant ($= 2a$)} soll die **Ellipsengleichung** berechnet werden.

Aus der Abbildung ergibt sich die Beziehung

$$\underbrace{\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}_{r_1} + \underbrace{\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}_{r_2} = 2a$$

Durch Quadrieren erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}(x+e)^2 + y^2 &= \{2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\}^2, \\ x^2 + 2ex + e^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2, \\ a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} &= a^2 - ex,\end{aligned}$$

nochmaliges Quadrieren liefert

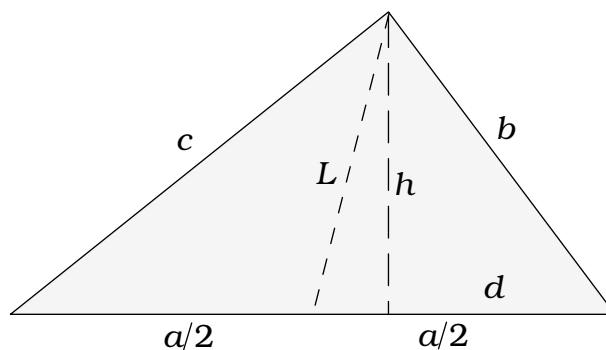
$$\begin{aligned}a^2(x^2 - 2ex + e^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2ex + e^2x^2, \\ (a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - e^2),\end{aligned}$$

und schließlich die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1, \quad b^2 := a^2 - e^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



▼ Beispiel 3.1.2



Die Länge L einer Seitenhalbierenden in einem Dreieck soll berechnet werden.

Der Satz von PYTHAGORAS liefert die Gleichung

$$L^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} - ad + d^2.$$

Aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken mit der gemeinsamen Kathete h folgt

$$\left. \begin{array}{l} h^2 = b^2 - d^2 \\ h^2 = c^2 - (a-d)^2 \end{array} \right\} \rightarrow 2h^2 = b^2 + c^2 - a^2 + 2ad - 2d^2,$$

und wir können die Kathete d eliminieren:

$$2L^2 = 2h^2 + \frac{a^2}{2} - 2ad + 2d^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2},$$

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$



▼ Beispiel 3.1.3

Man berechne die Massendichte von Eisen ($\rho = 7,86$ Gramm / Kubikzentimeter) sowie das spezifische Gewicht $\gamma = \rho g$ in den Einheiten der Kraft (1 Newton = 1 N), der Länge (1 Meter = 1 m) und der Zeit (1 Sekunde = 1 s).

$$\rho = 7,86 \frac{10^{-3} \text{ kg}}{(10^{-2} \text{ m})^3} = 7,86 \cdot 10^3 \frac{\text{ kg}}{\text{ m}^3},$$

$$1 \text{ N} := 1 \text{ kg} \frac{\text{ m}}{\text{ s}^2}, \quad \rightarrow \quad 1 \text{ kg} = 1 \frac{\text{ N s}^2}{\text{ m}}, \quad g = 9,81 \frac{\text{ m}}{\text{ s}^2} \quad (\text{Fallbeschleunigung})$$

$$\rho = 7,86 \cdot 10^3 \frac{\text{ N s}^2}{\text{ m}^4}, \quad \gamma = \rho g = 7,71 \cdot 10^4 \frac{\text{ N}}{\text{ m}^3}.$$



▼ Beispiel 3.1.4

Aus der Gleichung

$$q^2 - 1 = (q + 1)(q - 1)$$

folgt

$$1 + q = \frac{q^2 - 1}{q - 1}.$$

Damit erhalten wir

$$1 + q + q^2 = \frac{q^2 - 1}{q - 1} + q^2 = \frac{q^2 - 1 + q^2(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^3 - 1}{q - 1},$$

$$1 + q + q^2 + q^3 = \frac{q^3 - 1}{q - 1} + q^3 = \frac{q^3 - 1 + q^3(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^4 - 1}{q - 1},$$

und allgemein

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Man nennt den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n q^{i-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

eine **endliche geometrische Reihe**. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^n q^{i-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Wenn $|q| < 1$ ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Deshalb konvergiert die **unendliche geometrische Reihe**

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots$$

für $|q| < 1$ und es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} = \frac{1}{1 - q} \quad \text{wenn } |q| < 1.$$

Es ist also für $q = \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2,$$

und für $q = -\frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots = \frac{1}{1 - (-1/2)} = \frac{2}{3}.$$



▼ Beispiel 3.1.5

Wenn man beim Anlegen einer Geldsumme K_0 in einer Zinsperiode p Prozent Zinsen erhält, hat man nach Ablauf der Periode die Geldsumme

$$S_1 = K_0 + K_0 p = K_0 (1 + p).$$

Nach Ablauf der zweiten Zinsperiode verfügt man über die Geldsumme

$$S_2 = S_1 + S_1 p = S_1 (1 + p) = K_0 (1 + p)^2,$$

und nach Ablauf von n Zinsperioden ist aus der Geldsumme K_0 die Summe

$$S_n = K_0 (1 + p)^n$$

geworden.

Legt man also beispielsweise einmal 100 Euro zum jährlichen Zinssatz von 2% auf ein Sparkonto, so hat man nach 10 Jahren

$$S_{10} = 100 \text{ Euro} \cdot (1 + 0,02)^{10} = 121,9 \text{ Euro}$$

zur Verfügung.

Wenn man jedes Jahr eine Geldrate R_0 zum jährlichen Zinssatz von p Prozent auf ein Sparkonto zahlt, so hat man nach einem Jahr den Kontostand

$$K_1 = R_0 + R_0 p = R_0 (1 + p),$$

nach dem zweiten Jahr den Kontostand

$$K_2 = K_1 + K_1 p + R_0 + R_0 p = K_1 (1 + p) + R_0 (1 + p) = R_0 (1 + p)^2 + R_0 (1 + p).$$

und nach n Jahren

$$K_n = R_0 \{(1 + p) + (1 + p)^2 + \dots + (1 + p)^n\}.$$

Mit

$$q = 1 + p$$

wird

$$K_n = R_0 \sum_{i=1}^n q^i = R_0 q \sum_{i=1}^n q^{i-1} = R_0 q \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Zahlt man 10 Jahre lang jeweils 10 Euro zum jährlichen Zinssatz von 2% auf das Sparkonto, so hat man nach Ablauf der 10 Jahre den Kontostand

$$K_{10} = 10 \text{ Euro} \cdot 1,02 \cdot \frac{(1,02)^{10} - 1}{0,02} = 111,69 \text{ Euro}.$$



▼ Beispiel 3.1.6

Um die Größenverhältnisse zwischen Sonne und Planeten zu veranschaulichen, soll die Sonne als Kreisscheibe mit dem Durchmesser von einem Meter dargestellt werden. Dann lautet die Aufgabe: Wenn der Durchmesser der Sonne auf 1 Meter abgebildet werden soll, wie groß ist dann der Modelldurchmesser eines Planeten?

$$\frac{\varnothing \text{ Sonne}}{1 \text{ Meter im Modell}} = \frac{\varnothing \text{ Planet}}{x \text{ Meter im Modell}}$$

$$x \text{ Meter im Modell} = \frac{\varnothing \text{ Planet} \cdot 1 \text{ Meter im Modell}}{\varnothing \text{ Sonne}}$$

Mit dem Maßstabsfaktor

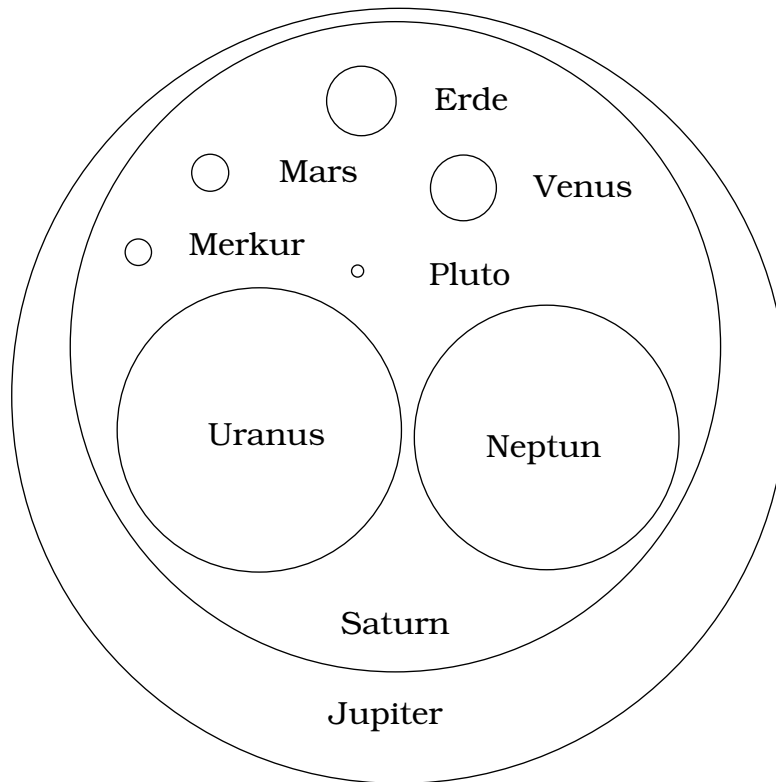
$$\lambda = \frac{1 \text{ Meter im Modell}}{\varnothing \text{ Sonne in km}}$$

sollen auch die Abstände der Planeten von der Sonne berechnet werden:

$$\text{Modellabstand in Meter} = \lambda \cdot \text{Realabstand in km}$$

	Abstand	\varnothing	Modellabst.	Modell \varnothing
Sonne	–	$1,393 \cdot 10^6 \text{ km}$	–	1 m
Merkur	$5,790 \cdot 10^7 \text{ km}$	$4,878 \cdot 10^3 \text{ km}$	$4,157 \cdot 10^1 \text{ m}$	$3,503 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Venus	$1,028 \cdot 10^8 \text{ km}$	$1,210 \cdot 10^4 \text{ km}$	$7,769 \cdot 10^1 \text{ m}$	$8,691 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Erde	$1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$	$1,276 \cdot 10^4 \text{ km}$	$1,074 \cdot 10^2 \text{ m}$	$9,159 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Mars	$2,279 \cdot 10^8 \text{ km}$	$6,794 \cdot 10^3 \text{ km}$	$1,636 \cdot 10^2 \text{ m}$	$4,879 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Jupiter	$7,790 \cdot 10^8 \text{ km}$	$1,428 \cdot 10^5 \text{ km}$	$5,593 \cdot 10^2 \text{ m}$	$1,025 \cdot 10^{-1} \text{ m}$
Saturn	$1,432 \cdot 10^9 \text{ km}$	$1,200 \cdot 10^5 \text{ km}$	$1,028 \cdot 10^3 \text{ m}$	$8,616 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Uranus	$2,884 \cdot 10^9 \text{ km}$	$5,240 \cdot 10^4 \text{ km}$	$2,071 \cdot 10^3 \text{ m}$	$3,762 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Neptun	$4,509 \cdot 10^9 \text{ km}$	$4,860 \cdot 10^4 \text{ km}$	$3,238 \cdot 10^3 \text{ m}$	$3,490 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Pluto	$5,966 \cdot 10^9 \text{ km}$	$2,284 \cdot 10^3 \text{ km}$	$4,284 \cdot 10^3 \text{ m}$	$1,640 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

In der folgenden Abbildung sind alle Planeten im gleichen Maßstab als Kreise dargestellt, wobei die Verkleinerung der ursprünglichen DIN A4-Seite auf die Abmessungen der Druckseite eine Abweichung von den in der Tabelle angegebenen Durchmesserzahlen zur Folge hat.



▼ Beispiel 3.1.7

Die binomischen Ausdrücke $(a + b)^n$ mit ganzzahligen Exponenten

$$(a + b)^1 = a^1 b^0 + a^0 b^1,$$

$$(a + b)^2 = a^2 b^0 + 2a^1 b^1 + a^0 b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 b^0 + 3a^2 b^1 + 3a^1 b^2 + a^0 b^3,$$

$$(a + b)^4 = a^4 b^0 + 4a^3 b^1 + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + a^0 b^4,$$

...

lassen sich in Kurzform schreiben

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n F_{nk} a^{n-k} b^k.$$

Die Faktoren F_{nk} in dieser Summe sind dem **PASCALSchen Dreieck** zu entnehmen

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & & & & & & & \text{u.s.w.}
 \end{array}$$

Mit der Produktbildung von natürlichen Zahlen

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! := 1.$$

n -Fakultät genannt, definieren wir mit den natürlichen Zahlen n und k den **Binomialkoeffizient „ n über k “** :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Damit können die Faktoren F_{nk} nach der Formel

$$F_{nk} = \frac{n!}{k!(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

berechnet werden:

$$F_{10} = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!1!} = 1, \quad F_{11} = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!0!} = 1,$$

$$F_{20} = \binom{2}{0} = \frac{2!}{0!2!} = 1, \quad F_{21} = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!1!} = 2, \quad F_{22} = \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!0!} = 1,$$

$$F_{30} = \binom{3}{0} = \frac{3!}{0!3!} = 1, \quad F_{31} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = 3, \quad F_{32} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!1!} = 3, \quad F_{33} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1,$$



3.2 Polynome

Die Funktion

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

ist ein **Polynom n -ten Grades**. Die x -Werte, für die $P(x) = 0$ wird, nennt man **Nullstellen** des Polynoms. Es existieren immer n Nullstellen. Auch wenn die Koeffizienten a_k des Polynoms reelle Zahlen sind, können die Nullstellen reell oder komplex sein; komplexe Nullstellen treten jedoch immer paarweise konjugiert komplex auf. Mitunter müssen Nullstellen mehrfach gezählt werden.

Bezeichnen wir die Nullstellen des Polynoms mit x_1, x_2, \dots, x_n , so gilt, wenn $a_n = 1$ ist,

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n).$$

▼ Beispiel 3.2.1

Die Nullstellen des Polynoms 2. Grades

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

genügen der **quadratischen Gleichung**

$$x^2 + px + q = 0, \quad p := \frac{a_1}{a_2}, \quad q := \frac{a_0}{a_2},$$

die in die Form

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

gebracht werden kann, aus der sich die beiden Nullstellen unmittelbar ergeben:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Drei Fälle kann man unterscheiden: Wenn $q < \frac{p^2}{4}$ ist, sind die beiden Nullstellen reell; für $q = \frac{p^2}{4}$ erhalten wir die doppelt zu zählende Nullstelle

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

und für $q > \frac{p^2}{4}$ sind die beiden Nullstellen konjugiert komplex ($i := \sqrt{-1}$):

$$x_1 = -\frac{p}{2} + i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = \bar{x}_1.$$

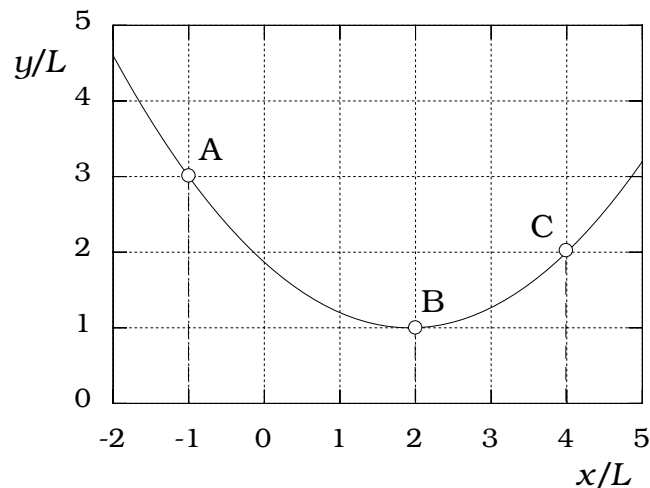


▼ Beispiel 3.2.2

Durch drei Punkte A: (x_A, y_A) , B: (x_B, y_B) und C: (x_C, y_C) mit unterschiedlichen x -Koordinaten ist eine Parabel 2. Grades

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

definiert. Man berechne die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 .



Aus der ersten Gleichung des Gleichungssystems

$$a_0 + a_1 x_A + a_2 x_A^2 = y_A,$$

$$a_0 + a_1 x_B + a_2 x_B^2 = y_B,$$

$$a_0 + a_1 x_C + a_2 x_C^2 = y_C,$$

erhalten wir zunächst

$$a_0 = y_A - a_1 x_A - a_2 x_A^2$$

und durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten und der dritten:

$$\begin{aligned} a_1(x_B - x_A) + a_2(x_B^2 - x_A^2) &= y_B - y_A, & a_1 + a_2(x_B + x_A) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, \\ a_1(x_C - x_A) + a_2(x_C^2 - x_A^2) &= y_C - y_A, & a_1 + a_2(x_C + x_A) &= \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}. \end{aligned} \quad \rightarrow$$

Aus der neuen ersten Gleichung folgt

$$a_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} - a_2(x_B + x_A)$$

und wiederum nach Subtraktion der beiden Gleichungen

$$a_2 = \frac{1}{x_C - x_B} \left(\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right).$$

Mit den gegebenen Koordinaten der Punkte A, B und C kann man zuerst a_2 , dann a_1 und schließlich a_0 berechnen.

Ist insbesondere $A:(-L, 3L)$, $B:(2L, L)$, $C:(4L, 2L)$, so wird

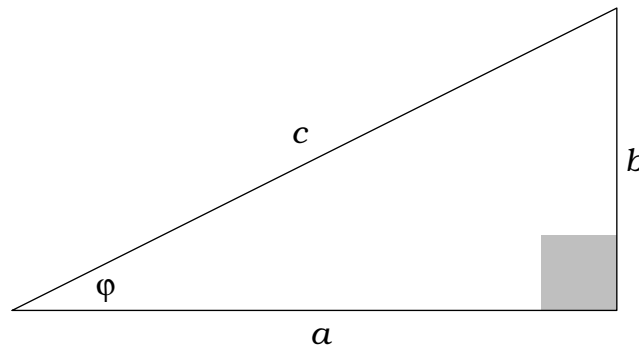
$$a_2 = \frac{1}{2L} \left(\frac{-1}{5} - \frac{-2}{3} \right) = \frac{7}{30L}, \quad a_1 = \frac{-2}{3} - \frac{7}{30} = -\frac{9}{10}, \quad a_0 = 3L - \frac{9}{10}L - \frac{7}{30}L = \frac{28}{15}L,$$

$$y(x) = L \left(\frac{28}{15} - \frac{9}{10} \frac{x}{L} + \frac{7}{30} \frac{x^2}{L^2} \right).$$



3.3 Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen)

Zu den besonders wichtigen Funktionen für die Anwendung der Mathematik in den Natur- und Technikwissenschaften gehören die **trigonometrischen Funktionen** oder **Winkelfunktionen**, die zunächst in einem rechtwinkligen Dreieck als Seitenverhältnisse definiert werden können:



$$\sin \varphi := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}, \quad \cos \varphi := \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c},$$

$$\tan \varphi := \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{b}{a} = \frac{c \sin \varphi}{c \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Von geringerer Bedeutung für die Anwendungen ist die Winkelfunktion

$$\cotan \varphi := \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi}.$$

Aus dem Satz von PYTHAGORAS für das rechtwinklige Dreieck

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

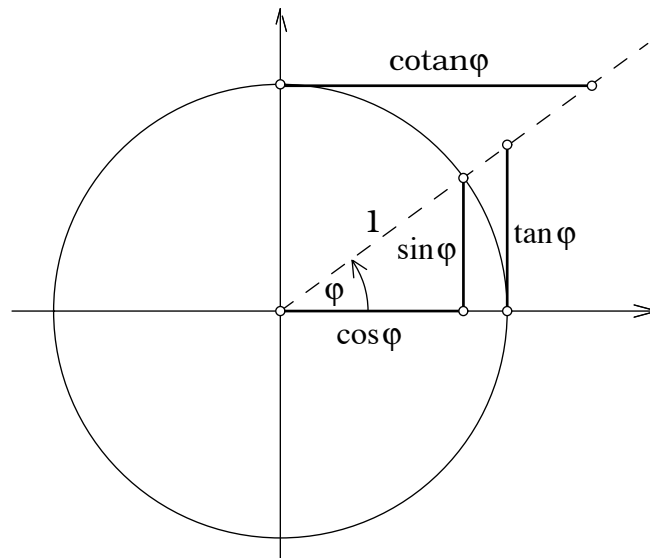
folgt die besonders wichtige Beziehung zwischen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$:

$$(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1.$$

Man schreibt in der Regel

$$(\cos \varphi)^2 =: \cos^2 \varphi, \quad (\sin \varphi)^2 =: \sin^2 \varphi.$$

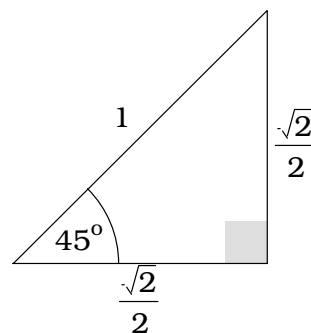
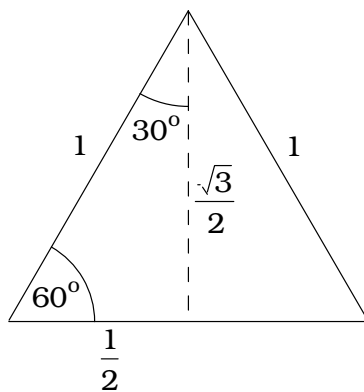
Die Werte der trigonometrischen Funktionen für einen bestimmten Winkel φ können im **Einheitskreis**, weil dann $c=1$ ist, anschaulich als Strecken dargestellt werden:



Es gilt

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi, \quad \tan(-\varphi) = -\tan \varphi,$$

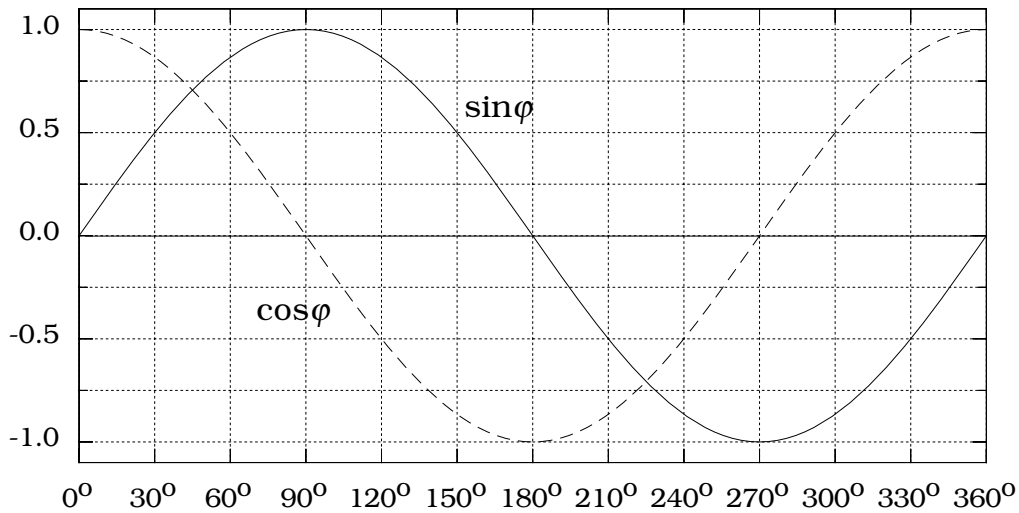
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos \varphi, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = -\sin \varphi.$$



Empfehlenswert ist es, sich die Werte der Sinus- und der Cosinusfunktion für spezielle Winkel zu merken. Aus den Winkelgrößen im gleichseitigen und im gleichschenkelig- rechtwinkligen Dreieck ergeben sich die folgenden Werte:

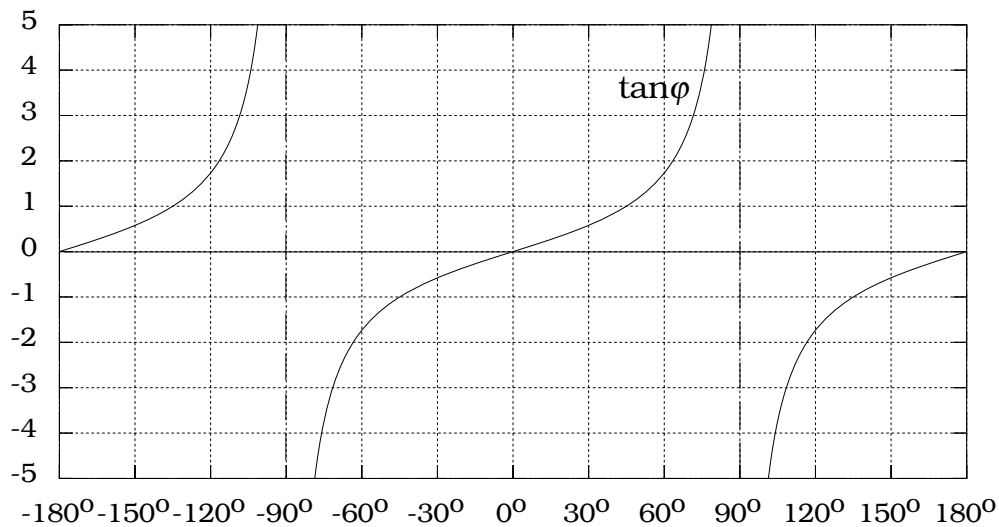
φ	0° 0	30° $\pi/6$	45° $\pi/4$	60° $\pi/3$	90° $\pi/2$
$\sin \varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$
$\cos \varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$

Graphen der Winkelfunktionen $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ und $\tan \varphi$:



$$\sin(\varphi + 360^\circ) = \sin(\varphi + 2\pi) = \sin \varphi$$

$$\cos(\varphi + 360^\circ) = \cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi$$



$$\tan(\varphi + 180^\circ) = \tan(\varphi + \pi) = \tan \varphi$$

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind die **arcus-Funktionen**:

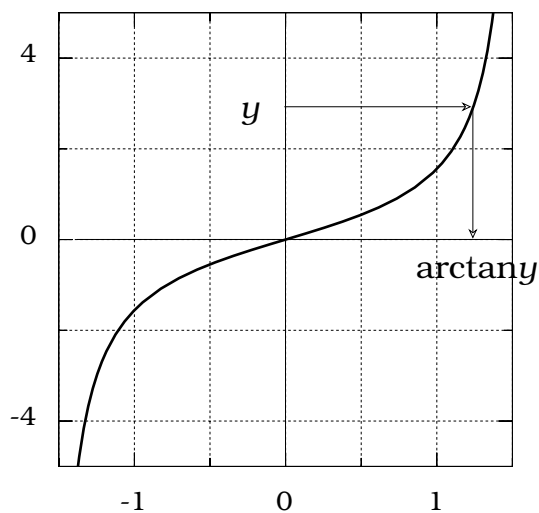
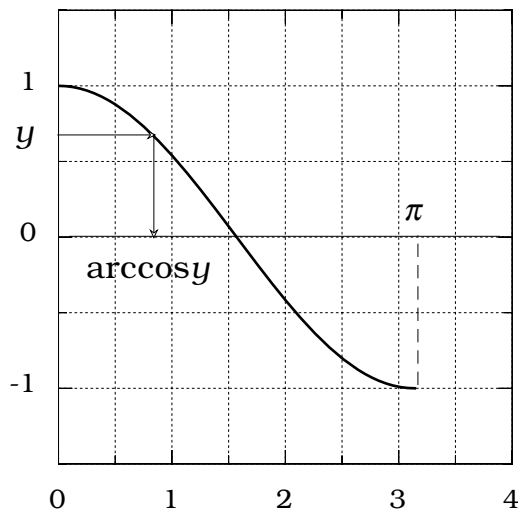
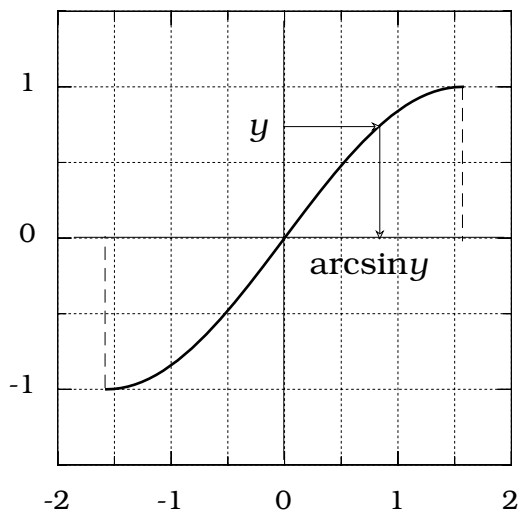
$$y = \sin \varphi \leftrightarrow \varphi = \arcsin y \quad (-1 \leq y \leq 1), \quad (-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$$

$$y = \cos \varphi \leftrightarrow \varphi = \arccos y \quad (-1 \leq y \leq 1), \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$y = \tan \varphi \leftrightarrow \varphi = \arctan y \quad (-\infty \leq y \leq \infty), \quad (-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$$

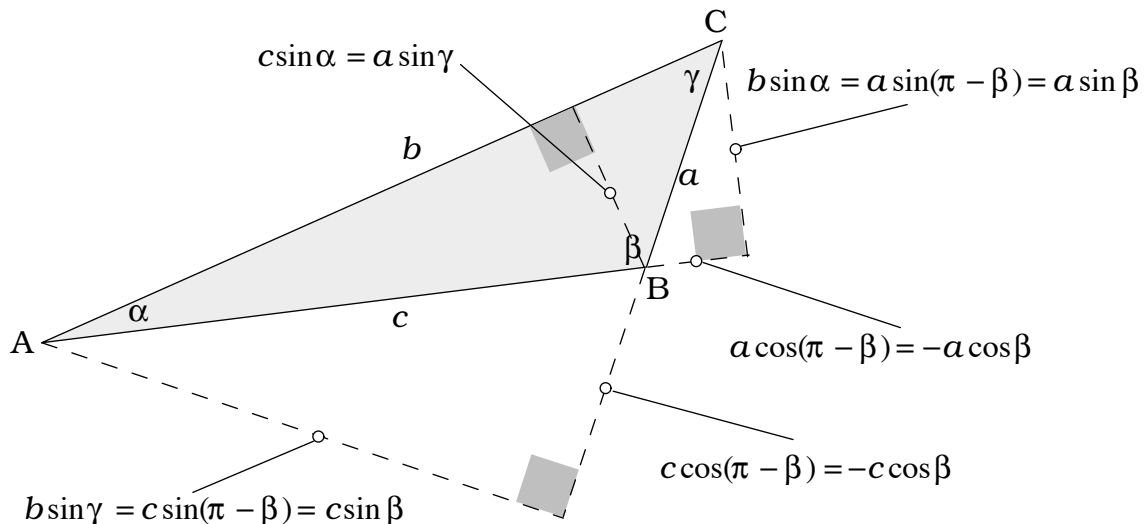
Insbesondere sind dabei die y -Definitionsbereiche der arcus-Funktionen zu beachten.

Die Bestimmung von Funktionswerten der arcus-Funktionen ist in den folgenden Bildern dargestellt:



▼ Beispiel 3.3.1

Für die Formulierung von geometrischen Beziehungen bei der mathematischen Modellbildung eines technischen Systems können Seiten-Winkel-Beziehungen an einem Dreieck sehr hilfreich sein. In der folgenden Abbildung sind an einem beliebigen Dreieck Ergänzungen zu rechtwinkligen Dreiecken eingetragen und die Seitenlängen mit Hilfe von Dreiecksparametern dargestellt.



Aus der Abbildung können wir die Gleichungen ablesen, die den Inhalt des **Sinus-Satzes** wiedergeben:

$$c \sin \alpha = a \sin \gamma,$$

$$a \sin \beta = b \sin \alpha, \quad \rightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

$$b \sin \gamma = c \sin \beta;$$

Entsprechend ergeben sich die Gleichungen des **Cosinus-Satzes**:

$$a^2 = (b \sin \alpha)^2 + (b \cos \alpha - c)^2 \quad \rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = (c \sin \beta)^2 + (a - c \cos \beta)^2 \quad \rightarrow \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta,$$

$$c^2 = (b \sin \gamma)^2 + (b \cos \gamma - a)^2 \quad \rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Weiterhin gilt

$$a \cos \gamma + c \cos \alpha = b,$$

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = c,$$

$$c \cos \beta + b \cos \gamma = a.$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks erhalten wir die Formel:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta.$$



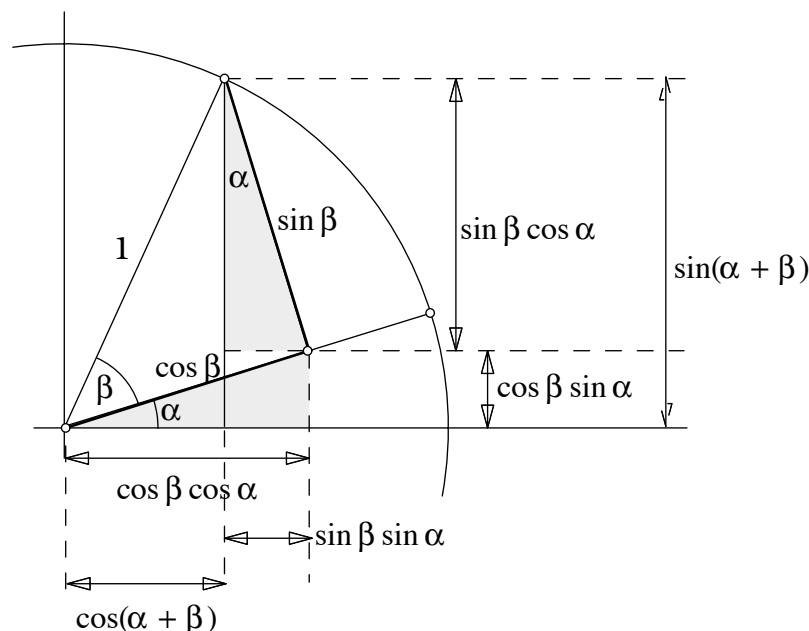
▼ Beispiel 3.3.2

Wenn wir im Einheitskreis Radien unter den Winkeln α und $(\alpha + \beta)$ eintragen, erhalten wir die Möglichkeit der graphischen Darstellung von Winkelfunktionen mit den Argumenten β und $(\alpha + \beta)$, aus denen sich die folgenden Beziehungen ablesen lassen:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta,\end{aligned}$$

und wenn wir in diesen Formeln den Winkel β durch $(-\beta)$ ersetzen,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta, \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.\end{aligned}$$



Man nennt diese Formeln **Additionstheoreme**. Sie sind bei der Rechnung mit trigonometrischen Funktionen sehr nützlich, wenn man komplizierte Ausdrücke vereinfachen will.

Wenn wir $\beta = \alpha$ setzen, erhalten wir

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha, \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

und aus der Definition der Tangensfunktion folgt das Additionstheorem

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}.$$

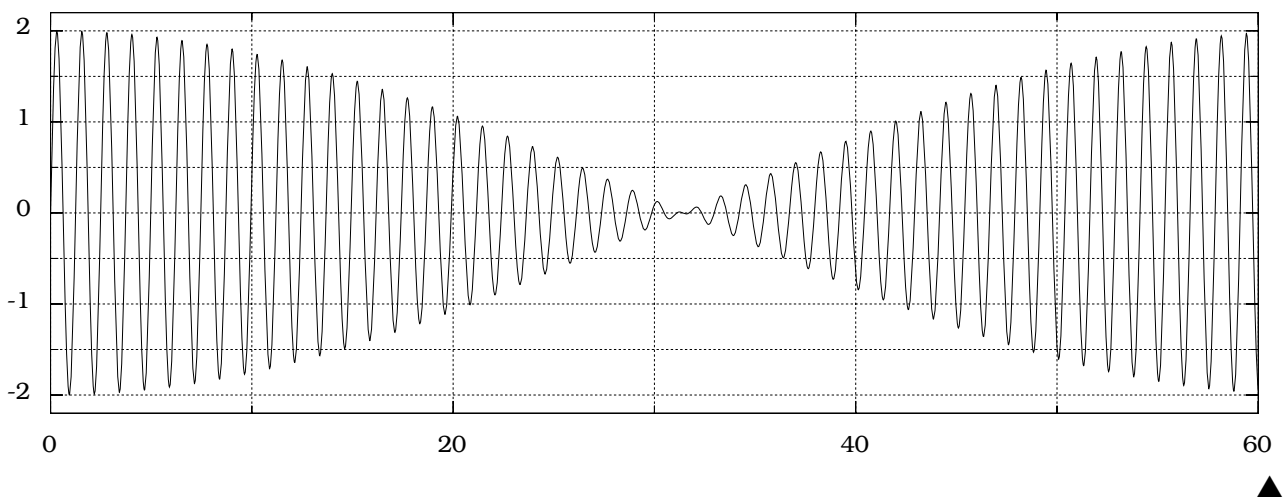
Weitere Beziehungen findet man in Formelsammlungen in den Abschnitten über trigonometrische Funktionen, darunter beispielsweise die Darstellungen

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Diese Formeln sind besonders hilfreich bei der Darstellung der Überlagerung von Sinusfunktionen mit geringen Unterschieden in den Argumenten, also beispielsweise bei der Funktion

$$y(x) = \sin(5x) + \sin(5,1x) = 2 \sin(5,05x) \cos(0,05x),$$

die eine „Schwebung“ beschreibt und in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



▼ Beispiel 3.3.3

Das Ergebnis der Addition einer Sinus- und einer Cosinusfunktion mit gleichem Argument φ kann durch eine entsprechende Sinusfunktion mit dem Argument $(\varphi + \alpha)$ ausgedrückt werden:

$$C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi = A \sin(\varphi + \alpha).$$

Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion

$$\sin(\varphi + \alpha) = \sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha$$

wird

$$C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi = A \{ \sin \varphi \cos \alpha + \cos \varphi \sin \alpha \}$$

und ein Vergleich der Faktoren von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt

$$A \cos \alpha = C_1, \quad A \sin \alpha = C_2,$$

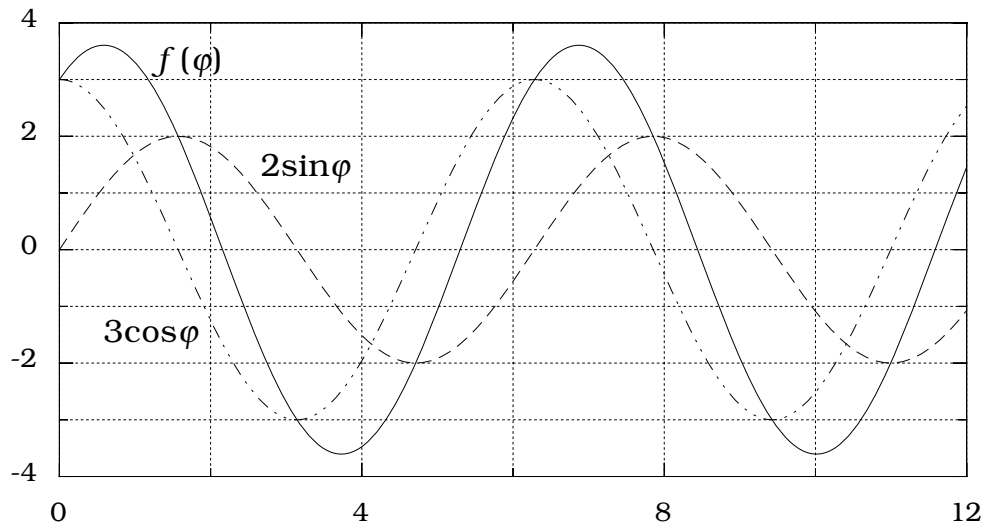
also

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \alpha = \arctan(C_2/C_1).$$

Von den beiden äquivalenten Darstellungen der Funktion

$$f(\varphi) = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi = A \sin(\varphi + \alpha)$$

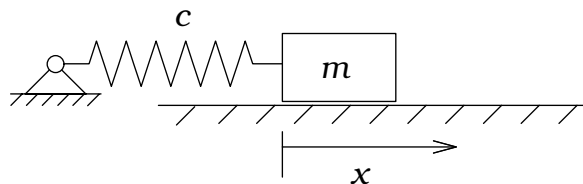
ist die erste rechenstechnisch vorteilhaft und die zweite darstellungstechnisch: Die Funktion $f(\varphi)$ ist eine Sinusfunktion mit der Amplitude A und bei $\varphi = -\alpha$ hat sie einen Nullpunkt.



$$f(\varphi) = 2 \sin \varphi + 3 \cos \varphi = \sqrt{13} \sin(\varphi + \arctan(3/2))$$



▼ Beispiel 3.3.4



Auf eine Masse m , die mit einer Feder der Steifigkeit c verbunden ist, wirkt bei einer Federauslenkung x die Rückstellkraft $-cx$. Die Bewegung der Masse an der Feder ist eine **harmonische Schwingungsbewegung**; die Auslenkung x als Funktion der Zeit t wird dann beschrieben durch

$$x(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right),$$

wobei T die **Schwingungsdauer**, A die Amplitude und α die Phasenverschiebung ist.

Häufig führt man die **Kreisfrequenz**

$$\omega := \frac{2\pi}{T}$$

ein und schreibt dann

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha).$$

A und α sind durch die Startbedingungen der Masse bestimmt.

Es gilt

$$\omega = \sqrt{c/m}.$$



▼ Beispiel 3.3.5

Die Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen gleicher Frequenz ergibt wieder eine harmonische Schwingung mit dieser Frequenz:

$$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Die Amplitude A und den Phasenwinkel φ können mit Hilfe der Additionstheoreme berechnet werden.

$$\begin{aligned} A_1 \{ \sin(\omega t) \cos \varphi_1 + \cos(\omega t) \sin \varphi_1 \} + A_2 \{ \sin(\omega t) \cos \varphi_2 + \cos(\omega t) \sin \varphi_2 \} = \\ = A \{ \sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi \}, \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Faktoren von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ auf beiden Seiten der Gleichung liefert die Beziehungen

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \varphi,$$

$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \varphi.$$

Aus der Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen folgt dann zunächst

$$A^2 = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2,$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

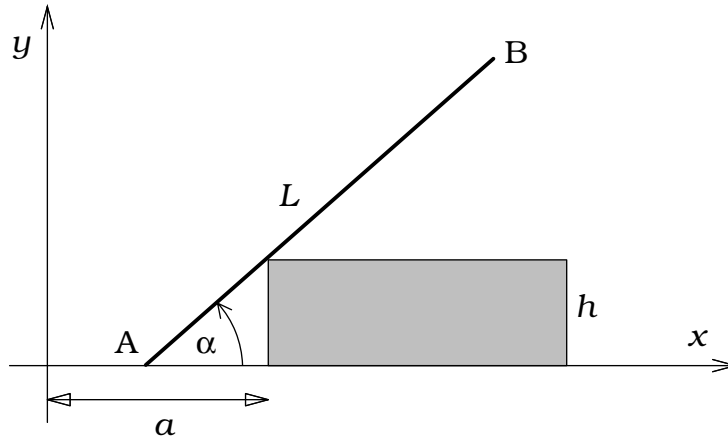
und aus dem Quotienten:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}\right).$$



▼ Beispiel 3.3.6

Eine Stange der Länge L wird über eine Stufe der Höhe h geschoben. Der Neigungswinkel α und die Koordinaten des Endpunktes B als Funktionen der Koordinate x_A des Stangenpunktes A lassen sich dann wie folgt berechnen:



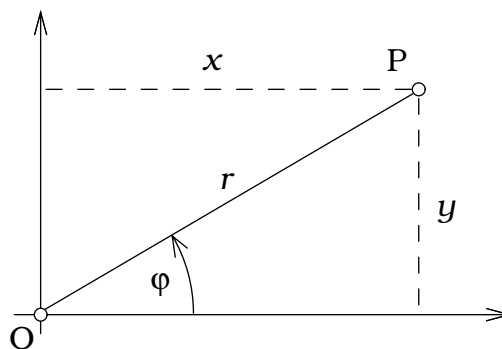
$$\tan \alpha = \frac{h}{a - x_A}, \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{h}{a - x_A}.$$

$$x_B = x_A + L \cos\left(\arctan \frac{h}{a - x_A}\right), \quad y_B = L \sin\left(\arctan \frac{h}{a - x_A}\right).$$



▼ Beispiel 3.3.7

Für die Beschreibung der Lage von Punkten in einer Ebene kann es vorteilhaft sein, statt der kartesischen Koordinaten x und y die Polarkoordinaten r und φ der Punkte zu verwenden. Für den Punkt P mit den kartesischen Koordinaten x und y gilt dann



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$

So lautet die Gleichung eines Kreises mit dem Radius R um den Koordinatenursprung O in kartesischen Koordinaten

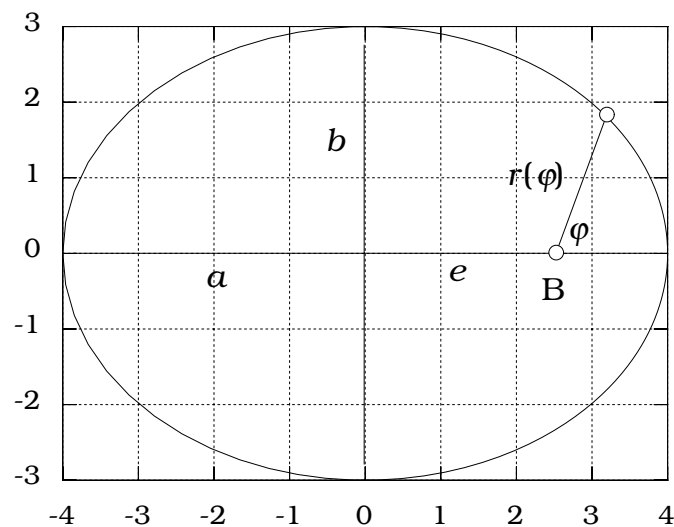
$$x^2 + y^2 = R^2$$

und in Polarkoordinaten viel einfacher

$$r = R.$$



▼ Beispiel 3.3.8



Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b um den Koordinatenursprung O , die in kartesischen Koordinaten durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \rightarrow \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

$$e^2 = a^2 - b^2,$$

beschrieben wird, kann auch in Polarkoordinaten dargestellt werden, wobei ein Brennpunkt B als Ursprung des Polarkoordinatensystems verwendet wird. Dann gelten die Transformationsformeln

$$x = e + r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi,$$

wobei die Funktion $r(\varphi)$ noch zu bestimmen ist.

Wir setzen die Transformationsformeln in die Ellipsengleichung ein

$$b^2(e + r \cos \varphi)^2 + a^2 r^2 \sin^2 \varphi = a^2 b^2,$$

und erhalten nach elementaren Umformungen eine quadratische Gleichung für r :

$$b^2(e^2 + r^2 \cos^2 \varphi + 2er \cos \varphi) + a^2 r^2 (1 - \cos^2 \varphi) = (e^2 + b^2)b^2,$$

$$r^2(a^2 - e^2 \cos^2 \varphi) + 2reb^2 \cos \varphi = b^4,$$

$$r^2 + 2r \frac{eb^2 \cos \varphi}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi} = \frac{b^4}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

$$\left(r + \frac{eb^2 \cos \varphi}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi}\right)^2 = \frac{b^4(a^2 - e^2 \cos^2 \varphi) + e^2 b^4 \cos^2 \varphi}{(a^2 - e^2 \cos^2 \varphi)^2},$$

$$\left(r + \frac{eb^2 \cos \varphi}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi}\right)^2 = \frac{b^4 a^2}{(a^2 - e^2 \cos^2 \varphi)^2}.$$

Weil $r > 0$ sein muss, erhalten wir mit dem positiven Vorzeichen der Wurzel

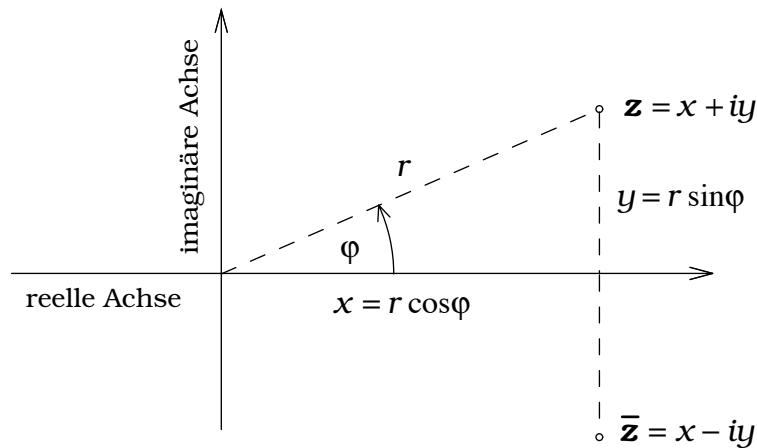
$$r = \frac{b^2(a - e \cos \varphi)}{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

also schließlich das Ergebnis

$$r(\varphi) = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi}.$$



▼ Beispiel 3.3.9

In der **Gaußschen Zahlenebene**

können die aus einem Real- und einem Imaginärteil bestehenden komplexen Zahlen

$$\mathbf{z} = x + iy$$

als Punkte dargestellt werden. Dabei ist es üblich, für den Realteil x die horizontale und für den Imaginärteil y die vertikale kartesische Achse mit jeweils gleichem Maßstab zu verwenden.

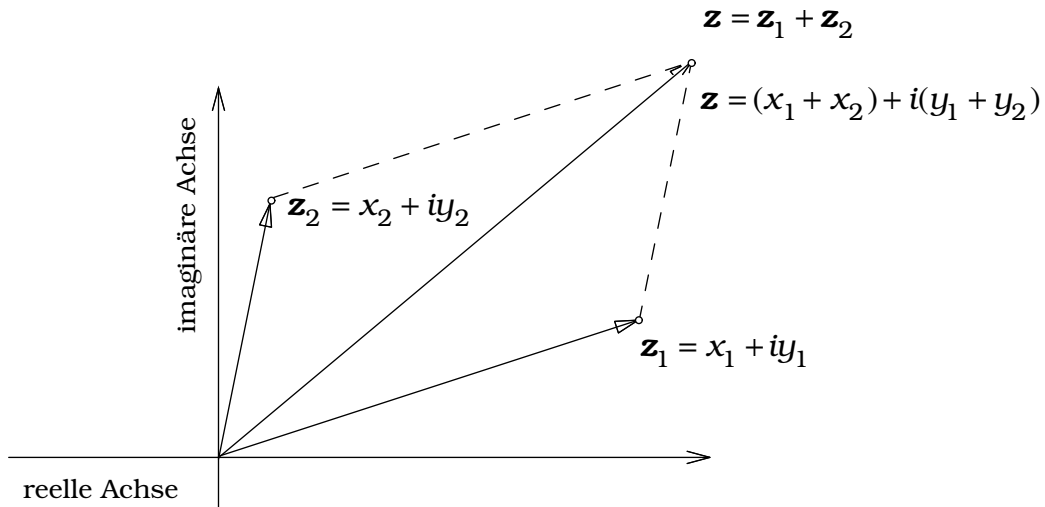
Außerdem lässt sich die Lage der Zahlenpunkte mit Hilfe der **Polarkoordinaten** r und φ beschreiben, wobei

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi := \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist:

$$\mathbf{z} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \bar{\mathbf{z}} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Aus der Polarkoordinatendarstellung ergibt sich die Pfeildarstellung,

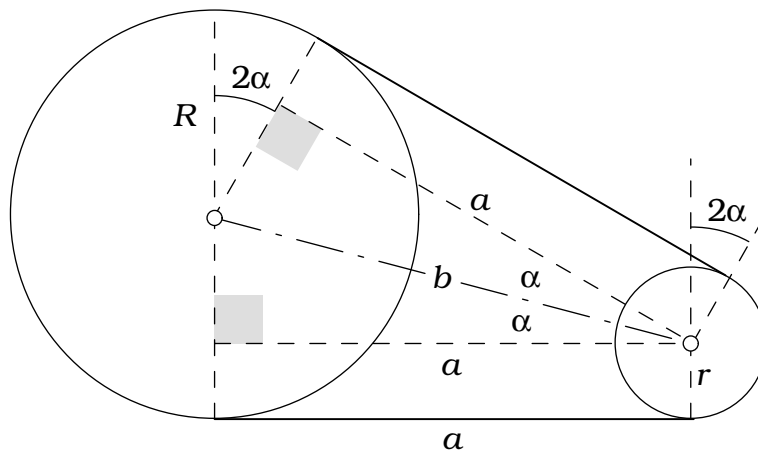


bei der der komplexen Zahl \mathbf{z} vom Nullpunkt aus ein Pfeil der Länge r zugeordnet wird, der mit der reellen Achse den Winkel φ bildet. Die Addition von komplexen Zahlen lässt sich dann graphisch als Pfeiladdition darstellen.



▼ Beispiel 3.3.10

Wenn man um zwei Kreisscheiben mit den Radien R und r , deren vertikale Durchmesser den Abstand a haben, einen straff gespannten Riemen legen will, ist der erforderliche Riemenumfang U folgendermaßen zu berechnen:



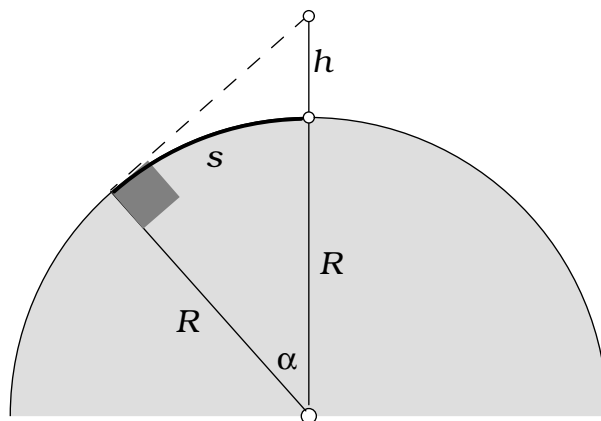
$$\tan \alpha = \frac{R-r}{a}, \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan \frac{R-r}{a}.$$

$$U = 2a + R(\pi + 2\alpha) + r(\pi - 2\alpha) = 2a + (R+r)\pi + 2(R-r) \arctan \frac{R-r}{a}.$$



▼ Beispiel 3.3.11

Von einem Turm der Höhe h kann man bei ungetrübter Aussicht bis zu einer Entfernung s auf der Erdoberfläche sehen.



Wird die Erde als ideale Kugel mit dem Radius $R = 6370$ km angenommen, so erhalten wir die folgenden Werte für s .

$$(R+h)\cos\alpha = R, \quad \rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{1}{1+h/R}; \quad s = R\alpha.$$

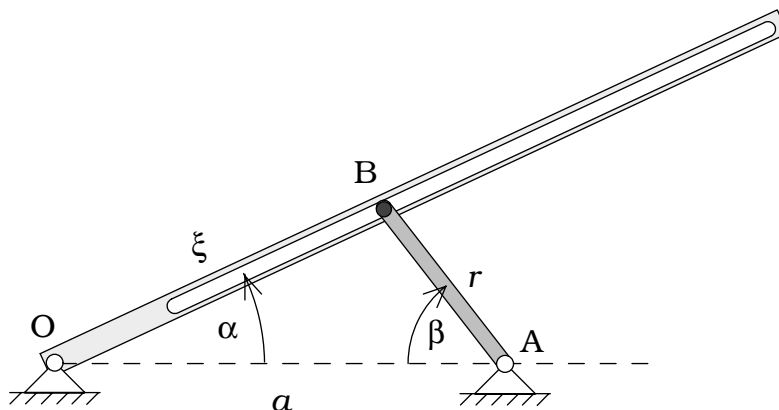
$$h = 10\text{m} \quad s = 11\text{km}$$

$$h = 100\text{m} \quad s = 36\text{km}$$



▼ Beispiel 3.3.12

Die in O drehbar gelagerte Stange ist mit einem Führungsschlitz versehen, in dem der Endpunkt B der in A gelagerten Kurbel AB gleiten kann. Der Drehwinkel α lässt sich als Funktion des Kurbelwinkels β darstellen.



Mit dem Lot vom Punkt B auf die horizontale Verbindungsstrecke \overline{OA} erzeugt man zwei rechtwinklige Dreiecke, aus denen sich die dauernd gültigen kinematischen Zwangsbedingungen ablesen lassen:

$$\xi \sin \alpha = r \sin \beta,$$

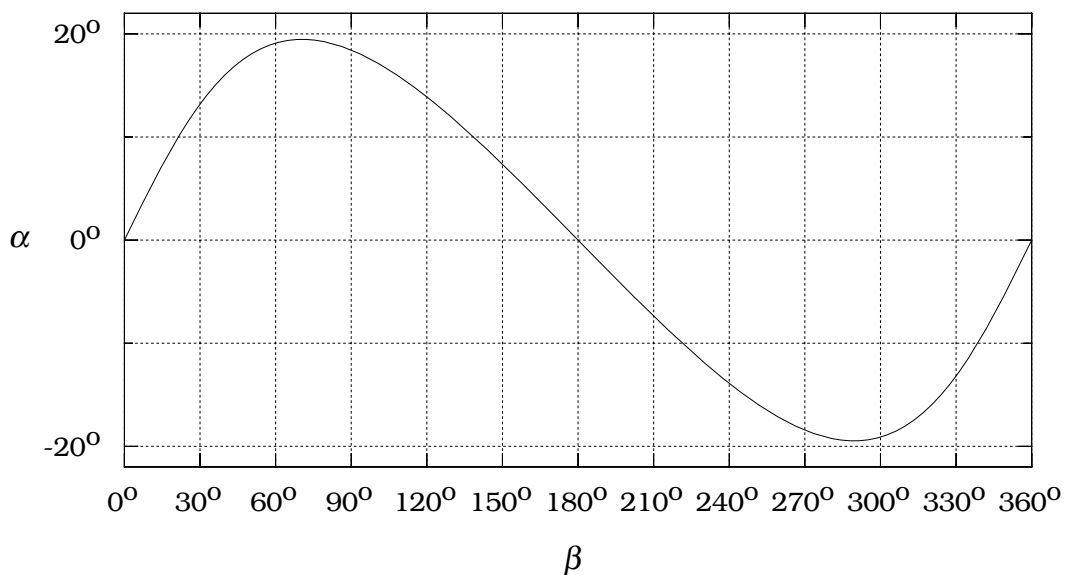
$$\xi \cos \alpha + r \cos \beta = a, \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{a - r \cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Nach Elimination der Koordinate ξ erhält man:

$$r \sin \beta = (a - r \cos \beta) \tan \alpha,$$

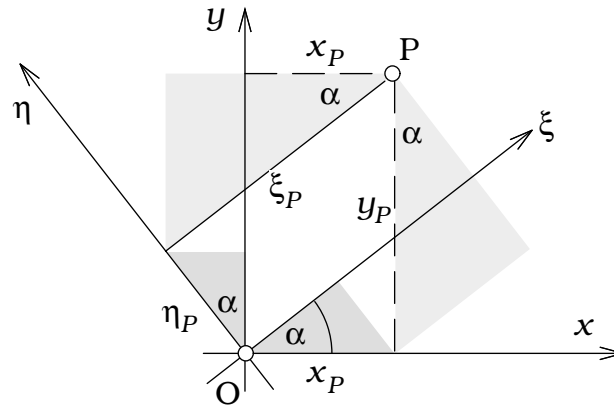
$$\alpha = \arctan\left(\frac{r \sin \beta}{a - r \cos \beta}\right).$$

Für die folgende graphische Darstellung des Ergebnisses wurde $a = 3r$ gewählt:



▼ Beispiel 3.3.13

Die Koordinaten eines Punktes P in zwei zueinander um den Winkel α gedrehten Koordinatensystemen sind unterschiedlich.



Aus den linken Dreiecksflächen, bei denen ξ_P und η_P Hypotenusen sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}x_P &= \xi_P \cos \alpha - \eta_P \sin \alpha, \\y_P &= \xi_P \sin \alpha + \eta_P \cos \alpha,\end{aligned}$$

und aus den rechten Dreiecksflächen mit x_P und y_P als Hypotenusen folgt

$$\begin{aligned}\xi_P &= x_P \cos \alpha + y_P \sin \alpha, \\\eta_P &= -x_P \sin \alpha + y_P \cos \alpha.\end{aligned}$$

Das zweite Paar von Transformationsgleichungen kann man auch erhalten, wenn man das erste Paar nach ξ_P und η_P auflöst. ▲

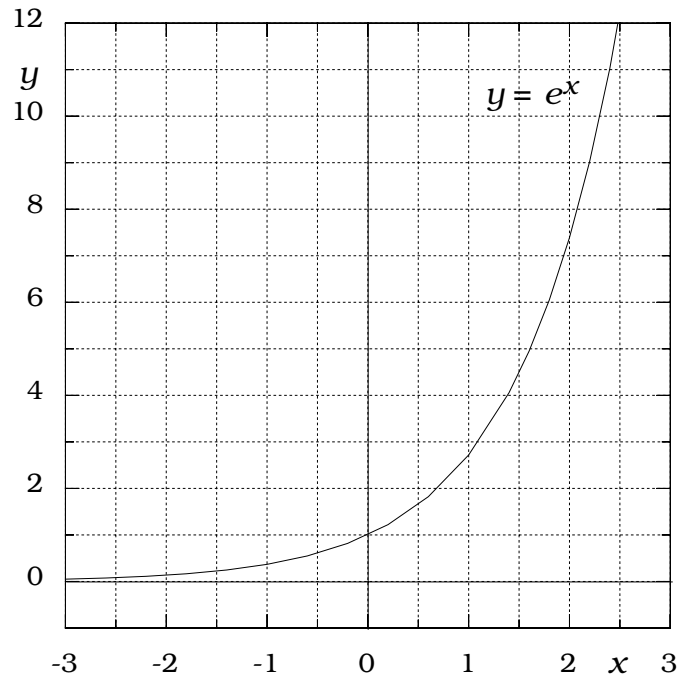
3.4 Exponentialfunktionen

Zu den interessantesten mathematischen Funktionen gehört die **e-Funktion** (**natürliche Exponentialfunktion**), die folgendermaßen definiert ist (x : reelle Zahl):

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$e = e^1 = \exp(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,71828182846\dots$$

Der Graph der e-Funktion



zeigt den schnellen Anstieg der Funktionswerte für positive Exponenten und die rasche Abnahme der Funktionswerte für negative Exponenten.

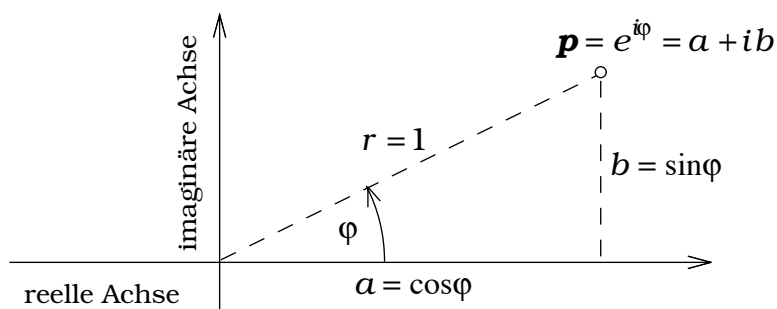
Wenn der Definitionsbereich der e- Funktion auf komplexe Zahlen erweitert wird, erhalten wir insbesondere für die rein-imaginäre Zahl $i\varphi$ im Exponenten:

$$\mathbf{p} = e^{i\varphi}, \quad \bar{\mathbf{p}} = e^{-i\varphi}, \quad \rightarrow \quad |\mathbf{p}|^2 = \mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = e^{i(\varphi-\varphi)} = e^0 = 1.$$

$$e^{i\varphi} = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \dots$$

$$e^{i\varphi} = \underbrace{\left\{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \pm \dots\right\}}_a + i \underbrace{\left\{\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \dots\right\}}_b$$

Die komplexe Zahl $\mathbf{p} = e^{i\varphi}$ liegt auf dem Einheitskreis.



Die Abbildung erklärt die außerordentlich nützliche **EULERSche Formel**

$$e^{i\varphi} = \exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Mit dieser Darstellung der komplexwertigen e- Funktion erhalten wir die **Reihen-**
darstellungen der Sinus- und der Cosinusfunktion:

$$\begin{aligned}\sin\varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} \pm \dots \\ \cos\varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} \pm \dots\end{aligned}$$

aus denen sich recht gute Näherungswerte der Sinus- und Cosinusfunktion für Winkel φ ergeben, deren Beträge im Bogenmaß(!) im Vergleich mit 1 sehr klein sind:

$$|\varphi| \ll 1 \quad \rightarrow \quad \sin\varphi \approx \varphi, \quad \cos\varphi \approx 1.$$

Beispielsweise wird

$$\sin(0,1)_{\text{exakt}} = 0,099833\dots \approx 0,1 \quad \cos(0,1)_{\text{exakt}} = 0,995004\dots \approx 1,0 \quad .$$

Die Darstellung beliebiger komplexer Zahlen

$$\mathbf{z} = x + iy$$

in Polarkoordinaten

$$\mathbf{z} = r \cos\varphi + ir \sin\varphi,$$

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r},$$

lautet bei Verwendung der EULERSchen Formel:

$$\mathbf{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r e^{i\varphi} = r \exp(i\varphi).$$

Für die zu \mathbf{z} konjugiert komplexe Zahl gilt

$$\bar{\mathbf{z}} = r e^{-i\varphi}.$$

Eine negative reelle Zahl $-a$ lautet in komplexer Schreibweise

$$-a = a e^{i\pi}.$$

Die Multiplikation und Division mit komplexen Zahlen lässt sich mit Hilfe der EULERSchen Formel besonders leicht ausführen:

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad \rightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \end{cases}$$

Auch Additionstheoreme der Winkelfunktionen sind mit Hilfe der EULERSchen Formel schnell herzuleiten.

Die **Logarithmusfunktionen** sind die Umkehrfunktionen der **Exponentialfunktionen**

$$y = b^x.$$

In der Gleichung

$$b^x = a$$

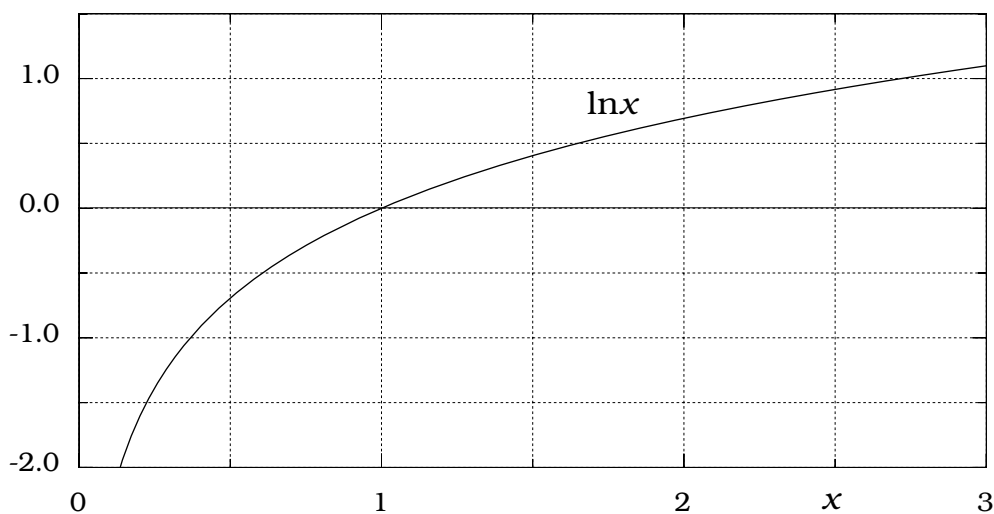
ist x der Logarithmus der Zahl a zur Basis b :

$$x = \log_b a.$$

Wählt man insbesondere als Basis b die transzendente Zahl e , so gilt

$$e^x = a \quad \leftrightarrow \quad x = \log_e a =: \ln a.$$

Die Umkehrfunktion der e-Funktion ist der **Logarithmus zur Basis e** oder **natürliche Logarithmus**:



$$y = \ln x \quad \leftrightarrow \quad x = e^y \quad \{0 < x < \infty\}, \{-\infty < y < \infty\}$$

$$x = e^{\ln x}, \quad \ln(e^x) = x. \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1.$$

Bei Berechnungen mit der Logarithmusfunktion sind die folgenden Rechenregeln zu beachten:

$$xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{(\ln x + \ln y)} \quad \rightarrow \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y,$$

$$\frac{x}{y} = e^{\ln x} e^{-\ln y} = e^{(\ln x - \ln y)} \quad \rightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y,$$

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, \quad (a > 0).$$

$$x^k = (e^{\ln x})^k = e^{k \ln x}, \quad (x > 0).$$

Der natürliche Logarithmus von komplexen Zahlen und negativen reellen Zahlen ist folgendermaßen zu bilden:

$$\mathbf{z} = x + iy = re^{i\varphi}, \quad \rightarrow \quad \ln \mathbf{z} = \ln r + i\varphi.$$

$$\ln(-a) = \ln(ae^{i\pi}) = \ln a + i\pi.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit der Basis 10 ist der **Logarithmus zur Basis 10** (gewöhnlicher Logarithmus):

$$\log_{10} a =: \log a,$$

$$y = \log x \quad \leftrightarrow \quad x = 10^y \quad \{0 < x < \infty\}, \{-\infty < y < \infty\}$$

$$x = 10^{\log x}, \quad \log(10^x) = x.$$

$$\log(1) = 0, \quad \log(10) = 1.$$

Zwischen $\log x$ und $\ln x$ besteht die folgende Beziehung:

$$x = 10^{\log x} = (e^{\ln(10)})^{\log x} = e^{\ln(10)\log x} \quad \rightarrow \quad \ln x = \ln(10)\log x,$$

$$\ln(10) = 2,302585\dots$$

$$\log x = \frac{1}{\ln(10)} \ln x = 0,43429 \ln x.$$

▼ Beispiel 3.4.1

Die oben anschaulich abgeleiteten Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ ergeben sich nun durch formale Rechnung:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta),$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \underbrace{(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}_{\cos(\alpha+\beta)} + i \underbrace{(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)}_{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Ähnlich verläuft die Berechnung von $\cos(3\alpha)$ und $\sin(3\alpha)$ als Funktionen von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$

$$e^{i3\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3,$$

$$\cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha) = (\cos\alpha)^3 + 3(\cos\alpha)^2 i\sin\alpha + 3\cos\alpha(i\sin\alpha)^2 + (i\sin\alpha)^3,$$

$$\cos(3\alpha) = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

$$\sin(3\alpha) = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Auch die Darstellung von $\cos\alpha + \cos\beta$ und $\sin\alpha + \sin\beta$ durch Produkte von Sinus- und Cosinusfunktionen wird durch eine etwas trickreich angesetzte aber schließlich einfache Berechnung gewonnen:

$$e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} e^{\frac{i\alpha-\beta}{2}}, \quad e^{i\beta} = e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} e^{\frac{i\beta-\alpha}{2}},$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} \left(e^{\frac{i\alpha-\beta}{2}} + e^{\frac{i\beta-\alpha}{2}} \right),$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\beta-\alpha}{2} + i\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \right) = e^{\frac{i\alpha+\beta}{2}} 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$(\cos\alpha + \cos\beta) + i(\sin\alpha + \sin\beta) = \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \right) 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$



▼ Beispiel 3.4.2

Für manche Anwendungen ist es zweckmäßig, die **Hyperbelfunktionen** einzuführen. In Analogie zu

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

wird definiert:

$$\text{Cosinushyperbolicus:} \quad \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\text{Sinushyperbolicus:} \quad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

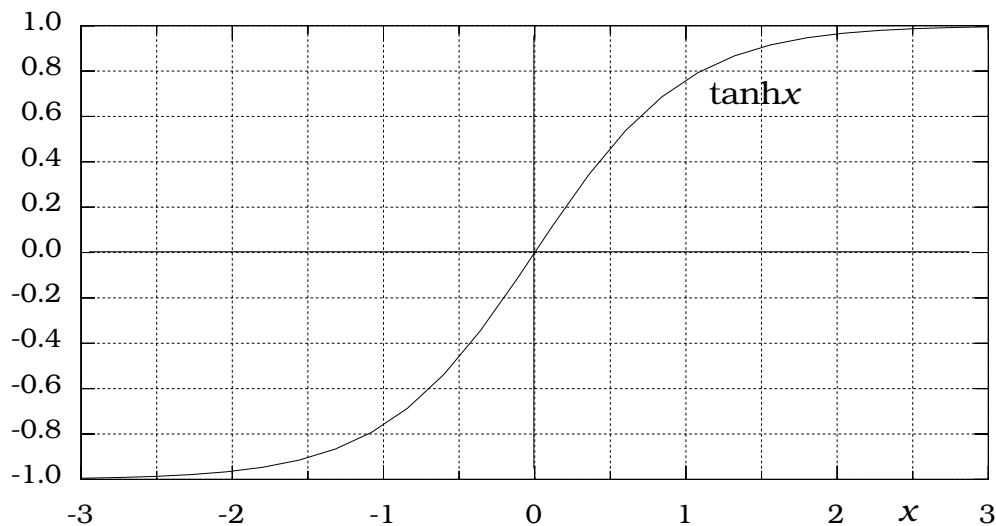
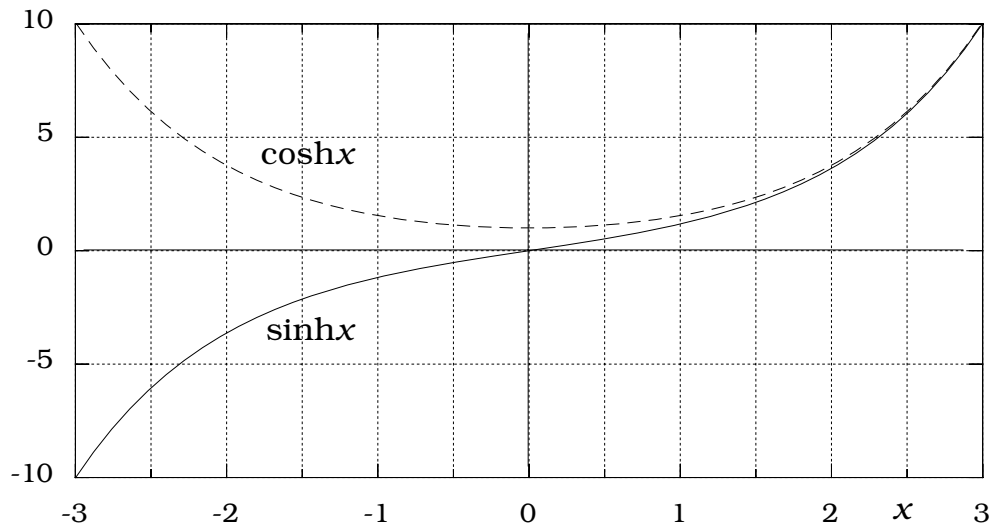
und in Analogie zur trigonometrischen Tangensfunktion

$$\text{Tangenshyperbolicus:} \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Definitionsgemäß gilt:

$$\begin{aligned} \sinh(0) &= 0, & \cosh(0) &= 1, \\ \sinh(-x) &= -\sinh x, & \cosh(-x) &= \cosh x. \end{aligned}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen der Hyperbelfunktionen:



Aus

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}),$$

$$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}),$$

folgt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

und mit

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x,$$

$$e^{x+y} = e^x e^y = (\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y),$$

$$e^{-(x+y)} = e^{-x} e^{-y} = (\cosh x - \sinh x)(\cosh y - \sinh y),$$

erhalten wir die Additionstheoreme

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y.$$

Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen sind die **Area-Funktionen**:

$$y = \sinh x \leftrightarrow x = \operatorname{arsinh} y \quad -\infty < y < \infty$$

$$y = \cosh x \leftrightarrow x = \operatorname{arcosh} y \quad y \geq 1$$

$$y = \tanh x \leftrightarrow x = \operatorname{artanh} y \quad -1 < y < 1$$



▼ Beispiel 3.4.3

Zu den wichtigen Kurven in der xy -Ebene gehören der **Kreis**, die **Ellipse** und die **Hyperbel**. Sie können jeweils durch eine Beziehung zwischen den Koordinaten x und y oder in einer Parameterdarstellung mit λ als **Kurvenparameter** beschrieben werden:

$$\text{Kreis:} \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1, \quad \text{oder} \quad x = r \cos \lambda, \quad y = r \sin \lambda;$$

$$\text{Ellipse:} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad x = a \cos \lambda, \quad y = b \sin \lambda;$$

$$\text{Hyperbel:} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder} \quad x = a \cosh \lambda, \quad y = b \sinh \lambda.$$



▼ Beispiel 3.4.4

Die Umkehrfunktion der Hyperbelfunktion

$$y = \sinh x$$

lautet

$$x = \operatorname{arsinh} y.$$

Weil

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

und

$$\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{1 + y^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

ist, wird

$$y + \sqrt{1 + y^2} = e^x$$

also

$$x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) = \operatorname{ar sinh} y.$$



▼ Beispiel 3.4.5

Zur Hyperbelfunktion

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

gehört die Umkehrfunktion

$$x = \operatorname{artanh} y.$$

Aus

$$y(e^{2x} + 1) = e^{2x} - 1, \quad \rightarrow \quad e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y},$$

folgt schließlich

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} = \operatorname{ar tanh} y.$$



▼ Beispiel 3.4.6

Jede positive reelle Zahl x kann dargestellt werden in der Form

$$x = a, bcde \dots 10^n, \quad a, b, c, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, \quad a \neq 0, \quad n: \text{ganze Zahl.}$$

Daraus folgt

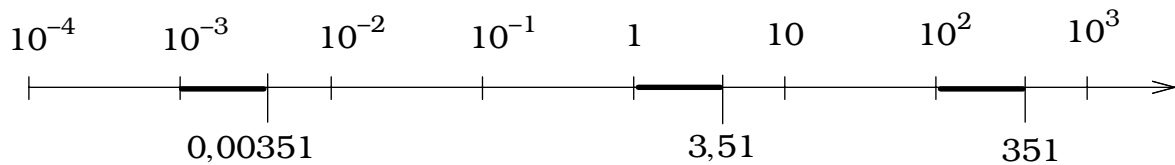
$$\log x = \log(a, bcde \dots) + \log(10^n) = n + \log(a, bcde \dots).$$

Beispielsweise gilt:

$$x = 0,00351 = 3,51 \cdot 10^{-3} \quad \rightarrow \quad \log x = -3 + \log(3,51) = -3 + 0,545307,$$

$$x = 351 = 3,51 \cdot 10^2 \quad \rightarrow \quad \log x = 2 + \log(3,51) = 2 + 0,545307.$$

Diese Beziehungen bilden die Grundlage für logarithmisch geteilte Skalen bei der Erfassung von großen Definitions- und/oder Wertebereichen in der graphischen Darstellung von Funktionen.



Darstellungsbereich: Sieben Zehnerpotenzen.

Es können allerdings nur *positive* reelle Zahlen logarithmisch dargestellt werden. ▲

▼ Beispiel 3.4.7

Die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres ist abhängig von der Frequenz der Schallwellen. Bei 400 Hz (= 400 Schwingungen/Sekunde) liegt die Hörschwelle bei einer Schallintensität von

$$I = 7.2 \cdot 10^{-12} \text{ Wm}^{-2}, \quad (1\text{W} := 1\text{Watt} = 1\text{Nms}^{-1}).$$

Bezieht man die Intensität des Schalls auf

$$I_0 := 1 \cdot 10^{-12} \text{ Wm}^{-2},$$

so ist

$$B := 10 \cdot \log(I/I_0)$$

der in dB (Dezibel) gemessene Schallpegel. Die Hörschwelle für 400 Hz liegt also bei

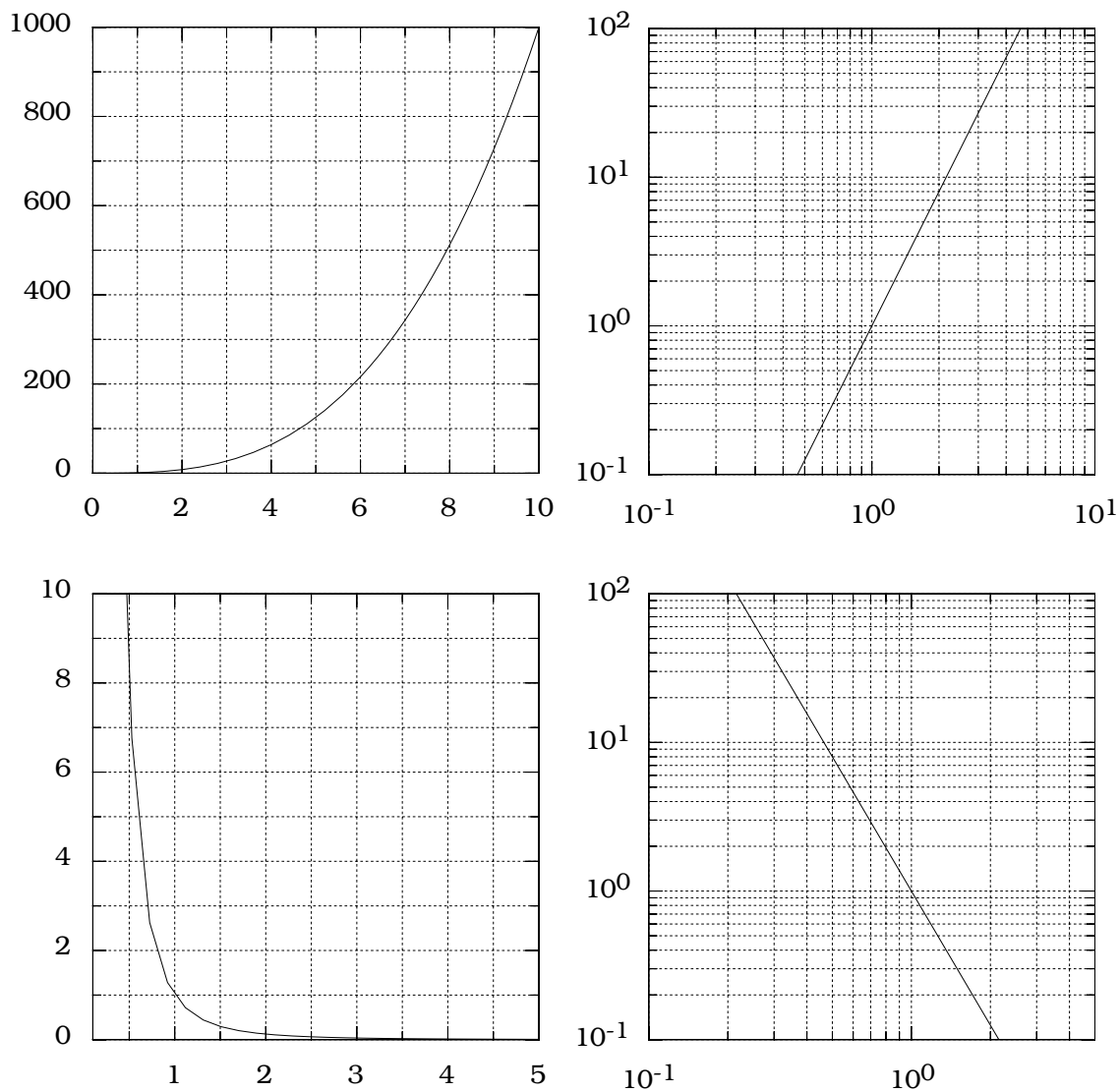
$$B_{400} = 10 \cdot \log(7.2) \text{ dB} = 8.57 \text{ dB}. \quad \blacktriangle$$

▼ Beispiel 3.4.8

Die Graphen von Funktionen ändern sich mit den Achsenskalierungen. So sind beispielsweise die Graphen der Funktionen $y = x^3$ und $y = x^{-3}$ bei linearen Achsenteilungen gekrümmt und bei logarithmischer Teilung der Achsen Geraden.

$$\begin{aligned} y = x^3 &\rightarrow \log y = 3 \log x \\ y = x^{-3} &\rightarrow \log y = -3 \log x \end{aligned}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die unterschiedlichen Darstellungen der Funktionen $y = x^3$ (1. Bildzeile) und $y = x^{-3}$ (2. Bildzeile) in den beiden Achsenskalierungen.



▼ Beispiel 3.4.9

Eine geschwindigkeitsproportional schwach gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch das Gesetz

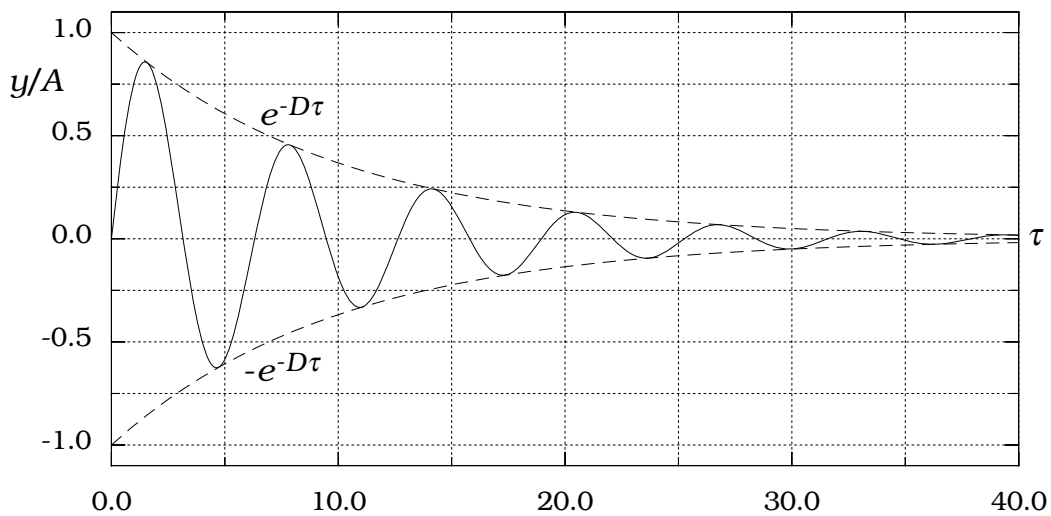
$$y(t) = Ae^{-D\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-D^2} \omega_0 t),$$

Die Konstante D ist das **LEHRsche Dämpfungsmaß**.

Die Funktion $y(t)$ kann in komplexer Schreibweise unterschiedlich dargestellt werden:

$$y(t) = \begin{cases} \operatorname{Im}\{A e^{(-D+i\sqrt{1-D^2})\omega_0 t}\} \\ \operatorname{Re}\{A e^{(-D\omega_0 t+i(\sqrt{1-D^2}\omega_0 t-\pi/2))}\} \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{A} e^{(-D+i\sqrt{1-D^2})\omega_0 t}\}, \quad \mathbf{A} := A e^{-i\pi/2} \end{cases} .$$

Die Abbildung zeigt die Funktion für $D = 0.1$.



▼ Beispiel 3.4.10

Es gilt die Formel:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi(s-r)k/N} = N\delta_{rs} = \begin{cases} N & \text{für } r = s \\ 0 & \text{für } r \neq s \end{cases}$$

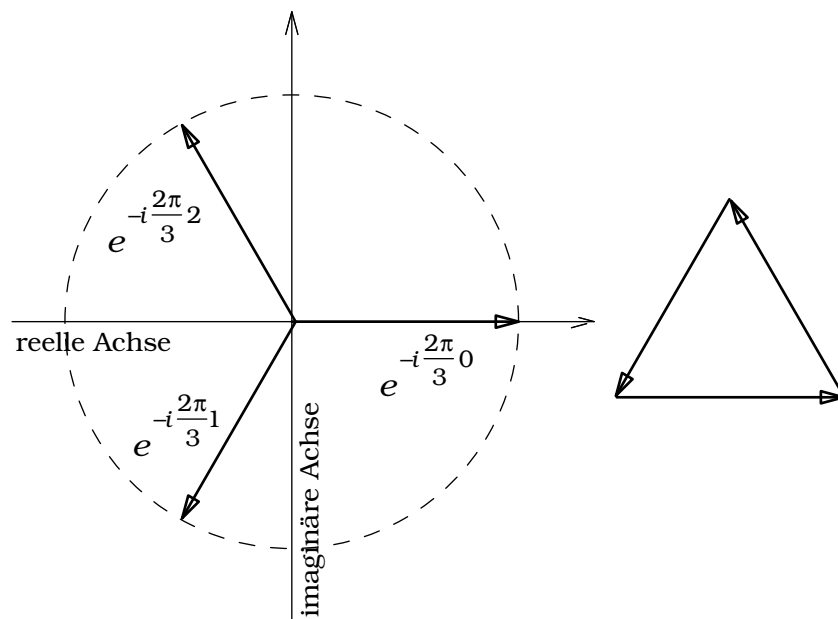
Für $r = s$ wird

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi(s-r)k/N} = \sum_{k=0}^{N-1} 1^k = N,$$

und für $(s-r) = m \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi(s-r)k/N} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i2\pi mk/N} = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-i2\pi m})^{\frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-i2\pi})^{\frac{k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}k}.$$

In der komplexen Zahlenebene lassen sich die komplexen Zahlen $e^{-i\frac{2\pi}{N}k}$ als Zeiger darstellen, die den Einheitskreis in N gleiche Winkelbereiche aufteilen. Für $N = 3$ ergibt sich dann das folgende Bild:



Die graphische Darstellung der Summe der drei Zeiger ergibt ein geschlossenes gleichseitiges N -Eck, also ist

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}k} = 0.$$



3.5 Erläuterung einiger Begriffe

Fast alle bisher vorgestellten Funktionen $y = f(x)$ sind in ihrem Definitionsbereich **stetig**. Das bedeutet anschaulich: Bei beliebig kleinen Änderungen der unabhängigen Variablen x um Δx wird die Differenz der Funktionswerte

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

beliebig klein. Eine Funktion $y = f(x)$ heißt also an einer Stelle $x = a$ ihres Definitionsbereiches stetig, wenn der **Grenzwert** (Limes)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

existiert.

Die Funktion $f(x) = \tan x$ ist beispielsweise an der Stelle $x = \pi/2$ unstetig, denn es gilt

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tan(\pi/2 - \varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tan(\pi/2 + \varepsilon) = -\infty.$$

Eine Unstetigkeit an der Stelle $x = a$ kann aber auch ein endlicher Sprung sein:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a - \varepsilon) =: f(a-) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(a + \varepsilon) =: f(a+)$$

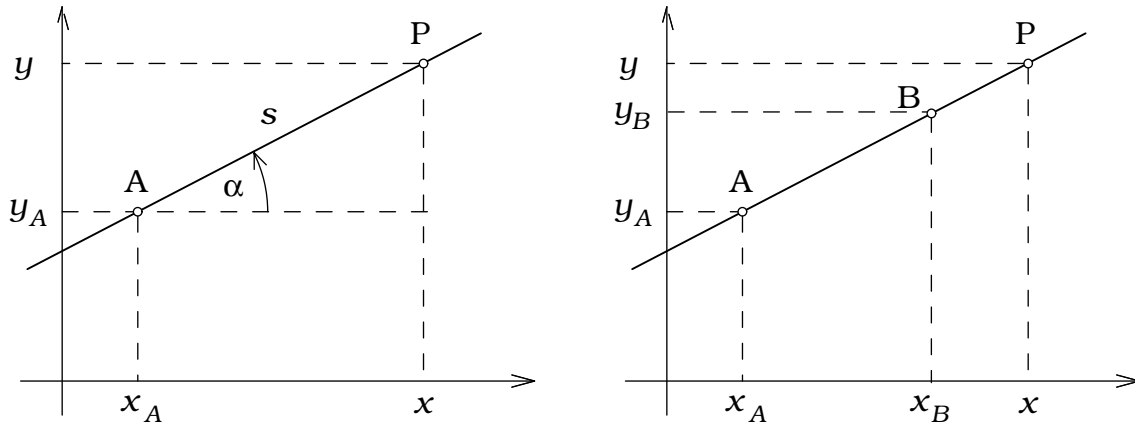
$f(x)$ springt an der Stelle $x = a$, wenn wir sie in positiver x -Richtung durchlaufen, vom Funktionswert $f(a-)$ auf den Funktionswert $f(a+)$. Im Punkt $x = a$ kann man dann beispielsweise vereinbaren, dass

$$f(a) = \frac{f(a+) + f(a-)}{2}$$

sein soll.

4

Geradengleichungen



Eine Gerade in der xy -Ebene ist definiert entweder

durch einen Punkt A und den Winkel α mit der x -Achse,

oder

durch zwei Punkte A und B.

Im ersten Fall hat ein beliebiger Punkt P auf der Geraden die Koordinaten

$$x = x_A + s \cos \alpha, \quad y = y_A + s \sin \alpha.$$

Das ist die **Parameterdarstellung der Geraden**, mit dem Abstand s des Punktes P vom Punkt A als Parameter.

Wenn wir den Parameter

$$s = \frac{x - x_A}{\cos \alpha}$$

eliminieren, erhalten wir die **Geradengleichung**

$$y = y_A + \tan \alpha (x - x_A);$$

der Faktor $\tan \alpha$ ist die **Steigung der Geraden**.

Im zweiten Fall wird

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

und damit lautet die Geradengleichung

$$y = y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A).$$

Für **Geraden durch den Nullpunkt** des Koordinatensystems wählen wir

$$x_A = y_A = 0.$$

Damit ergeben sich die Darstellungen

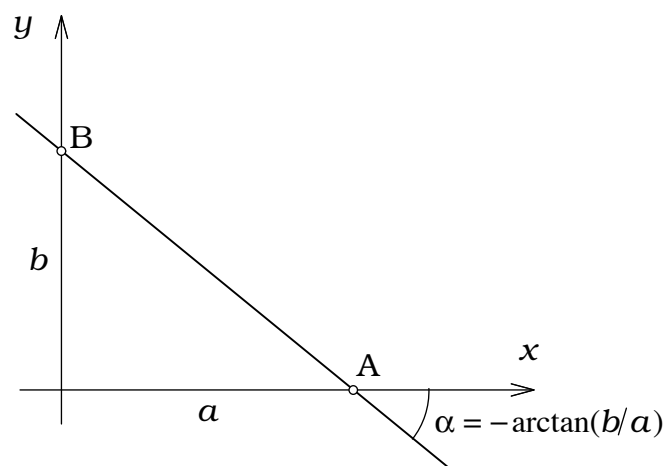
$$x = s \cos \alpha, \quad y = s \sin \alpha;$$

$$y = \tan \alpha x,$$

$$y = \frac{y_B}{x_B} x.$$

Für die Gerade, die durch den Punkt A:(a,0) auf der x-Achse und den Punkt B:(0,b) auf der y-Achse geht, wird

$$y = -\frac{b}{a}(x - a).$$



Daraus ergibt sich die **Abschnittsform der Geradengleichung**:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Die durch die Gleichung

$$px + qy = r \quad \rightarrow \quad \frac{x}{r/p} + \frac{y}{r/q} = 1$$

beschriebene Gerade hat die Achsenabschnitte

$$a = \frac{r}{p}, \quad b = \frac{r}{q}.$$

Mit dieser Information lässt sich die Gerade leicht graphisch darstellen.

▼ Beispiel 4.1

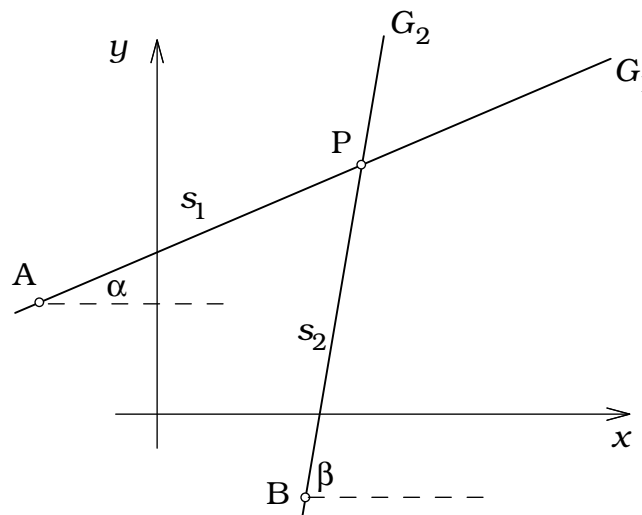
Die Berechnung des Schnittpunktes P zweier Geraden

$$G_1 : \begin{cases} x = x_A + s_1 \cos \alpha, \\ y = y_A + s_1 \sin \alpha, \end{cases} \quad G_2 : \begin{cases} x = x_B + s_2 \cos \beta, \\ y = y_B + s_2 \sin \beta, \end{cases}$$

führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_A + s_1 \cos \alpha &= x_B + s_2 \cos \beta & \rightarrow & \quad s_1 \cos \alpha - s_2 \cos \beta = x_B - x_A \\ y_A + s_1 \sin \alpha &= y_B + s_2 \sin \beta & & \quad s_1 \sin \alpha - s_2 \sin \beta = y_B - y_A \end{aligned}$$

für die Abstände des Schnittpunktes P von den Geradenpunkten A und B:



$$s_1 = \frac{(x_B - x_A) \sin \beta - (y_B - y_A) \cos \beta}{\sin(\beta - \alpha)}, \quad s_2 = \frac{(x_B - x_A) \sin \alpha - (y_B - y_A) \cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Wenn $A \neq B$ und $\alpha \neq \beta$ ist, gibt es immer einen Schnittpunkt mit endlichen Entfernungen von A und B.

Wenn $A = B$ und $\alpha \neq \beta$ ist, wird $s_1 = s_2 = 0$.

Wenn $A \neq B$ und $\alpha = \beta$ ist, sind die Geraden parallel und es gibt keinen Schnittpunkt in endlicher Entfernung von A und B.

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die beiden Unbekannten x und y

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

lässt sich immer deuten als Schnittpunktbestimmung der Geraden

$$y = -\frac{\underbrace{a_{11}}_{\tan \alpha}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}}, \quad y = -\frac{\underbrace{a_{21}}_{\tan \beta}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}}.$$

Es gibt keinen Schnittpunkt, wenn die Geraden parallel sind:

$$\alpha = \beta \rightarrow \tan \alpha = \tan \beta \rightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Wenn die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

die Gleichung

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

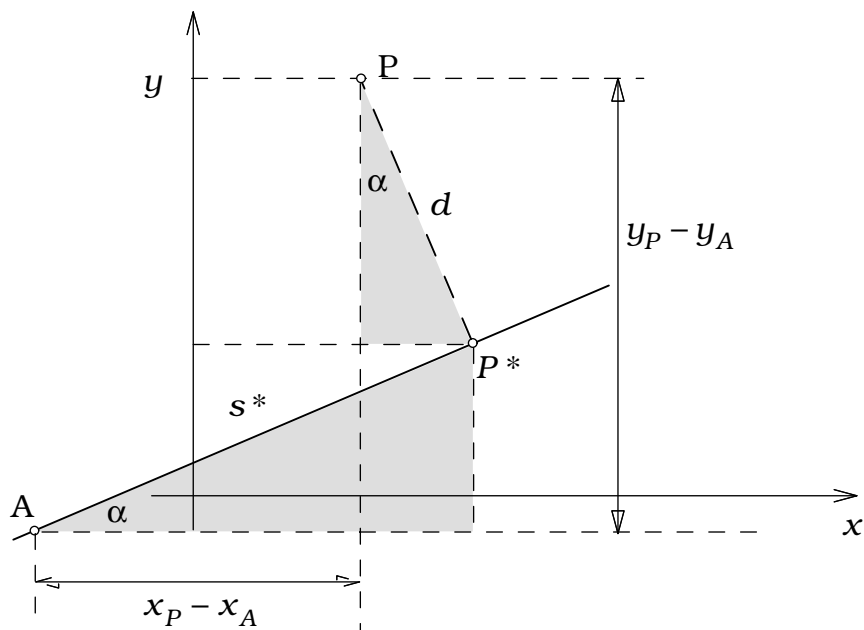
erfüllen, existiert keine Lösung.

Der aus den Koeffizienten des Gleichungssystems gebildete Ausdruck ist die **Determinante** der Koeffizientenmatrix:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$



▼ Beispiel 4.2



Für den senkrechten Abstand d eines Punktes $P:(x_P, y_P)$ von der Geraden G durch den Punkt A sowie den Abstand s^* des Lot-Fußpunktes P^* vom Punkt A erhalten wir das Gleichungssystem:

$$s^* \cos \alpha - d \sin \alpha = x_P - x_A,$$

$$s^* \sin \alpha + d \cos \alpha = y_P - y_A.$$

Daraus folgt

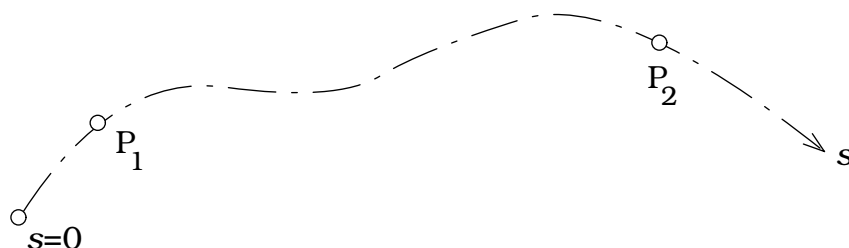
$$d = (y_P - y_A) \cos \alpha - (x_P - x_A) \sin \alpha,$$

$$s^* = (y_P - y_A) \sin \alpha + (x_P - x_A) \cos \alpha.$$



▼ Beispiel 4.3

Das Weg-Zeit-Diagramm eines Fahrzeugs, das entweder steht oder mit konstanter Geschwindigkeit v fährt, besteht aus Geradenabschnitten. Die Position des Fahrzeugs auf dem Weg beschreiben wir mit der Koordinate s und die Zeit mit der Koordinate t .



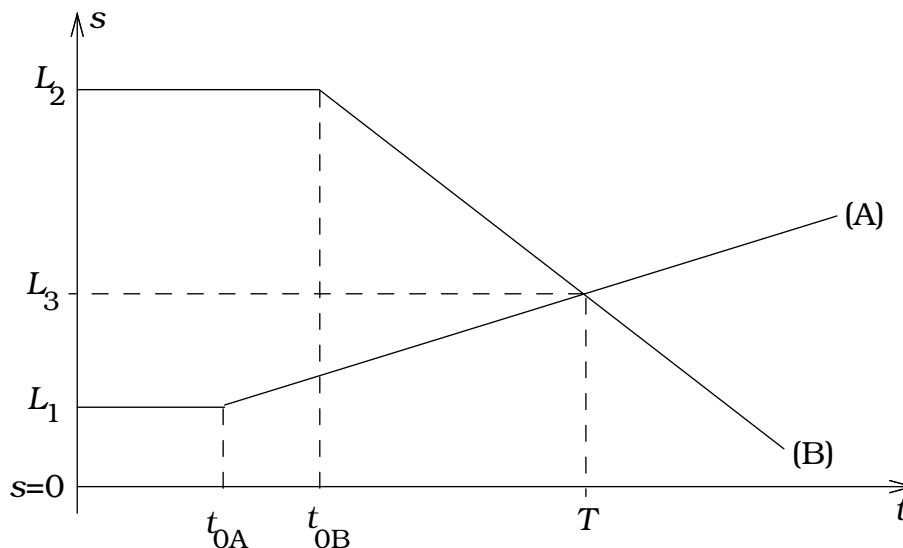
Für ein Fahrzeug A, das bis zum Zeitpunkt t_{0A} am Ort P_1 (Koordinate $s = L_1$) steht und danach mit der Geschwindigkeit v_A in Richtung des Ortes P_2 (Koordinate $s = L_2 > L_1$) fährt, gilt

$$s_A(t) = \begin{cases} L_1 & \text{für } 0 \leq t \leq t_{0A} \\ L_1 + v_A(t - t_{0A}) & \text{für } t > t_{0A} \end{cases}$$

Für ein Fahrzeug B, das bis zum Zeitpunkt t_{0B} am Ort P_2 steht und danach mit der Geschwindigkeit v_B in Richtung des Ortes P_1 fährt, gilt

$$s_B(t) = \begin{cases} L_2 & \text{für } 0 \leq t \leq t_{0B} \\ L_2 - v_B(t - t_{0B}) & \text{für } t > t_{0B} \end{cases}$$

Aus den entsprechenden s,t -Diagrammen



kann man sofort ablesen, wann und wo sich die Fahrzeuge begegnen: Der Schnittpunkt der beiden geneigten Weg-Zeit-Geraden hat als Koordinaten den Begegnungszeitpunkt T und den Begegnungsort $s = L_3$. Für die Berechnung von T und L_3 gilt

$$s_A(T) = s_B(T) \quad \rightarrow \quad L_1 + v_A(T - t_{0A}) = L_2 - v_B(T - t_{0B})$$

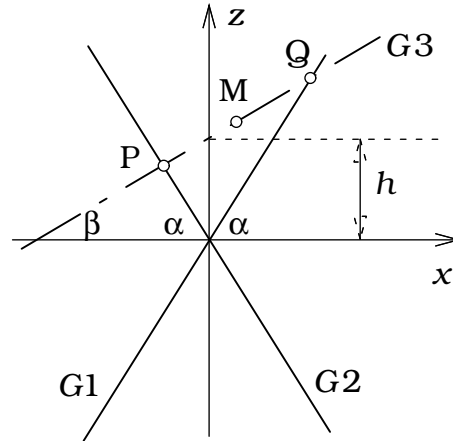
und daraus folgt

$$T = \frac{L_2 - L_1 + v_A t_{0A} + v_B t_{0B}}{v_A + v_B}, \quad L_3 = L_1 + v_A(T - t_{0A}).$$



▼ Beispiel 4.4

Man berechne die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Geraden G3 mit den Geraden G1 und G2 in der xz -Ebene, sowie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke PQ und deren Länge.



Bei der Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte P, Q ist zu beachten, dass die Schnittpunktkoordinaten die Gleichungen der sich schneidenden Geraden erfüllen müssen:

$$h + \tan \beta x_P = -\tan \alpha x_P, \quad \rightarrow \quad x_P = -\frac{h}{\tan \alpha + \tan \beta}, \quad z_P = -\tan \alpha x_P.$$

$$h + \tan \beta x_Q = \tan \alpha x_Q, \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{h}{\tan \alpha - \tan \beta}, \quad z_Q = \tan \alpha x_Q.$$

Der Mittelpunkt M der Strecke \overline{PQ} hat die Koordinaten

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\tan \alpha - \tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} \right) = h \frac{\tan \beta}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta},$$

$$z_M = h + \tan \beta x_M = h \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}.$$

Für die Länge der Strecke \overline{PQ} gilt:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}.$$

Dabei ist

$$x_Q - x_P = h \left(\frac{1}{\tan \alpha - \tan \beta} + \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} \right) = 2h \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta},$$

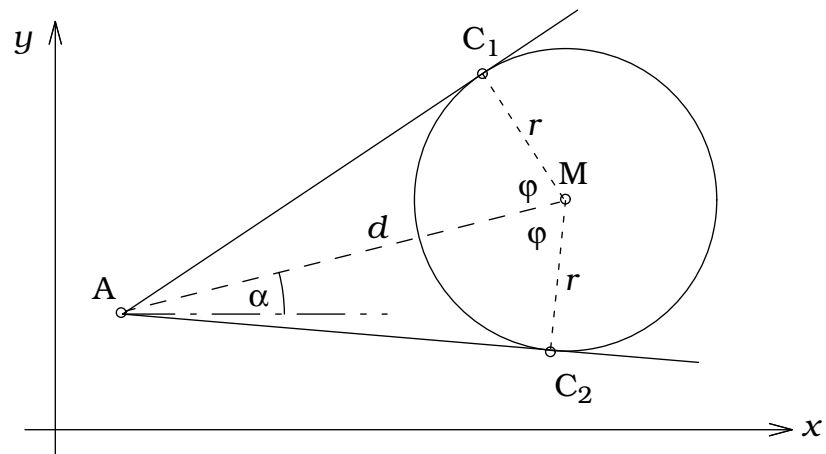
$$z_Q - z_P = \tan \alpha (x_Q + x_P) = 2h \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta},$$

also

$$\overline{PQ} = 2h \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} \sqrt{1 + \tan^2 \beta} = 2h \frac{\tan \alpha}{(\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta) \cos \beta}.$$



▼ Beispiel 4.5



Für den Kreis mit dem Radius r um den Mittelpunkt $M:(x_M, y_M)$ sollen die Koordinaten der Berührungspunkte C_1 und C_2 der Tangenten durch den Punkt $A:(x_A, y_A)$ berechnet werden.

Es gilt

$$\alpha = \arctan \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}, \quad d = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2},$$

$$\varphi = \arccos(r/d),$$

$$x_{C_1} = x_M - r \cos(\varphi - \alpha), \quad y_{C_1} = y_M + r \sin(\varphi - \alpha),$$

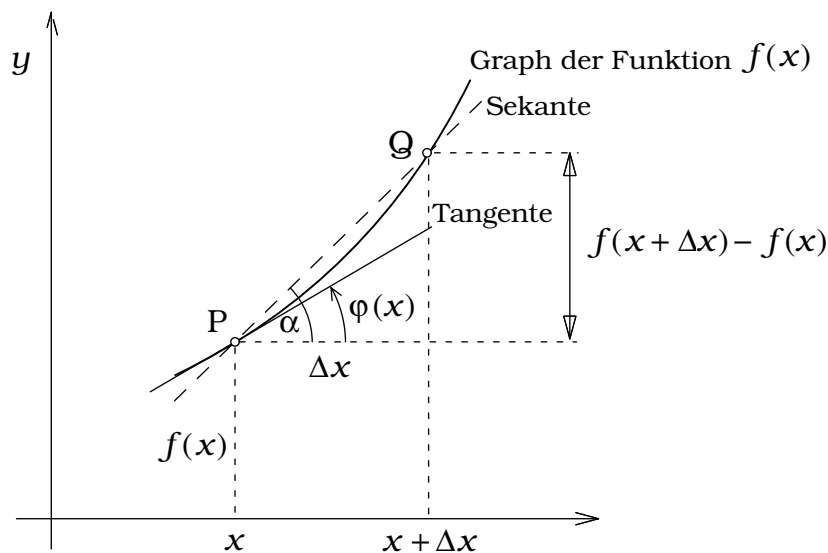
$$x_{C_2} = x_M - r \cos(\varphi + \alpha), \quad y_{C_2} = y_M - r \sin(\varphi + \alpha).$$



Differentialrechnung

5.1 Der Differentialquotient

$f(x)$ steht symbolisch für eine Rechenvorschrift, die der Variablen x den Funktionswert $y = f(x)$ zuordnet. Veranschaulichen lässt sich diese Beziehung in der xy -Ebene durch den Funktionsgraphen, in dem sich gut darstellen lässt, wie sich der Funktionswert bei der Änderung $x \rightarrow (x + \Delta x)$ verhält.



Der Quotient

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =: \frac{\Delta f}{\Delta x} = \tan \alpha.$$

wird **Differenzenquotient** genannt; er liefert den Tangens des Neigungswinkels α der Sekante durch die Kurvenpunkte P und Q.

Mit dem Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ nähert sich der Punkt Q dem Punkt P, und aus der Sekante wird die Tangente an den Funktionsgraphen im Punkt P mit dem Neigungswinkel $\varphi(x)$.

Man bezeichnet den Grenzwert (wenn er existiert) als **Ableitung** oder **Differentialquotient** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x und erhält

$$f'(x) := \frac{df(x)}{dx} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \varphi(x).$$

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x gibt also Auskunft über die durch $\tan\varphi(x)$ beschriebene **Steigung** der Funktion $f(x)$ an der betreffenden Stelle.

▼ Beispiel 5.1.1

Für die Potenzfunktion

$$f(x) = x^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

erhalten wir

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \text{Terme mit höh. Pot. von } \Delta x$$

und deshalb wird

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = nx^{n-1},$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$



▼ Beispiel 5.1.2

Für die Exponentialfunktion

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{(\lambda x)^2}{2!} + \frac{(\lambda x)^3}{3!} + \frac{(\lambda x)^4}{4!} + \frac{(\lambda x)^5}{5!} + \dots$$

gilt

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda \Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \lambda + \frac{\lambda^2 \Delta x}{2!} + \frac{\lambda^3 (\Delta x)^2}{3!} + \dots \right\} = \lambda,$$

und somit

$$\frac{de^{\lambda x}}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda(x+\Delta x)} - e^{\lambda x}}{\Delta x} = e^{\lambda x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda \Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{\lambda x} \lambda,$$

$$\frac{de^{\lambda x}}{dx} = \lambda e^{\lambda x}.$$



5.2 Differentiationsregeln

Für die Summe von Funktionen und das Produkt einer Funktion mit einem konstanten Faktor ergeben sich aus den entsprechenden Differenzenquotienten mit dem Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ unmittelbar die Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) + h(x) &\rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x), \\ f(x) = a g(x) &\rightarrow f'(x) = a g'(x), \end{aligned}$$

Die Produktregel

$$h(x) = f(x)g(x) \rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{d(f(x)g(x))}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - \{f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x)\} - f(x)g(x)}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x+\Delta x) + f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}, \\ &= \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Die Quotientenregel

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

ist eine Folge der Produktregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ g(x) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right\} &= \frac{df(x)}{dx}, \\ \frac{dg(x)}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) + g(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{df(x)}{dx}, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{1}{g(x)} \left\{ \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right\}, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{1}{(g(x))^2} \left\{ g(x) \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Sehr oft wird die **Kettenregel**

$$f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} h'(x).$$

benötigt. Sie ergibt sich wieder aus dem Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}\frac{dg(h(x))}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x + \Delta x)) - g(h(x))}{\Delta x}, \\ h(x + \Delta x) - h(x) &=: \Delta h, \\ \frac{dg(h(x))}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(h(x) + \Delta h) - g(h(x))}{\Delta h} \frac{\Delta h}{\Delta x}, \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{g(h(x) + \Delta h) - g(h(x))}{\Delta h} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}, \\ &= \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(x)}{dx}.\end{aligned}$$

Wenn $f(x) = g(h(k(x)))$ ist, wird

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(k)}{dk} \frac{dk(x)}{dx}.$$

▼ Beispiel 5.2.1

Die Ableitungen der Winkelfunktionen ergeben sich mit Hilfe der EULERSchen Formel

$$\begin{aligned}e^{i\lambda x} &= \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x), \\ \frac{de^{i\lambda x}}{dx} &= \frac{d}{dx} \{\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)\} = \frac{d\cos(\lambda x)}{dx} + i \frac{d\sin(\lambda x)}{dx}, \\ \frac{de^{i\lambda x}}{dx} &= i\lambda e^{i\lambda x} = i\lambda \{\cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)\} = -\lambda \sin(\lambda x) + i\lambda \cos(\lambda x),\end{aligned}$$

Da Real- und Imaginärteil in den beiden komplexwertigen Darstellungen des Differentialquotienten jeweils übereinstimmen müssen, erhalten wir die wichtigen Formeln

$$\frac{d\cos(\lambda x)}{dx} = -\lambda \sin(\lambda x), \quad \frac{d\sin(\lambda x)}{dx} = \lambda \cos(\lambda x).$$



▼ Beispiel 5.2.2

Die Ableitungen der Hyperbelfunktionen erhalten wir unmittelbar aus den Ableitungen der Exponentialfunktion. Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit mit den Ableitungen der formal entsprechenden trigonometrischen Funktionen.

$$\begin{aligned}\frac{dcosh(\lambda x)}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{d(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})}{dx} = \frac{\lambda}{2} (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}) = \lambda \sinh(\lambda x), \\ \frac{dsinh(\lambda x)}{dx} &= \frac{1}{2} \frac{d(e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})}{dx} = \frac{\lambda}{2} (e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}) = \lambda \cosh(\lambda x).\end{aligned}$$



▼ Beispiel 5.2.3

Mit Hilfe der Produktregel erhalten wir

$$f(x) = x^2 \sin(\lambda x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x \sin(\lambda x) + x^2 \lambda \cos(\lambda x),$$

$$f(x) = Ae^{\lambda x} \sin(\mu x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = Ae^{\lambda x} (\lambda \sin(\mu x) + \mu \cos(\mu x)).$$



▼ Beispiel 5.2.4

Mit der Quotientenregel ergeben sich die folgenden Ableitungen

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1},$$

$$f(x) = \tan x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$



▼ Beispiel 5.2.5

Für die Ableitung der Funktion

$$g(h) = h^3, \quad h(x) = (1 + x^3) \quad \rightarrow \quad f(x) = g(h(x)) = (1 + x^3)^3$$

verwendet man die Kettenregel:

$$f'(x) = 3(1 + x^3)^2 \cdot 3x^2 = 9x^2 (1 + x^3)^2.$$



▼ Beispiel 5.2.6

Für die Ableitung der Funktion

$$g(h) = \sin(h^2), \quad h(x) = (1 + x) \quad \rightarrow \quad f(x) = g(h(x)) = \sin(1 + 2x + x^2)$$

verwendet man die Kettenregel:

$$f'(x) = 2(1 + x) \cos(1 + 2x + x^2).$$



▼ Beispiel 5.2.7

Die Funktion $f(x) = \sin(\cos(x^2))$ kann mit

$$k(x) = x^2, \quad h(k) = \cos(k), \quad g(h) = \sin(h)$$

geschrieben werden $f(x) = g(h(k(x)))$. Weil

$$\frac{dg(h)}{dh} = \cos(h), \quad \frac{dh(k)}{dk} = -\sin(k), \quad \frac{dk(x)}{dx} = 2x$$

ist, folgt aus

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(k)}{dk} \frac{dk(x)}{dx},$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\cos(h)\sin(k)(2x) = -2x\cos(\cos(x^2))\sin(x^2).$$



▼ Beispiel 5.2.8

Aus

$$f(x) = x = \sqrt{x}\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1 = (\sqrt{x})'\sqrt{x} + \sqrt{x}(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}(\sqrt{x})'$$

folgt

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$



▼ Beispiel 5.2.9

Ist $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^3}}$, so erhalten wir die Darstellung $f(x) = g(h(k(x)))$ mit

$$k(x) = 1 + x^3, \quad h(k) = 1 + \sqrt{k}, \quad g(h) = \sqrt{h},$$

und wegen

$$\frac{dg(h)}{dh} = \frac{1}{2\sqrt{h}}, \quad \frac{dh(k)}{dk} = \frac{1}{2\sqrt{k}}, \quad \frac{dk(x)}{dx} = 3x^2,$$

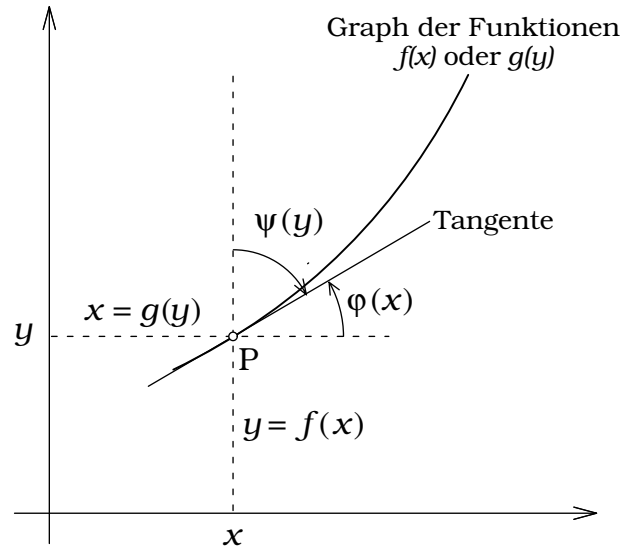
die Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{3x^2}{2\sqrt{h}\sqrt{k}} = \frac{3x^2}{2\sqrt{1 + \sqrt{1 + x^3}}\sqrt{1 + x^3}}.$$



▼ Beispiel 5.2.10

Ist $x = g(y)$ die Umkehrfunktion der Funktion $y = f(x)$,



so gilt für die beiden Neigungswinkel der lokalen Tangente bezogen auf die x - und die y -Achse

$$\tan \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{\sin(\pi/2 - \varphi)}{\cos(\pi/2 - \varphi)} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{1}{\tan \varphi}.$$

$$\tan \psi(y) = \frac{1}{(\tan \varphi(x))_{x=g(y)}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=g(y)}}.$$

Nach diesem Verfahren können wir die Ableitungen der folgenden Umkehrfunktionen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 y = \sin x \quad \leftrightarrow \quad x = \arcsin y \quad \Rightarrow \quad & \frac{d \arcsin y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=\arcsin y}} \\
 & = \frac{1}{(\cos x)_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \sin^2 x} \right)_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = \tan x \quad \leftrightarrow \quad x = \arctan y \quad \Rightarrow \quad & \frac{d \arctan y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d \tan x}{dx} \right)_{x=\arctan y}} \\
 & = (\cos^2 x)_{x=\arctan y} = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \right)_{x=\arctan y} \\
 & = \left(\frac{1}{1 + \tan^2 x} \right)_{x=\arctan y} = \frac{1}{1 + y^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y = e^x \quad \leftrightarrow \quad x = \ln y \quad \Rightarrow \quad & \frac{d \ln y}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{d e^x}{dx} \right)_{x=\ln y}} = \frac{1}{(e^x)_{x=\ln y}} \\
 & = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.
 \end{aligned}$$

▼ Beispiel 5.2.11

Die Funktion

$$y(x) = \{f(x)\}^k, \quad f(x) > 0, \quad k: \text{ reelle Zahl}$$

kann mit der Substitution

$$u = f(x)$$

vorübergehend geschrieben werden

$$y = u^k = \{e^{\ln u}\}^k = e^{k \ln u}.$$

Nach der Kettenregel wird dann

$$y' = \frac{dy}{du} u' = e^{k \ln u} k \frac{d \ln u}{du} u' = k e^{k \ln u} \frac{u'}{u} = k u^k \frac{u'}{u} = k u^{k-1} u',$$

also in der ursprünglichen Schreibweise

$$y' = k \{f(x)\}^{k-1} f'(x).$$

5.3 Kurvendiskussion

Als **zweite Ableitung** einer Funktion $f(x)$ ist definiert

$$f''(x) := \frac{df'(x)}{dx} := \frac{d^2 f(x)}{dx^2} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Entsprechendes gilt für noch höhere Ableitungen.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ ist ein Maß für die Änderung der Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x .

Für den Differentialquotienten des Neigungswinkels $\varphi(x) = \arctan(f'(x))$ der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x)$ erhalten wir nach der Kettenregel, wenn wir vorübergehend

$$u(x) := f'(x)$$

setzen,

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d\arctan u}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx},$$

also

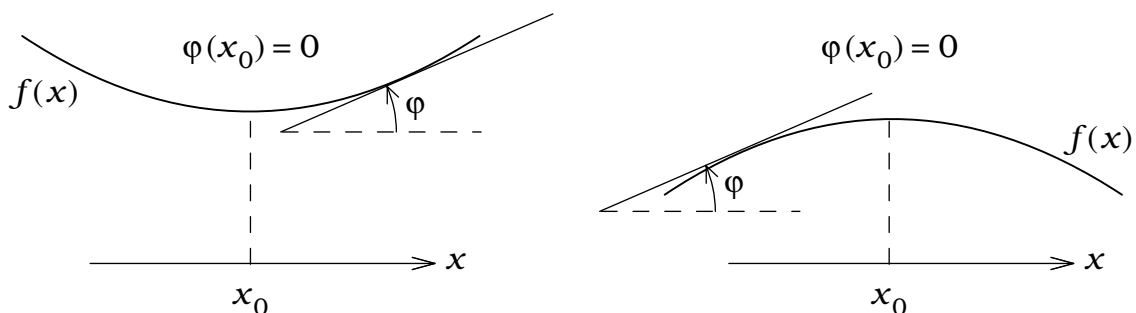
$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2}.$$

Gehen wir von der Stelle x zur infinitesimal benachbarten Stelle $(x + \Delta x)$, so ändert sich der Neigungswinkel der Tangente näherungsweise um

$$\Delta\varphi = \frac{f''(x)}{1+(f'(x))^2} \Delta x.$$

Ist insbesondere $f'(x_0) = 0$, so wird in x_0

$$\Delta\varphi = f''(x_0) \Delta x.$$



Verhält sich der Graph der Funktion $f(x)$ in der Umgebung von der Stelle x_0 wie im *linken* Bild, so ist dort

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0$$

und verhält er sich wie im *rechten* Bild, so gilt

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0.$$

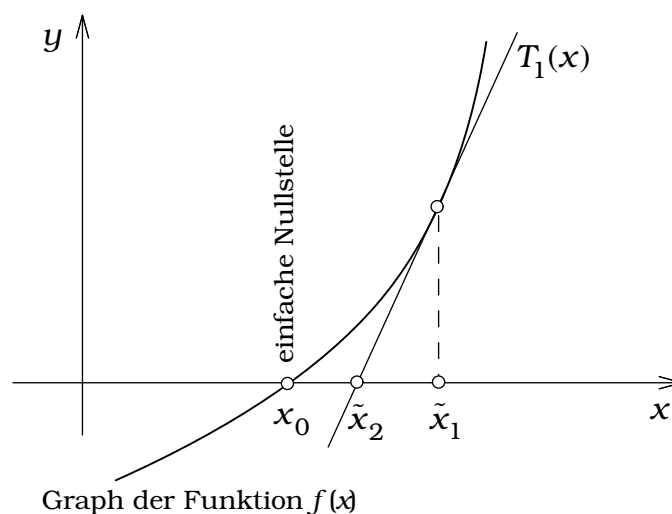
Der auf die x -Achse bezogene Neigungswinkel φ der Tangente nimmt also bei der Koordinatenänderung Δx zu, wenn $f''(x_0) > 0$ ist, und er nimmt ab, wenn $f''(x_0) < 0$ ist. Daraus folgt:

Wenn $\begin{cases} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ ist, hat die Funktion $f(x)$ in x_0 ein **lokales** $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$.

Wenn $f''(x_0) = 0$ ist, hat der Graph der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt**.

Die **Nullstellen** nichtlinearer Funktionen $y = f(x)$ lassen sich meistens nur näherungsweise bestimmen. Ist \tilde{x}_1 der erste Näherungswert für eine einfache Nullstelle x_0 der Funktion $f(x)$, der sich beispielsweise aus einer Skizze des Funktionsgraphen gewinnen lässt, so können wir zunächst die Tangente $T_1(x)$ an den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$ mit der Steigung $f'(\tilde{x}_1)$ berechnen:

$$T_1(x) := f(\tilde{x}_1) + f'(\tilde{x}_1)(x - \tilde{x}_1).$$



Die Nullstelle \tilde{x}_2 dieser Tangente, die sich aus der Beziehung

$$f(\tilde{x}_1) + f'(\tilde{x}_1)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 - \frac{f(\tilde{x}_1)}{f'(\tilde{x}_1)},$$

ergibt, ist in der Regel ein besserer Näherungswert für die Nullstelle x_0 der nichtlinearen Funktion $f(x)$, wenn \tilde{x}_1 *nahe genug(!)* bei x_0 liegt und $f'(\tilde{x}_1) \neq 0$ ist. Die Wiederholung dieser Methode liefert dann einen beliebig genauen Wert für die Nullstelle x_0 ; die Folge

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

konvergiert gegen x_0 . Das ist das **NEWTONSche Näherungsverfahren** zur iterativen Berechnung einer einfachen Nullstelle der nichtlinearen Funktion $f(x)$.

▼ Beispiel 5.3.1

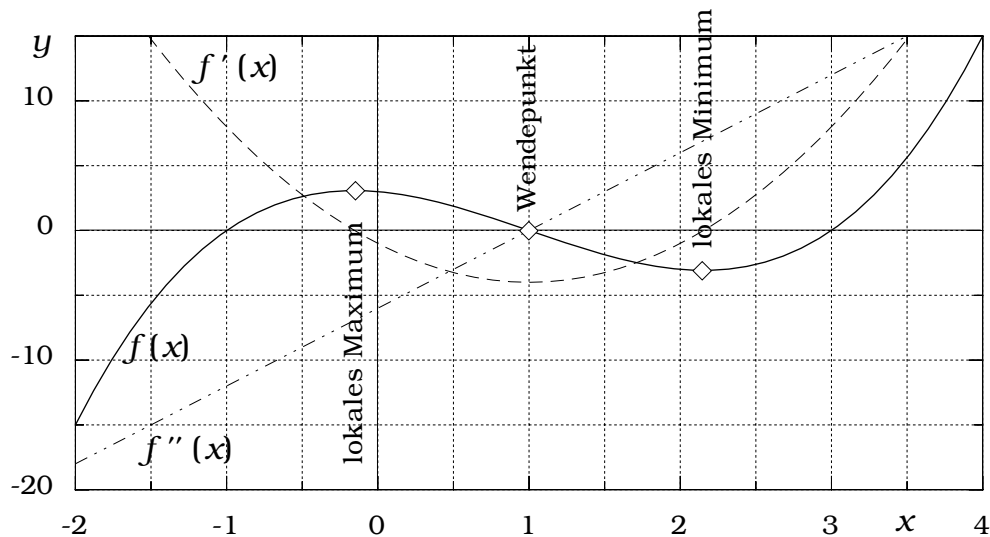
Ist

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3,$$

so wird

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1,$$

$$f''(x) = 6x - 6.$$



Aus

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2/\sqrt{3} = -0,1547 \\ x_2 = 1 + 2/\sqrt{3} = 2,1547 \end{cases}$$

folgt

$$f''(x_1) = -6,9282 \quad f(x_1) = 3,0792 \quad \text{lokales Maximum}$$

$$f''(x_2) = 6,9282 \quad f(x_2) = -3,0792 \quad \text{lokales Minimum}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x_3 = 1 \rightarrow f'(x_3) = -4$$

$$f(x_3) = 0 \quad \text{Wendepunkt}$$



▼ Beispiel 5.3.2

Die Funktion $y(x) = \tan x$ besitzt die Ableitungen

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y''(x) = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} = 2 \frac{\tan x}{\cos^2 x}.$$

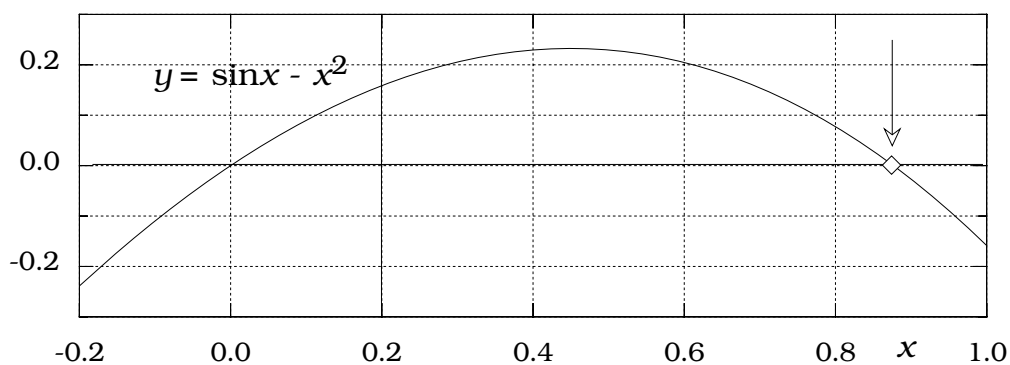
Für $x = 0$ ist

$$y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Demnach hat der Graph der Funktion $y(x) = \tan x$ an der Stelle $x = 0$ einen Wendepunkt.



▼ Beispiel 5.3.3



Mit Hilfe des NEWTONSchen Näherungsverfahrens soll die Nullstelle $x_0 \neq 0$ der Funktion $f(x) = \sin x - x^2$ bis auf sechs Stellen genau berechnet werden, wobei von einem Näherungswert \tilde{x}_1 auszugehen ist, der einer graphischen Darstellung der Funktion entnommen werden kann.

Als ersten Näherungswert für die Nullstelle wählen wir

$$\tilde{x}_1 = 0,9.$$

Der Quotient in der Iterationsvorschrift lautet

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{\sin x - x^2}{\cos x - 2x},$$

also wird

$$\tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} - \frac{f(\tilde{x}_{n-1})}{f'(\tilde{x}_{n-1})} = \tilde{x}_{n-1} - \frac{\sin(\tilde{x}_{n-1}) - \tilde{x}_{n-1}^2}{\cos(\tilde{x}_{n-1}) - 2\tilde{x}_{n-1}},$$

und daraus folgt:

$$\tilde{x}_2 = 0,877364803$$

$$\tilde{x}_3 = 0,876726722$$

$$\tilde{x}_4 = 0,876726215$$

Setzen wir

$$x_0 = \tilde{x}_4,$$

so wird

$$\sin x_0 - x_0^2 = 4,0 \cdot 10^{-10}.$$

\tilde{x}_4 ist schon ein hinreichend genauer Näherungswert für die gesuchte Nullstelle. ▲

▼ Beispiel 5.3.4

Auf eine verspiegelte Zylinderfläche, deren Kontur in der xy -Ebene durch die Kurve $y = f(x)$ beschrieben wird, trifft im Punkt R ein parallel zur x -Achse einfallender Lichtstrahl. Er wird dort nach dem Reflexionsgesetz

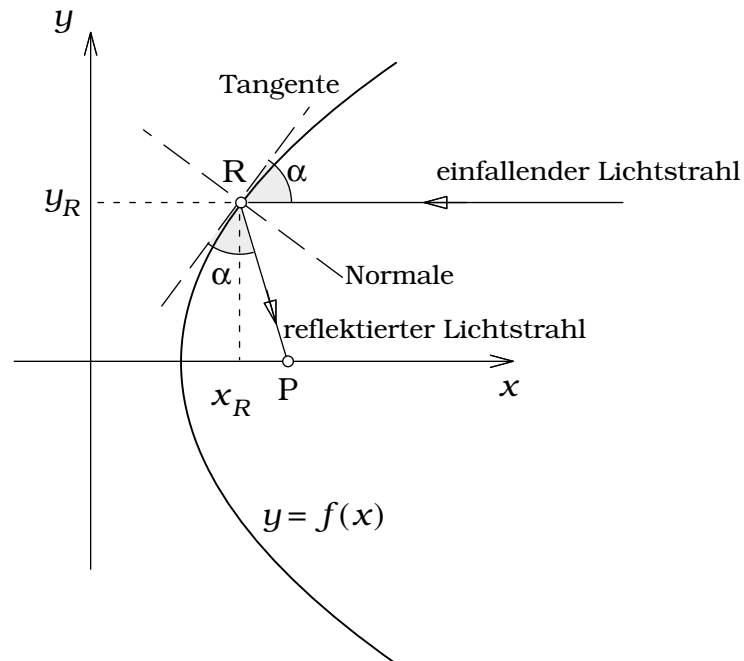
„Einfallswinkel = Ausfallswinkel“

reflektiert und trifft im Punkt P auf die x -Achse.

Berechnet werden soll die Koordinate von P für den Fall, dass die Kontur der Zylinderfläche die Parabel

$$y = \sqrt{2bx - b^2}$$

ist.



Einfalls- und Ausfallswinkel werden auf die lokale Tangente im Punkt R bezogen, deshalb ist

$$\tan \alpha = f'(x_R).$$

Die Gerade durch P und R hat den Neigungswinkel 2α , also gilt für die Punkte auf der Geraden

$$y = y_R + \tan(2\alpha)(x - x_R)$$

und insbesondere für den Punkt P

$$0 = y_R + \tan(2\alpha)(x_P - x_R).$$

Daraus folgt

$$x_P = x_R - \frac{y_R}{\tan(2\alpha)}$$

mit

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 f'(x_R)}{1 - (f'(x_R))^2}.$$

Nun ist aber

$$f'(x) = \frac{b}{\sqrt{2bx - b^2}} = \frac{b}{f(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x_R) = \frac{b}{y_R},$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2by_R}{y_R^2 - b^2} = \frac{by_R}{bx_R - b^2},$$

und deshalb wird

$$x_P = x_R - \frac{y_R}{\tan(2\alpha)} = x_R - \frac{bx_R - b^2}{b} = b.$$

Weil dieses Ergebnis unabhängig ist von der Koordinate x_R des Reflexionspunktes R, werden alle parallel zur x -Achse einfallenden Lichtstrahlen in den gleichen Punkt P auf der x -Achse reflektiert, der deshalb „Brennpunkt“ heißt und bei der Parabel

$$y = \sqrt{2bx - b^2}$$

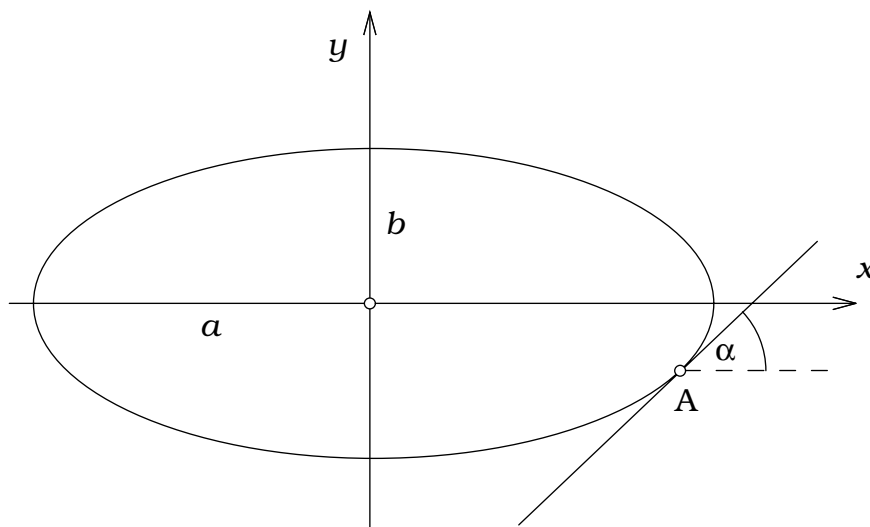
den Abstand b vom Koordinatenursprung hat. ▲

▼ Beispiel 5.3.5

In einem Ellipsenpunkt A mit den Koordinaten ($x_A > 0$, $y_A < 0$) soll die Geradengleichung der Tangente an die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

berechnet werden.



Es gilt für die Punkte auf dem unteren Ellipsenbogen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \rightarrow \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Daraus folgt

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} \frac{x_A}{\sqrt{a^2 - x_A^2}} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_A}{y_A}.$$

Die Geradengleichung der Tangente in A

$$y = \tan \alpha (x - x_A) + y_A$$

kann also geschrieben werden

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_A}{y_A} (x - x_A) + y_A, \quad \rightarrow \quad y - y_A + \frac{b^2}{a^2} \frac{x_A}{y_A} (x - x_A) = 0,$$

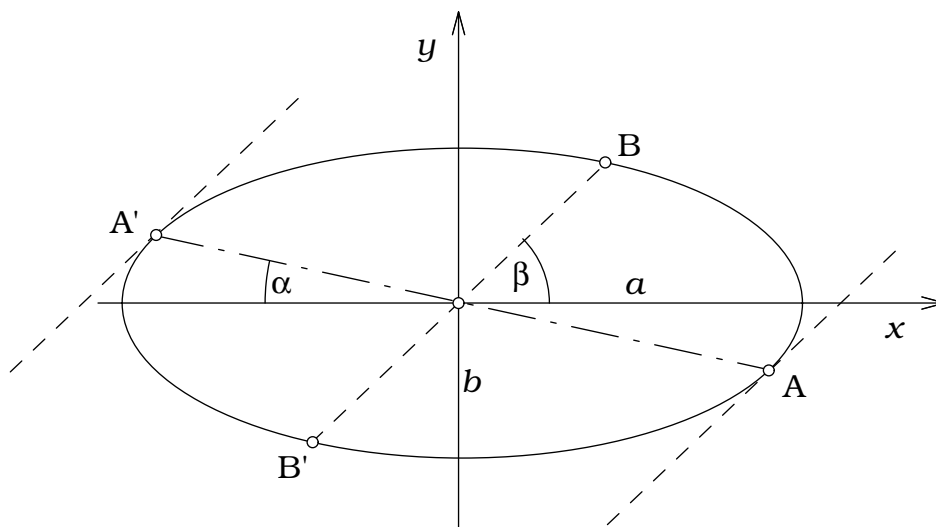
$$a^2 y_A (y - y_A) + b^2 x_A (x - x_A) = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{x_A x}{a^2} + \frac{y_A y}{b^2} - \frac{x_A^2}{a^2} - \frac{y_A^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{x_A x}{a^2} + \frac{y_A y}{b^2} = 1.$$

Die Tangente schneidet die x -Achse und die y -Achse in den Punkten a^2/x_A und b^2/y_A .



▼ Beispiel 5.3.6



Die Strecken AA' und BB' durch den Mittelpunkt der Ellipse heißen, wenn BB' zu den Tangenten in A und A' parallel ist, **konjugierte Durchmesser** der Ellipse. Berechnet werden soll die Beziehung zwischen den Winkeln α und β .

Für den unteren Ellipsenbogen, auf dem der Punkt A liegt, gilt

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die Gerade durch den Punkt A

$$y = -\tan\alpha x$$

liefert im Punkt A die Beziehung

$$y_A = -\tan\alpha x_A.$$

Da A auf der Ellipse liegt, gilt auch

$$\frac{x_A^2}{a^2} + \frac{y_A^2}{b^2} = 1, \quad \rightarrow \quad \frac{x_A^2}{a^2} + \frac{\tan^2\alpha x_A^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x_A^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \tan^2\alpha}.$$

Die Tangente im Punkt A ist definitionsgemäß parallel zum Durchmesser BB' . Also wird

$$y'(x_A) = \frac{b}{a}\frac{x_A}{\sqrt{a^2 - x_A^2}} = \tan\beta, \quad \rightarrow \quad \frac{b^2}{a^2}\frac{x_A^2}{a^2 - x_A^2} = \tan^2\beta,$$

$$(b^2 + a^2 \tan^2\beta)x_A^2 = a^4 \tan^2\beta,$$

$$(b^2 + a^2 \tan^2\beta)\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 \tan^2\alpha} = a^4 \tan^2\beta,$$

$$(b^2 + a^2 \tan^2\beta)b^2 = a^2 \tan^2\beta (b^2 + a^2 \tan^2\alpha), \quad \rightarrow \quad \frac{b^4}{a^4} = \tan^2\alpha \tan^2\beta.$$

Für die Neigungswinkel der konjugierten Durchmesser gilt also:

$$\tan\alpha \tan\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$



5.4 Differentialgleichungen

Eine Gleichung, in der eine Funktion $y(x)$ und/oder ihre Differentialquotienten $y'(x), y''(x), \dots$ vorkommen, nennt man gewöhnliche Differentialgleichung. Beispielsweise kann ein physikalisches Gesetz als Differentialgleichung formuliert werden, und gesucht sind dann Funktionen $y(x)$, die die betreffende Differentialgleichung erfüllen. Besonders hilfreich bei der Suche nach geeigneten Lösungsfunktionen $y(x)$ sind Tabellen von Funktionen mit ihren ersten Ableitungen, die man in mathematischen Formelsammlungen finden kann.

Leider kann nicht immer für eine vorgegebene Differentialgleichung eine geeignete Lösungsfunktion gefunden werden. Man ist dann darauf angewiesen, die betreffende Differentialgleichung mit Hilfe numerischer Verfahren zu lösen. Dafür gibt es beispielsweise das sehr leistungsfähige RUNGE-KUTTA-Verfahren, das - ausgehend von vorzugebenden Anfangsbedingungen - mit konstanter oder variabler Schrittweite eine Tabelle für Funktionswerte der Lösungsfunktion liefert.

Wenn für ein Funktionenpaar $F(x)$ und $f(x)$ die Gleichung

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

gilt, nennt man $F(x)$ **Stammfunktion** von $f(x)$. In der folgenden Tabelle sind solche Funktionenpaare aufgeführt.

$f(x)$	$F(x)$
$x^k \quad (k \neq -1)$	$\frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lambda x) + C$
$e^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$
$\sin(\lambda x + \alpha)$	$-\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x + \alpha) + C$
$\cos(\lambda x + \alpha)$	$\frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x + \alpha) + C$
$\frac{1}{\cos^2(\lambda x)}$	$\frac{1}{\lambda} \tan(\lambda x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda x)^2}}$	$\frac{1}{\lambda} \arcsin(\lambda x) + C$
$\frac{1}{1 + (\lambda x)^2}$	$\frac{1}{\lambda} \arctan(\lambda x) + C$
$\sinh(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda} \cosh(\lambda x) + C$
$\cosh(\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda} \sinh(\lambda x) + C$
$\frac{1}{\cosh^2(\lambda x)}$	$\frac{1}{\lambda} \tanh(\lambda x) + C$
$a^{\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda \ln a} a^{\lambda x} + C$
$g(x) \frac{dg(x)}{dx}$	$\frac{1}{2} g^2(x) + C$
$\frac{1}{g(x)} \frac{dg(x)}{dx}$	$\ln g(x) + C$

▼ Beispiel 5.4.1

Die Bewegung eines Punktes P auf einer Bahnkurve beschreibt man durch ein Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$. Dabei ist t die in Sekunden gemessene Zeit und $s(t)$ die längs der Bahnkurve beispielsweise in Meter gemessene Position des Punktes P zum Zeitpunkt t auf der Bahnkurve.

$$v_s(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

ist dann die in Meter / Sekunde gemessene **Bahngeschwindigkeit** und

$$a_s(t) = \frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

die in Meter / (Sekunde)² gemessene **Bahnbeschleunigung** des Punktes P.

Es ist üblich, eine Differentiation nach der Zeit t mit einem Punkt über dem Symbol für die zu differenzierende Funktion zu notieren:

$$v_s = \dot{s}, \quad a_s = \dot{v}_s = \ddot{s}.$$

Ist nun beispielsweise die Bahnbeschleunigung des Punktes vorgegeben,

$$\ddot{s} = a_0,$$

so ist das eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $s(t)$.

Die Stammfunktion der Konstanten a_0 ist $(a_0t + C_1)$. Daraus folgt für die Bahngeschwindigkeit des Punktes

$$\dot{s} = a_0t + C_1.$$

Diese inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $s(t)$ kann nun mit der zu $(a_0t + C_1)$ gehörenden Stammfunktion $(\frac{1}{2}a_0t^2 + C_1t + C_2)$ allgemein gelöst werden:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + C_1t + C_2.$$

Die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $\ddot{s} = a_0$ enthält zwei Bestandteile:

$\frac{1}{2}a_0t^2$ ist eine **Partikularlösung** der inhomogenen Differentialgleichung $\ddot{s} = a_0$ und

$(C_1t + C_2)$ die allgemeine **Lösung der homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung** $\ddot{s} = 0$.

Die beiden Konstanten C_1 und C_2 ermöglichen es, das Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$ an die frei wählbaren **Anfangsbedingungen** zum Zeitpunkt $t = 0$ anzupassen. Sind beispielsweise Startort und Startgeschwindigkeit vorgegeben

$$s(t = 0) = s_0, \quad \dot{s}(t = 0) = v_0$$

so wird, weil nach der oben angegebenen Lösung

$$\dot{s}(t = 0) = C_1 \quad s(t = 0) = C_2$$

ist,

$$C_2 = s_0, \quad C_1 = v_0,$$

und schließlich

$$\dot{s}(t) = a_0 t + v_0, \quad s(t) = a_0 \frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0.$$



▼ Beispiel 5.4.2

Ein Fahrzeug bewegt sich auf einer Bahn (Wegkoordinate s ; Startbedingungen: $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$) im Zeitintervall $0 \leq t \leq t_1$ mit konstanter Beschleunigung a und ab dem Zeitpunkt t_1 mit konstanter Verzögerung b bis zum Stillstand im Zeitpunkt T . Zu bestimmen sind die gesamte Fahrzeit T und der insgesamt zurückgelegte Weg $s(T)$.

Im ersten Zeitintervall $0 \leq t \leq t_1$ gilt

$$\ddot{s}(t) = a, \quad \dot{s}(t) = at, \quad s(t) = \frac{1}{2} at^2,$$

und im zweiten Zeitintervall $t_1 < t \leq T$, wobei T noch nicht bekannt ist,

$$\ddot{s}(t) = -b, \quad \dot{s}(t) = -bt + C_1, \quad s(t) = -\frac{1}{2} bt^2 + C_1 t + C_2.$$

Für $t = t_1$ müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \dot{s}(t_1)_{1.\text{Intervall}} &= \dot{s}(t_1)_{2.\text{Intervall}} \\ s(t_1)_{1.\text{Intervall}} &= s(t_1)_{2.\text{Intervall}} \end{aligned}$$

und für $t = T$ ist

$$\dot{s}(T)_{2.\text{Intervall}} = 0$$

gefordert.

Das führt auf die folgenden Gleichungen für C_1, C_2 und T :

$$\begin{aligned} at_1 &= -bt_1 + c_1, & c_1 &= (a+b)t_1. \\ -bT + c_1 &= 0, & \rightarrow & T = \frac{a+b}{b}t_1. \\ \frac{1}{2}at_1^2 &= -\frac{1}{2}bt_1^2 + c_1t_1 + c_2, & c_2 &= -\frac{a+b}{2}t_1^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$T = \left(1 + \frac{a}{b}\right)t_1, \quad s(T) = \frac{a(a+b)}{2b}t_1^2.$$



▼ Beispiel 5.4.3

Aus der **inhomogenen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung**

$$w''(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

für die Funktion $w(x)$ folgt zunächst mit der Stammfunktion von x^n

$$w'(x) = a_2 \frac{x^3}{3} + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0x + C_1$$

und schließlich erhalten wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$w(x) = a_2 \frac{x^4}{12} + a_1 \frac{x^3}{6} + a_0 \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

C_1 und C_2 sind Konstanten, mit deren Hilfe man die Funktion $w(x)$ in einer beliebigen Stelle x^* ihres Definitionsbereiches an speziell vorgegebene Werte für w und w' anpassen kann.

$w(x)$ setzt sich zusammen aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$w''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad w_{\text{homogen}} = C_1x + C_2$$

und einer **Partikularlösung** der inhomogenen Differentialgleichung

$$w''(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \rightarrow \quad w_{\text{partikular}} = a_2 \frac{x^4}{12} + a_1 \frac{x^3}{6} + a_0 \frac{x^2}{2};$$

$$w(x) = w_{\text{homogen}} + w_{\text{partikular}}.$$



▼ Beispiel 5.4.4

Die **homogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung**

$$y' - \lambda y = 0$$

in der Darstellung

$$\frac{y'}{y} = \lambda \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\ln y) = \lambda$$

wird durch

$$\ln y = \lambda x + C$$

erfüllt, wobei C eine beliebige Konstante ist. Daraus folgt

$$y = e^{(\lambda x + C)} = e^C e^{\lambda x}.$$

Wir setzen

$$A = e^C$$

und erhalten

$$y = A e^{\lambda x}$$

als **allgemeine Lösung der Differentialgleichung** $y' - \lambda y = 0$. ▲

▼ Beispiel 5.4.5

Besonders bemerkenswert sind die Eigenschaften der zweiten Ableitungen der Sinus- und der Cosinusfunktion und der entsprechenden Hyperbelfunktionen. Es gilt

$$(\sin(\lambda x))'' = (\lambda \cos(\lambda x))' = -\lambda^2 \sin(\lambda x),$$

$$(\cos(\lambda x))'' = (-\lambda \sin(\lambda x))' = -\lambda^2 \cos(\lambda x);$$

$$(\sinh(\lambda x))'' = (\lambda \cosh(\lambda x))' = \lambda^2 \sinh(\lambda x),$$

$$(\cosh(\lambda x))'' = (\lambda \sinh(\lambda x))' = \lambda^2 \cosh(\lambda x).$$

Daraus ergeben sich mit beliebigen Konstanten C_1, C_2, D_1 und D_2 die Beziehungen

$$y(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x) \quad \rightarrow \quad y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0.$$

$$v(x) = D_1 \sinh(\lambda x) + D_2 \cosh(\lambda x) \quad \rightarrow \quad v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0.$$

Die Gleichungen

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0$$

sind **homogene, lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung** für die Funktionen $y(x)$ und $v(x)$;

$$y(x) = C_1 \sin(\lambda x) + C_2 \cos(\lambda x), \quad v(x) = D_1 \sinh(\lambda x) + D_2 \cosh(\lambda x)$$

sind ihre allgemeinen Lösungen.

Die Konstanten C_1, C_2, D_1 und D_2 können dazu verwendet werden, die Lösungen $y(x)$ und $v(x)$ beispielsweise für $x = 0$ an speziell vorgegebene Werte

$$\{y(0) = y_0, y'(0) = h_0\} \quad \{v(0) = v_0, v'(0) = k_0\}$$

anzupassen:

$$y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1, \quad y'(0) = C_1 \lambda \cdot 1 - C_2 \lambda \cdot 0,$$

$$C_2 = y_0, \quad C_1 = -\frac{h_0}{\lambda};$$

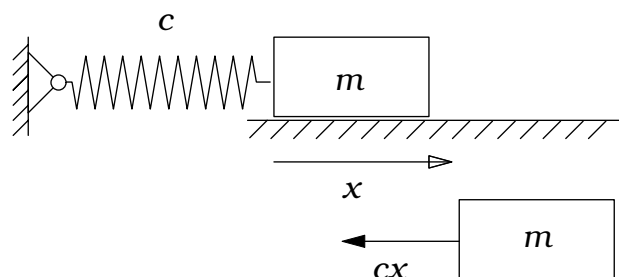
$$v(0) = D_1 \cdot 0 + D_2 \cdot 1, \quad v'(0) = D_1 \lambda \cdot 1 + D_2 \lambda \cdot 0,$$

$$D_2 = v_0, \quad D_1 = \frac{k_0}{\lambda}.$$



▼ Beispiel 5.4.6

Ein Körper der Masse m soll reibungsfrei auf einer horizontalen Bahn gleiten können. Er ist mit einer Feder verbunden, die eine der Auslenkung proportionale Kraft auf den Körper überträgt.



c : Federkonstante (Newton / Meter); $x = 0$: Feder entspannt

Mit dem **NEWTONSchen Grundgesetz**

$$\text{Masse} \times \text{Beschleunigung} = \text{Kraft} \quad \rightarrow \quad m \ddot{x} = -cx,$$

erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0, \quad \frac{c}{m} =: \omega_0^2, \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für $x(t)$. Nach den Ergebnissen im Beispiel 5.4.5 können wir die allgemeine Lösung sofort angeben:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) = C \sin(\omega_0 t + \gamma).$$

Der Körper wird durch die Federkraft $(-cx)$ gezwungen, eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz ω_0 und der Amplitude C auszuführen. Deshalb heißt die Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ auch **Schwingungsgleichung**.

Wir wollen für die Schwingungsgleichung nun noch einen anderen Lösungsweg beschreiben. Zunächst ersetzen wir die Zeit t durch die neue dimensionslose Variable

$$\tau := \omega_0 t,$$

dann wird

$$x(t) = y(\tau(t)), \quad \dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 y', \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \omega_0^2 y'',$$

Für $y(\tau)$ gilt dann die homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + y = 0.$$

Wir multiplizieren diese Differentialgleichung mit y' und erhalten

$$y'' y' + y y' = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} y^2 \right) = 0,$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} y^2 \right) = \frac{C_1}{2}, \quad \rightarrow \quad y' = \sqrt{C_1 - y^2},$$

Mit der Substitution

$$y(\tau) = \sqrt{C_1} u(\tau), \quad \rightarrow \quad y' = \sqrt{C_1} u',$$

entsteht die nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $u(\tau)$, die geschrieben werden kann

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u' = 1, \quad \rightarrow \quad \frac{\arcsin(u)}{du} \frac{du}{d\tau} = 1, \quad \rightarrow \quad \frac{\arcsin(u)}{d\tau} = 1,$$

Die Lösung lautet nun:

$$\arcsin(u) = \tau + C_2, \quad \rightarrow \quad u = \sin(\tau + C_2), \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{C_1}} y(\tau) = \sin(\tau + C_2),$$

$$x(t) = \sqrt{C_1} \sin(\omega_0 t + C_2) = \sqrt{C_1} \{ \sin(\omega_0 t) \cos C_2 + \cos(\omega_0 t) \sin C_2 \},$$

$$A := \sqrt{C_1} \cos C_2, \quad B := \sqrt{C_1} \sin C_2,$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t).$$

$$\text{Anfangsbedingungen: } x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0; \quad \rightarrow \quad B = x_0, \quad A = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + \gamma), \quad C = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}, \quad \gamma = \arctan(\omega_0 x_0 / v_0).$$



▼ Beispiel 5.4.7

Die nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$yy' = b$$

kann wegen

$$yy' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} y^2 \right)$$

auch geschrieben werden

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = b.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{1}{2} y^2 = bx + C$$

mit einer beliebigen Konstanten C . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $yy' = b$ lautet also

$$y(x) = \sqrt{2(bx + C)}.$$

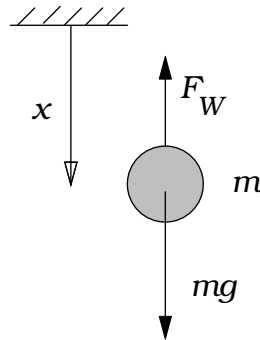


▼ Beispiel 5.4.8

Bei der senkrechten Fallbewegung mit Luftreibung wirken auf einen fallenden Körper der Masse m die Gewichtskraft $G = mg$ und der Luftwiderstand

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \rho_{Luft} A_S v^2.$$

Dabei ist $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ die Beschleunigung der reibungsfreien Fallbewegung, c_W der von der Körperform abhängende Widerstandsbeiwert des Körpers, $\rho_{Luft} = 1,22 \text{ kg m}^{-3}$ die Massendichte der Luft, A_S die Schattenfläche des Körpers in Fallrichtung und v die momentane Fallgeschwindigkeit des Körpers in der ruhenden Luft.



Nach dem NEWTONSchen Grundgesetz

Masse \times *Beschleunigung* = *Summe aller wirkenden Kräfte*

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_W$$

erhalten wir die Differentialgleichung

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} c_W \rho_{Luft} A_S v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{2} v^2, \quad \lambda := \frac{c_W \rho_{Luft} A_S}{m}.$$

Berechnet werden soll zunächst die Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Koordinate x , wenn für $x = 0$ die Geschwindigkeit $v = 0$ ist. In der Darstellung $v = v(x)$ wird nach der Kettenregel

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv(x)}{dx} v = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v^2 \right),$$

und die Differentialgleichung lässt sich neu formulieren:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{2} v^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -\lambda \left(\frac{1}{2} v^2 - \gamma \right), \quad \gamma := \frac{g}{\lambda}.$$

Mit der Substitution

$$u(x) := \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{1}{u-\gamma} \frac{du}{dx} = -\lambda \quad \rightarrow \quad \frac{d \ln(u-\gamma)}{du} \frac{du}{dx} = -\lambda \quad \rightarrow \quad \frac{d \ln(u-\gamma)}{dx} = -\lambda,$$

die die Lösung

$$\ln(u-\gamma) = -\lambda x + K_1$$

besitzt. Es wird also

$$u-\gamma = e^{(-\lambda x + K_1)} = e^{K_1} e^{-\lambda x} =: C_1 e^{-\lambda x},$$

$$\frac{1}{2} v^2 - \gamma = C_1 e^{-\lambda x} \quad \rightarrow \quad v^2 = 2(\gamma + C_1 e^{-\lambda x}).$$

Weil die Anfangsbedingung $v(x=0) = 0$ erfüllt werden muss, ist $C_1 = -\gamma$ zu setzen, so dass schließlich

$$v(x) = \sqrt{2\gamma} \sqrt{1 - e^{-\lambda x}}$$

wird.

Ist der fallende Körper ein Ball der Masse $m = 0,6 \text{ kg}$ mit dem Durchmesser $d = 0,4 \text{ m}$ und dem Widerstandsbeiwert $c_W = 0,6$, so ist zu rechnen mit

$$A_S = \frac{\pi}{4} d^2 = 0,1257 \text{ m}^2,$$

$$\lambda = \frac{c_W \rho_{\text{Luft}} A_S}{m} = \frac{0,6 \cdot 1,22 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0,1257 \text{ m}^2}{0,6 \text{ kg}} = 0,153 \text{ m}^{-1},$$

$$\sqrt{2\gamma} = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \text{ ms}^{-2}}{0,153 \text{ m}^{-1}}} = 11,31 \text{ ms}^{-1}.$$

$\sqrt{2\gamma}$ ist die Grenzggeschwindigkeit für $x \rightarrow \infty$. Wenn $\lambda x = 5$ ist, also $x = 32,7 \text{ m}$, wird $v = 0,997 \sqrt{2\gamma} \approx$ Grenzggeschwindigkeit.

Nun soll die oben hergeleitete Differentialgleichung für die Fallbewegung

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\lambda}{2} v^2 = g \left(1 - \frac{1}{2\gamma} v^2 \right)$$

mit der Zeit t als unabhängige Variable gelöst werden.

Mit der Substitution

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} v(t)$$

entsteht zunächst die Differentialgleichung

$$\frac{\sqrt{2\gamma}}{g} \frac{dV}{dt} = 1 - V^2$$

und mit der neuen Zeitskala

$$\tau = \frac{g}{\sqrt{2\gamma}} t \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dV}{d\tau} \frac{g}{\sqrt{2\gamma}}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{dV}{d\tau} = 1 - V^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1 - V^2} \frac{dV}{d\tau} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{d \operatorname{ar} \tanh V}{dV} \frac{dV}{d\tau} = 1,$$

also

$$\frac{d \operatorname{ar} \tanh V}{d\tau} = 1.$$

Die Lösungsfunktion lautet

$$\operatorname{ar} \tanh V = \tau + C$$

und liefert

$$V(\tau) = \tanh(\tau + C).$$

Die Anfangsbedingung $v(t=0) = 0 \rightarrow V(\tau=0) = 0$ wird erfüllt, wenn $C = 0$ ist.

Somit lautet die Lösung der Differentialgleichung für $v(t)$

$$V(\tau) = \tanh \tau, \quad \rightarrow \quad v(t) = \sqrt{2\gamma} \tanh(\alpha t), \quad \alpha = \frac{g}{\sqrt{2\gamma}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2}}.$$

Aus der Formel für die Geschwindigkeit

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

entsteht die Differentialgleichung für $x(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{2\gamma} \tanh(\alpha t) = \sqrt{2\gamma} \frac{\sinh(\alpha t)}{\cosh(\alpha t)} = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\alpha} \frac{d \ln(\cosh(\alpha t))}{dt},$$

deren allgemeine Lösung

$$x(t) = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\alpha} \ln(\cosh(\alpha t)) + C$$

der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ anzupassen ist. Weil

$$\ln(\cosh(0)) = \ln(1) = 0$$

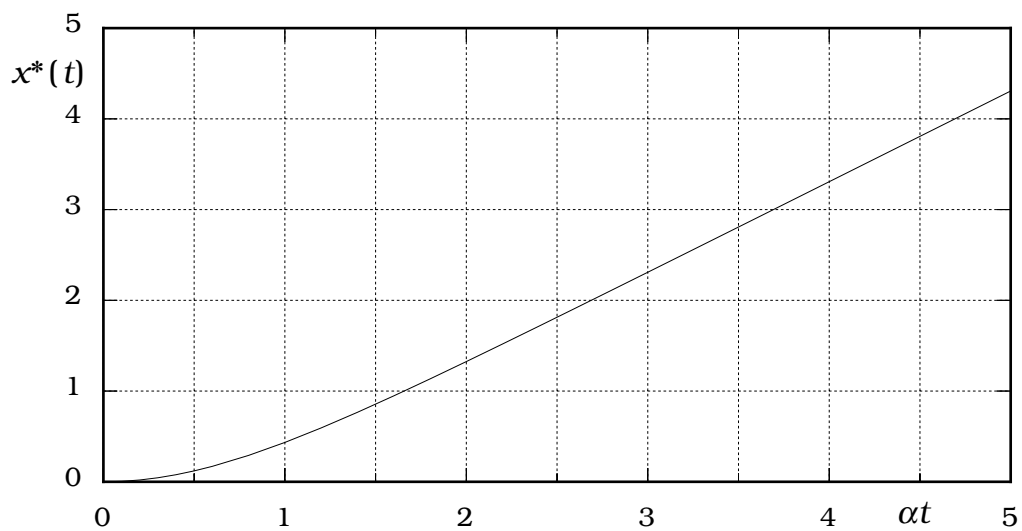
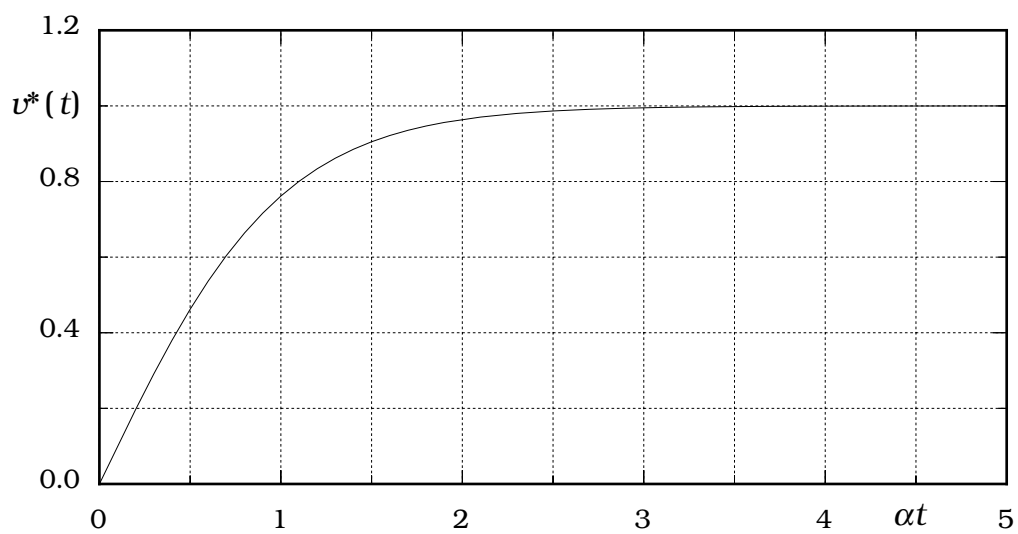
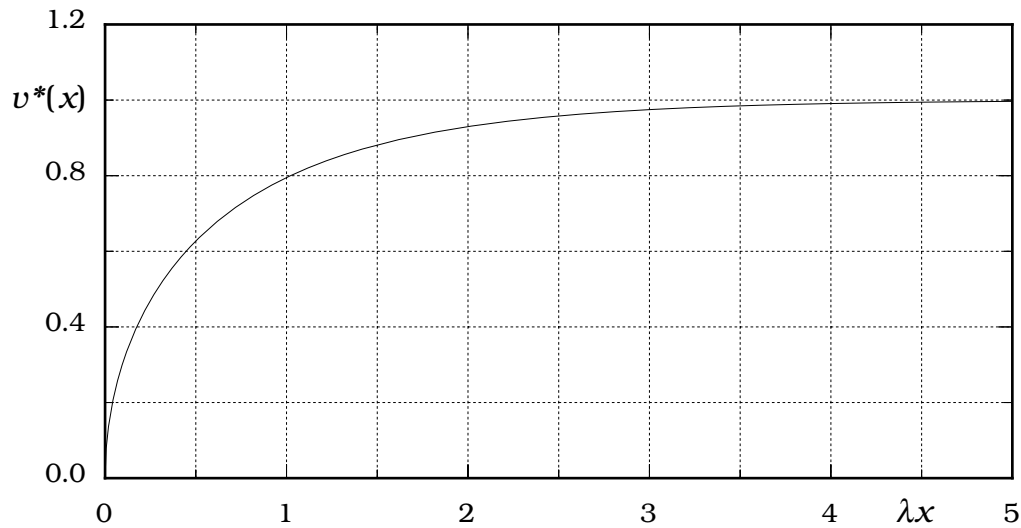
ist, muss $C = 0$ sein und

$$x(t) = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\alpha} \ln(\cosh(\alpha t)) = \frac{2}{\lambda} \ln(\cosh(\alpha t)).$$

Die Ergebnisse

$$v^*(x) := \frac{v(x)}{\sqrt{2\gamma}} = \sqrt{1 - e^{-\lambda x}}, \quad v^*(t) := \frac{v(t)}{\sqrt{2\gamma}} = \tanh(\alpha t), \quad x^*(t) = \frac{\alpha x(t)}{\sqrt{2\gamma}} = \ln(\cosh(\alpha t))$$

sind in den folgenden Abbildungen veranschaulicht:



5.5 Reihenentwicklungen

Jede in der Umgebung von x_0 stetige und differenzierbare Funktion $f(x)$ lässt sich in dieser Umgebung in eine **Potenzreihe** entwickeln:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Daraus folgt

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + 5 \cdot 4a_5(x - x_0)^3 + \dots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5(x - x_0)^2 + 6 \cdot 5 \cdot 4a_6(x - x_0)^3 + \dots$$

und

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0, \\ f'(x_0) &= a_1, \\ f''(x_0) &= 2 \cdot a_2 = 2!a_2, \\ f'''(x_0) &= 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 3!a_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

Wir können deshalb schreiben:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

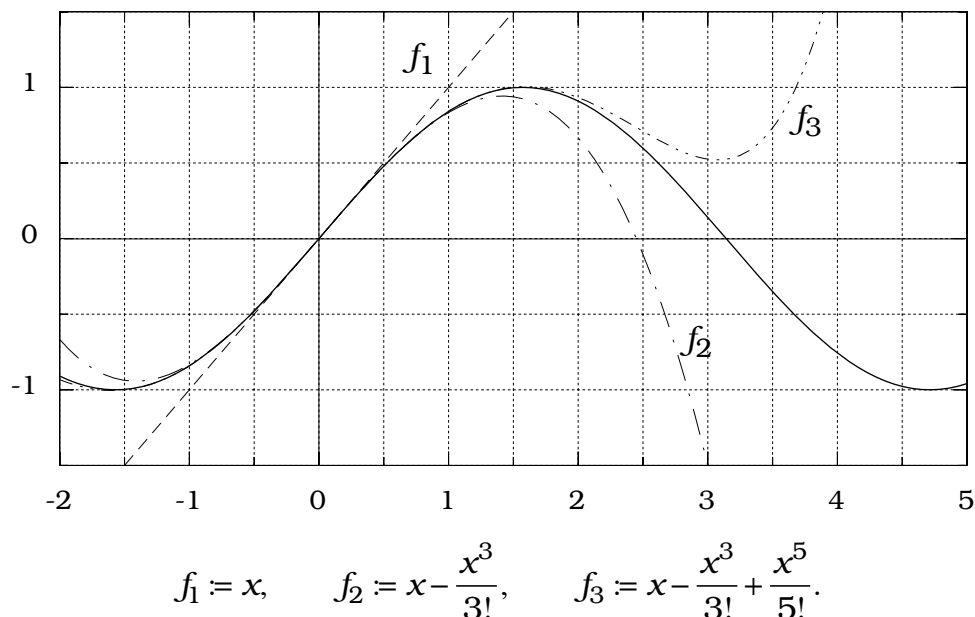
Diese für die Anwendung besonders interessante Darstellung der Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 nennt man **TAYLORREIHE DER FUNKTION $f(x)$** in x_0 . Mit endlich vielen Summanden erhält man mitunter sehr nützliche Näherungsformeln für $f(x)$ in der Umgebung(!) von x_0 .

▼ Beispiel 5.5.1

Wenn $f(x) = \sin x$ ist, wird für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f'(0) &= \cos(0) = 1, \\ f''(0) &= -\sin(0) = 0, \\ f'''(0) &= -\cos(0) = -1, \\ &\dots \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

Wir erhalten also die schon im Rahmen der elementaren Funktionen angegebene Reihendarstellung der Funktion $\sin x$.



Die Abbildung zeigt, in welcher Güte die unterschiedlich abgebrochenen TAYLORreihen die Funktion $y = \sin x$ approximieren.



▼ Beispiel 5.5.2

Die Funktion

$$f(x) = \sqrt{1-x}, \quad 0 \leq x < 1$$

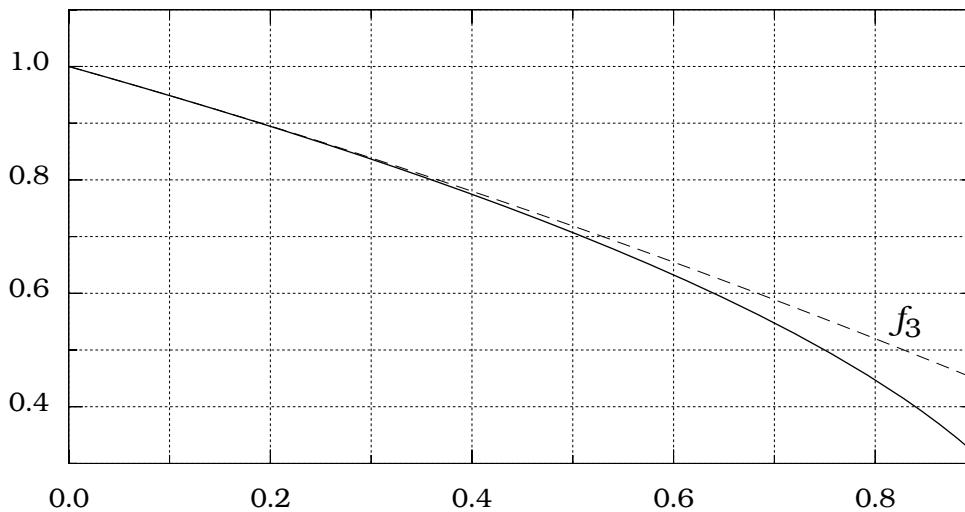
besitzt die Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-3/2}.$$

Die nach dem dritten Glied abgebrochene TAYLORreihe der Funktion $f(x)$ um $x=0$ lautet

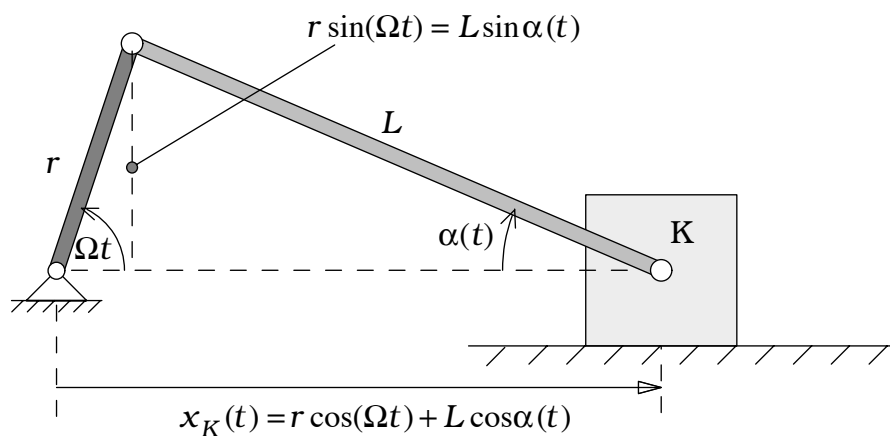
$$f_3(x) := f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2.$$

$f_3(x)$ ist für $x \ll 1$ eine recht gute Näherung für $f(x)$, wie die folgende Abbildung zeigt.



▼ Beispiel 5.5.3

Die Kurbel (Radius r) eines Schubkurbelgetriebes dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und zwingt über die Pleuelstange (Länge L) einen Kolben auf horizontaler Führungsschiene zu einer Horizontalbewegung $x_K(t)$. Zum Zeitpunkt t hat sich die Kurbel um den Winkel Ωt aus der horizontalen Lage nach oben gedreht.



Der Systemskizze entnehmen wir

$$x_K(t) = L\{\lambda \cos(\Omega t) + \cos \alpha(t)\}, \quad \lambda := \frac{r}{L};$$

$$\cos \alpha(t) = \sqrt{1 - \{\sin \alpha(t)\}^2} = \sqrt{1 - \{\lambda \sin(\Omega t)\}^2},$$

$$x_K(t) = L(\lambda \cos(\Omega t) + \sqrt{1 - \{\lambda \sin(\Omega t)\}^2}).$$

Wenn $\lambda^2 \ll 1$ ist, die Länge der Kurbel also viel kleiner als die Länge der Pleuelstange, können wir näherungsweise den Quadratwurzelterm nach dem vorhergehenden Beispiel ersetzen durch

$$\sqrt{1 - \{\lambda \sin(\Omega t)\}^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \{\lambda \sin(\Omega t)\}^2 = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2(\Omega t).$$

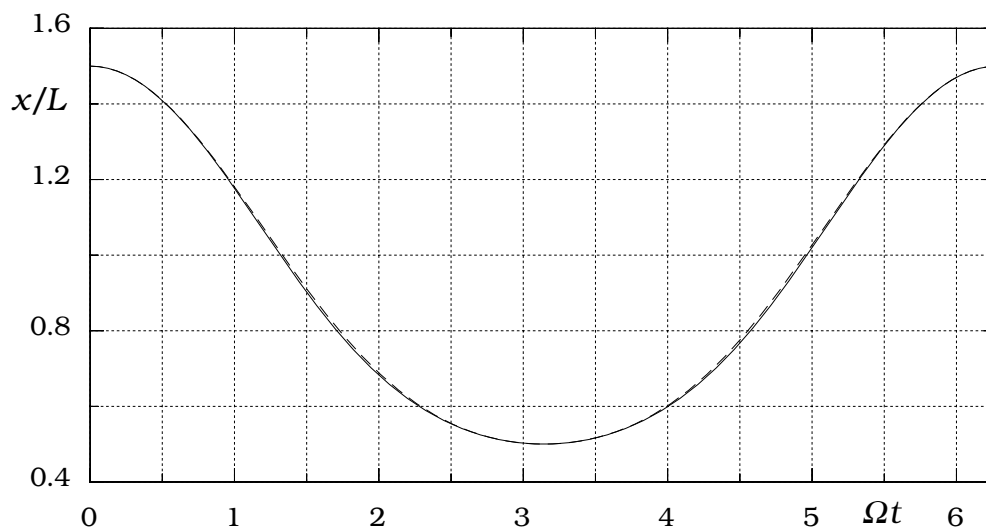
Mit

$$\sin^2(\Omega t) = \frac{1}{2} \{1 - \cos(2\Omega t)\}$$

wird

$$x_K(t) \approx L \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \lambda \cos(\Omega t) + \frac{\lambda^2}{4} \cos(2\Omega t) \right\}.$$

Diese Näherungsformel für das Bewegungsgesetz $x_K(t)$ ist rechentechnisch einfacher zu handhaben als die exakte Formel, und deshalb wird sie in der Praxis häufig verwendet. In der folgenden Abbildung sind für $\lambda = 0.5$ die exakte Funktion und die Näherungsfunktion (gestrichelt) dargestellt.



Für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens erhalten wir mit dem exakten Bewegungsgesetz die relativ komplizierten Formeln

$$\dot{x}_K = L\Omega \left\{ -\lambda \sin(\Omega t) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\sin(2\Omega t)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\Omega t)}} \right\},$$

$$\ddot{x}_K = L\Omega^2 \left\{ -\lambda \cos(\Omega t) - \lambda^2 \frac{\cos(2\Omega t)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\Omega t)}} - \frac{\lambda^4}{4} \frac{\sin^2(2\Omega t)}{\left(\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\Omega t)}\right)^3} \right\}.$$

Wenn wir die Näherungsfunktion für $x_K(t)$ verwenden, bekommt man mit wesentlich geringerem Rechenaufwand

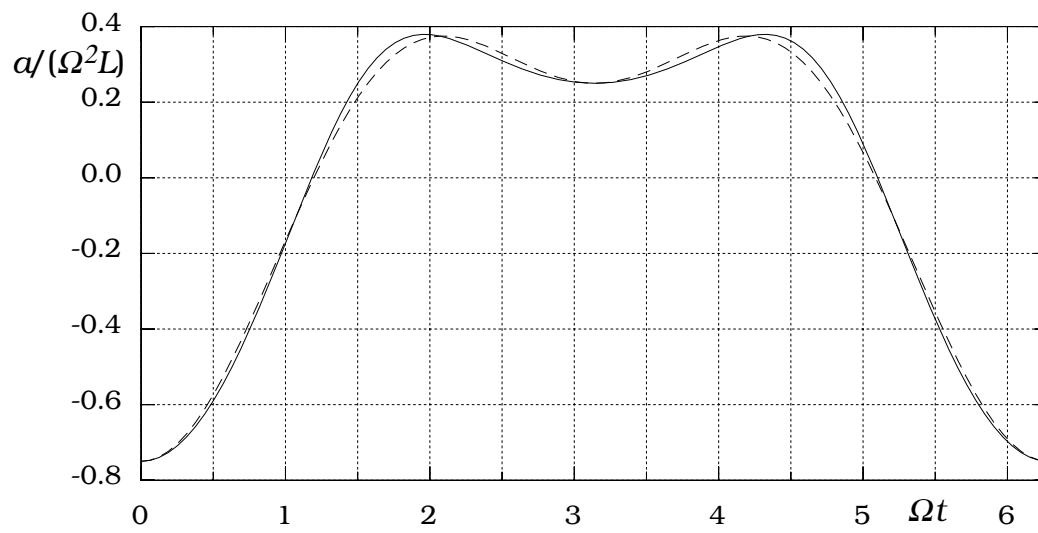
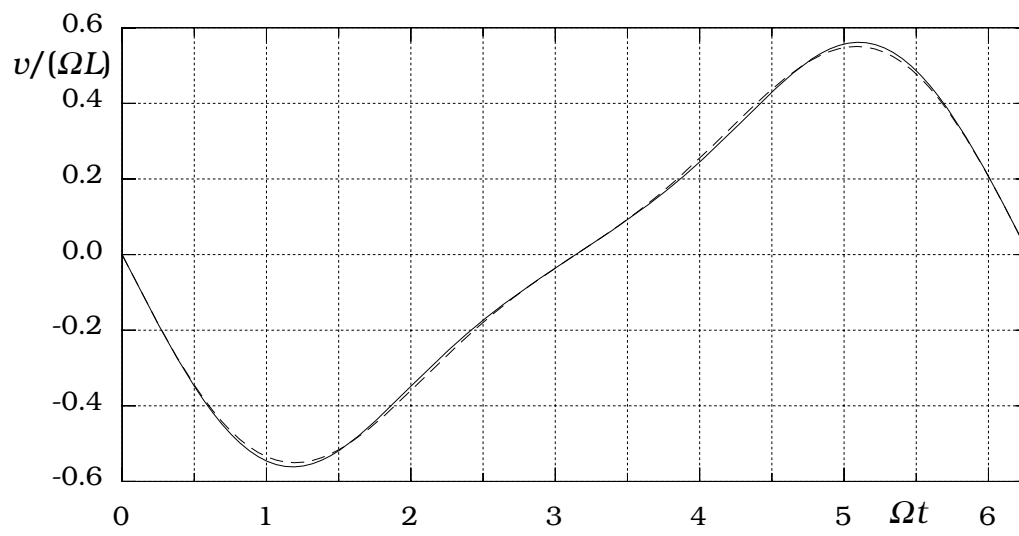
$$\dot{x}_K(t) \approx L\Omega \left\{ -\lambda \sin(\Omega t) - \frac{\lambda^2}{2} \sin(2\Omega t) \right\},$$

$$\ddot{x}_K(t) \approx L\Omega^2 \left\{ -\lambda \cos(\Omega t) - \lambda^2 \cos(2\Omega t) \right\}.$$

In den folgenden Abbildungen kann man die Abweichungen für $\lambda = 0.5$ erkennen (Näherungen gestrichelt). Dargestellt sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens in dimensionsloser Form

$$\frac{v}{\Omega L} = \frac{\dot{x}_K}{\Omega L} \quad \text{als Funktion von } (\Omega t)$$

$$\frac{a}{\Omega^2 L} = \frac{\ddot{x}_K}{\Omega^2 L} \quad \text{als Funktion von } (\Omega t)$$



▼ Beispiel 5.5.4

Die Funktion $f(x) = cx^3$ soll in der Umgebung von $x = a$ durch ein Polynom 2. Grades angenähert werden.

Die nach dem dritten Glied abgebrochene TAYLORreihe

$$\tilde{f}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2$$

liefert mit

$$f(x) = cx^3, \quad f'(x) = 3cx^2, \quad f''(x) = 6cx,$$

also

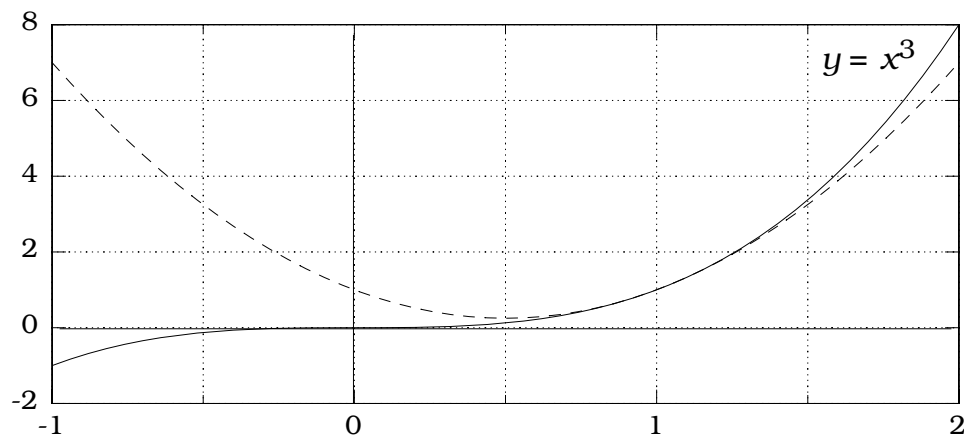
$$f(a) = ca^3, \quad f'(a) = 3ca^2, \quad f''(a) = 6ca,$$

die Funktion

$$\tilde{f}(x) = ca^3 + 3ca^2(x-a) + 3ca(x-a)^2,$$

$$\tilde{f}(x) = ca^3 \left\{ 1 - 3\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} \right\}.$$

Für $(c = a = 1)$ ergibt sich die graphische Darstellung, aus der man die Güte der Approximation erkennen kann.



▼ Beispiel 5.5.5

Die Funktion $f(x)$ kann an der Stelle $f(x + \Delta x)$ geschrieben werden

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots$$

Wenn Δx beliebig klein ist, ersetzen wir Δx durch dx , vernachlässigen alle nicht-linearen Terme in Δx und schreiben näherungsweise

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x) dx.$$

Die Formel

$$f(x + dx) - f(x) = f'(x) dx$$

nennen wir **Zuwachsformel**; sie wird insbesondere bei der Beschreibung von physikalischen Zustandsgrößen in infinitesimal benachbarten Punkten ständig gebraucht. Mit ihrer Hilfe entstehen die Differentialgleichungen, um deren Lösungen es schließlich geht.



▼ Beispiel 5.5.6

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

hat die folgenden Ableitungen:

$$f'(x) = -1 \cdot (1+x)^{-2},$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot (1+x)^{-3},$$

$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1+x)^{-4},$$

...

Also lautet die TAYLORreihe an der Stelle $x_0 = 0$

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots$$

Sie konvergiert für $|x| < 1$. Die jeweilige Qualität der Näherungen bei unterschiedlich abgebrochenen Reihendarstellungen

	x	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$f_1(x) := 1 - x,$	-0,2	1,25	1,2	1,24	0,248
$f_2(x) := 1 - x + x^2,$	-0,1	1,1111	1,1	1,11	1,111
$f_3(x) := 1 - x + x^2 - x^3,$	0,1	0,9091	0,9	0,91	0,909
	0,2	0,8333	0,8	0,84	0,832

ist der Tabelle für einige x -Werte aus dem Konvergenzbereich zu entnehmen.



6

Integralrechnung

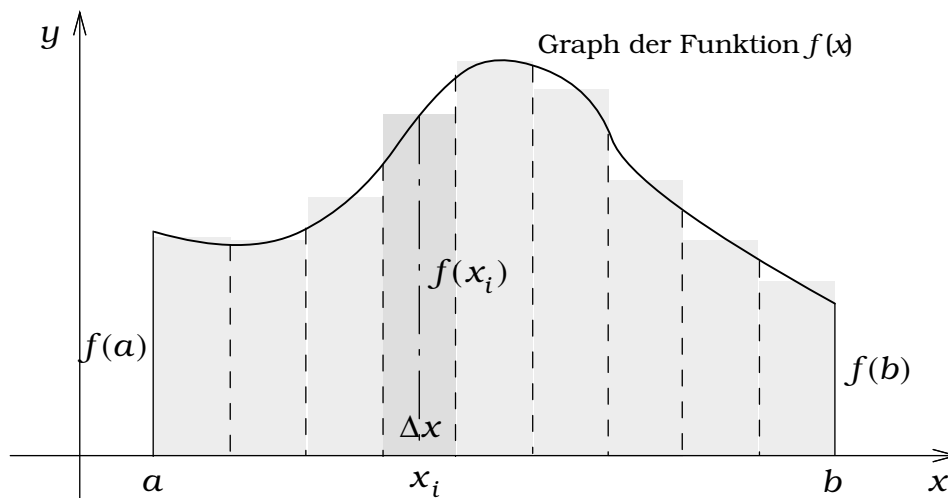
Der Flächeninhalt I zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse über dem Intervall $a \leq x \leq b$ lässt sich näherungsweise berechnen, wenn wir die Strecke $(b-a)$ in n Segmente der Länge

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

aufteilen, mit den Funktionswerten $f(x_i)$ in den Mittelpunkten der Segmente

$$x_i = a + (i-1)\Delta x + \frac{\Delta x}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

die Inhalte $f(x_i)\Delta x$ der Rechteckstreifen über den Segmenten berechnen und diese addieren.



Mit steigender Segmentzahl n , also Verkleinerung der Segmente Δx , wird der Flächeninhalt immer besser angenähert, und wir schreiben:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx.$$

Flächen oberhalb der x -Achse sind positiv, unterhalb der x -Achse negativ.

Das \int -Symbol ist ein Hinweis auf diese **S**ummation von Flächenstreifen. I ist das **bestimmte Integral** der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$; a ist die untere und b die obere **I**ntegrationsgrenze, $f(x)$ der **I**ntegrand.

Wir nennen nun die obere Grenze $b = \tilde{x}$ und schreiben

$$I(\tilde{x}) = \int_a^{\tilde{x}} f(x) dx.$$

Wird die obere Grenze \tilde{x} um den infinitesimalen Betrag Δx nach rechts verschoben, so erhalten wir

$$I(\tilde{x} + \Delta x) = \int_a^{\tilde{x}} f(x) dx + f\left(\tilde{x} + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x,$$

$$I(\tilde{x} + \Delta x) - I(\tilde{x}) = f\left(\tilde{x} + \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta x,$$

$$\frac{dI(\tilde{x})}{d\tilde{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{I(\tilde{x} + \Delta x) - I(\tilde{x})}{\Delta x} = f(\tilde{x}).$$

Wenn wir das Integral $I(\tilde{x})$ als Funktion der oberen Grenze \tilde{x} interpretieren, ist die Ableitung des Integrals nach der oberen Grenze gleich dem Wert $f(\tilde{x})$ des Integranden. Somit ist $I(\tilde{x})$ definitionsgemäß die Stammfunktion $F(\tilde{x})$ des Integranden $f(\tilde{x})$.

Damit $I(a) = 0$ wird, müssen wir schreiben:

$$\int_a^{\tilde{x}} f(x) dx = F(\tilde{x}) - F(a).$$

Die Stammfunktion $F(x)$ zur Funktion $f(x)$, die durch die Eigenschaft

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

definiert ist, schreibt man als **unbestimmtes Integral** von $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x) dx + C \quad \leftrightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Die Integration ist also die Umkehrung der Differentiation:

$$\int h'(x) dx = h(x) + C.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\int f(x) f'(x) dx = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} \{f(x)\}^2 dx = \frac{1}{2} \{f(x)\}^2 + C,$$

und

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{d}{dx} \ln(f(x)) dx = \ln(f(x)) + C.$$

Mit der Produktregel

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f'(x)g(x) = \{f(x)g(x)\}' - f(x)g'(x),$$

erhalten wir

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx + C.$$

Diese Formel der **partiellen Integration** ist mitunter hilfreich bei der Lösung von Integrationsaufgaben.

Das Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

bekommt bei einer **Variablentransformation** $x \rightarrow t$, wobei

$$x = h(t), \quad x_1 = h(t_1), \quad x_2 = h(t_2)$$

gelten soll, wegen

$$dx = h'(t) dt$$

die Darstellung

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(h(t)) h'(t) dt.$$

Eine solche Variablentransformation ist sinnvoll, wenn sich das Integral mit dem neuen Integranden leichter berechnen lässt.

▼ Beispiel 6.1

Über dem Intervall $a \leq x \leq b$ soll der Inhalt I der Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x^2}{L}$ berechnet werden.

$$I = \int_a^b \frac{x^2}{L} dx = \left(\frac{x^3}{3L} + C \right) \Big|_{x=b} - \left(\frac{x^3}{3L} + C \right) \Big|_{x=a} = \frac{1}{3L} (b^3 - a^3).$$

Aus dem Ergebnis kann man erkennen, dass die Konstante C in der Stammfunktion bei der Berechnung des bestimmten Integrals weggelassen werden kann; sie hebt sich bei der Differenzbildung der Funktionswerte an den Integrationsgrenzen heraus.



▼ Beispiel 6.2

Wenn der Integrand als Ableitung einer Stammfunktion geschrieben werden kann, ist das Ergebnis der Integration die Stammfunktion:

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dx} \{\sin x\}^2 dx = \frac{1}{2} \{\sin x\}^2 + C.$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d}{dx} \ln(\cos x) dx = -\ln(\cos x) + C.$$

$$\int \frac{b}{a+bx} dx = \int \frac{d}{dx} \ln(a+bx) dx = \ln(a+bx) + C.$$



▼ Beispiel 6.3

Aus den Beziehungen

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x),$$

ergibt sich

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \right\},$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) \right\},$$

und daraus

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C,$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2x) \right) + C.$$



▼ Beispiel 6.4

Um das bestimmte Integral

$$I(\tilde{x}) = \int_0^{\tilde{x}} x \cos x \, dx$$

zu berechnen, wenden wir die Methode der partiellen Integration an, setzen

$$g(x) = x, \quad f'(x) = \cos x, \quad \rightarrow \quad g'(x) = 1, \quad f(x) = \sin x$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{x}} x \cos x \, dx &= x \sin x \Big|_0^{\tilde{x}} - \int_0^{\tilde{x}} \sin x \, dx, \\ \int_0^{\tilde{x}} x \cos x \, dx &= \tilde{x} \sin \tilde{x} + \cos \tilde{x} - 1. \end{aligned}$$



▼ Beispiel 6.5

Für die Berechnung des Integrals

$$I_n := \int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} \, dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0,$$

setzen wir

$$g(x) = x^n, \quad f'(x) = e^{-\lambda x}, \quad \rightarrow \quad g'(x) = nx^{n-1}, \quad f(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}.$$

Damit wird

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\lambda x} \, dx = -\frac{1}{\lambda} x^n e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{\lambda} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} \, dx,$$

also

$$I_n = \frac{n}{\lambda} I_{n-1}.$$

Aus dieser **Rekursionsformel** folgt mit

$$\begin{aligned} I_0 &:= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}, \\ I_1 &= \frac{1}{\lambda^2}, \quad I_2 = \frac{2 \cdot 1}{\lambda^3}, \quad I_3 = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{\lambda^4}, \quad \dots, \quad I_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}. \end{aligned}$$

Es gilt insbesondere

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx.$$



▼ Beispiel 6.6

Das bestimmte Integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (a + bx)^n dx$$

wird mit der Substitution

$$t = a + bx \quad \rightarrow \quad dt = b dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{dt}{b}$$

und den neuen Integrationsgrenzen

$$t_1 = a + bx_1, \quad t_2 = a + bx_2$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (a + bx)^n dx = \frac{1}{b} \int_{t_1}^{t_2} t^n dt = \frac{1}{(n+1)b} (t_2^{(n+1)} - t_1^{(n+1)}).$$



▼ Beispiel 6.7

Das bestimmte Integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx$$

erhält mit

$$\frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos(2 \frac{x}{2})} = \frac{1}{1 + \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2 \cos^2(\frac{x}{2})}$$

und

$$t = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{dx}{2} \quad \rightarrow \quad dx = 2 dt$$

die Darstellung

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t \Big|_0^{\pi/4} = 1.$$

Für das unbestimmte Integral gilt dann

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$



▼ Beispiel 6.8

Das bestimmte Integral

$$I = \int_0^T \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt,$$

wobei k und m ganze Zahlen sind, lautet mit

$$\tau = \frac{2\pi}{T} t \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{2\pi}{T} dt$$

$$I = \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(k\tau) \cos(m\tau) d\tau.$$

Weil

$$\sin(k\tau) \cos(m\tau) = \frac{1}{2} \{ \sin((k-m)\tau) + \sin((k+m)\tau) \}$$

ist, wird

$$I = \frac{T}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((k-m)\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((k+m)\tau) d\tau \right\}.$$

Mit

$$\int_0^{2\pi} \sin(n\tau) d\tau = -\frac{1}{n} \cos(n\tau) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

für $n \neq 0$ und $\sin(0) = 0$ wird schließlich für beliebige ganze Zahlen k und m

$$I = \int_0^T \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt = 0.$$

Entsprechend erhalten wir mit den trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned} \sin(k\tau) \sin(m\tau) &= \frac{1}{2} \{ \cos((k-m)\tau) - \cos((k+m)\tau) \}, \\ \cos(k\tau) \cos(m\tau) &= \frac{1}{2} \{ \cos((k-m)\tau) + \cos((k+m)\tau) \}, \end{aligned}$$

die folgenden Ergebnisse:

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^T \sin\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \sin\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt \\ &\int_0^T \cos\left(2\pi k \frac{t}{T}\right) \cos\left(2\pi m \frac{t}{T}\right) dt \end{aligned} \right\} = \begin{cases} \frac{T}{2} & \text{wenn } k=m \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } k \neq m \text{ ist.} \end{cases}$$

Diese Formeln werden bei der FOURIERreihendarstellung periodischer Funktionen gebraucht.



▼ Beispiel 6.9

Um den Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Fläche unter dem Ellipsenbogen im 1. Quadranten:

$$\frac{A}{4} = \int_0^a b \sqrt{1 - (x/a)^2} dx.$$

Mit der Variablentransformation

$$\frac{x}{a} = \sin \varphi, \quad dx = a \cos \varphi d\varphi,$$

$$x=0 \rightarrow \varphi=0, \quad x=a \rightarrow \varphi=\pi/2,$$

erhalten wir

$$\frac{A}{4} = ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

und mit

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left\{ \varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right\} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

wird schließlich

$$A = \pi ab.$$



▼ Beispiel 6.10

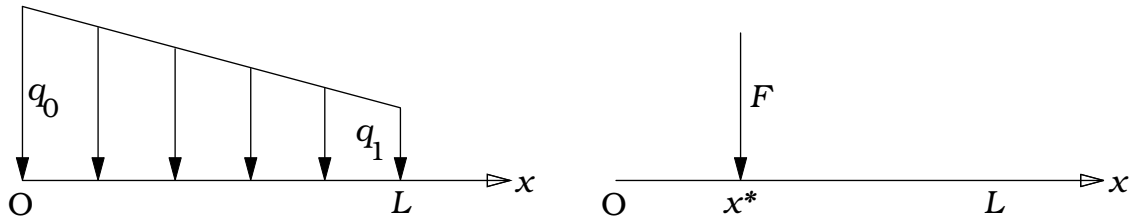
Einer Streckenlast (Linienkraftdichte in N/m)

$$q(x) = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{L} x$$

über dem Intervall $0 \leq x \leq L$ der x -Achse ist eine Einzelkraft F im Punkt x^* , statisch äquivalent, wenn

$$F = \int_0^L q(x) dx, \quad x^* = \frac{1}{F} \int_0^L x q(x) dx$$

ist.



$$F = \int_0^L \left\{ q_0 + \frac{q_1 - q_0}{L} x \right\} dx = \left\{ q_0 x + \frac{q_1 - q_0}{L} \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_0^L = \frac{q_0 + q_1}{2} L$$

$$\int_0^L x q(x) dx = \int_0^L \left\{ q_0 x + \frac{q_1 - q_0}{L} x^2 \right\} dx = \left\{ q_0 \frac{x^2}{2} + \frac{q_1 - q_0}{L} \frac{x^3}{3} \right\} \Big|_0^L = \frac{q_0 + 2q_1}{6} L^2,$$

$$x^* = \frac{q_0 + 2q_1}{3(q_0 + q_1)} L.$$



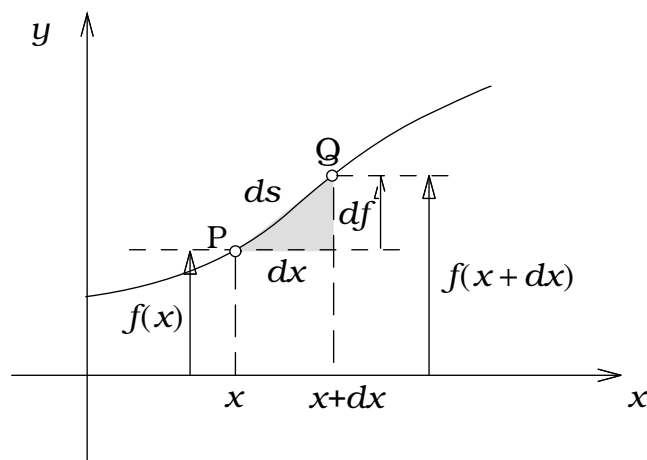
▼ Beispiel 6.11

Eine Kurve in der xy -Ebene sei durch die Funktion $y = f(x)$ beschrieben. Berechnet werden soll die Bogenlänge s der Kurve über dem Intervall $0 \leq x \leq b$.

In zwei infinitesimal(!) benachbarten Kurvenpunkten P und Q unterscheiden sich die Funktionswerte nach der Zuwachsformel um

$$df = f(x + dx) - f(x) = f'(x) dx.$$

Das Bogenelement ds zwischen P und Q bildet näherungsweise die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten dx und df .



Aus dem Satz von PYTHAGORAS folgt dann

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (df)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Summation (= Integration) der Bogenelemente ergibt schließlich die gesuchte Bogenlänge

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ist beispielsweise

$$f(x) = \frac{x^2}{2L}, \quad f'(x) = \frac{x}{L},$$

so wird

$$s = \int_0^b \sqrt{1 + (x/L)^2} dx.$$

Mit der Variablentransformation

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \rightarrow \quad dx = L d\xi$$

entsteht zunächst das Integral

$$s = L \int_0^{b/L} \sqrt{1 + \xi^2} d\xi,$$

bei dessen Lösung die Hyperbelfunktionen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1, & \quad \cosh(2u) = \cosh^2 u + \sinh^2 u, & \quad \cosh^2 u = \frac{1}{2} \{1 + \cosh(2u)\}, \\ \sinh(2u) = 2 \sinh u \cosh u, & & \end{aligned}$$

weiterhelfen, indem wir einführen

$$\xi = \sinh u, \quad d\xi = \frac{d \sinh u}{du} du = \cosh u du, \quad \sqrt{1 + \xi^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 u} = \cosh u,$$

und dann

$$\int \sqrt{1 + \xi^2} d\xi = \int \cosh^2 u du = \frac{1}{2} \int \{1 + \cosh(2u)\} du = \frac{1}{2} \left\{ u + \frac{1}{2} \sinh(2u) \right\} = \frac{1}{2} \{ u + \sinh u \cosh u \},$$

$$\int \sqrt{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \{ \operatorname{arsinh} \xi + \xi \sqrt{1 + \xi^2} \}$$

erhalten.

Für die Bogenlänge auf der Parabel kann also geschrieben werden:

$$s = L \int_0^{\beta} \sqrt{1 + \xi^2} d\xi = \frac{L}{2} \{ \operatorname{arsinh} \xi + \xi \sqrt{1 + \xi^2} \} \Big|_0^{\beta}, \quad \beta := \frac{b}{L},$$

$$s = \frac{L}{2} \{ \operatorname{arsinh} \beta + \beta \sqrt{1 + \beta^2} \}.$$

Laut Beispiel 3.4.4 gilt

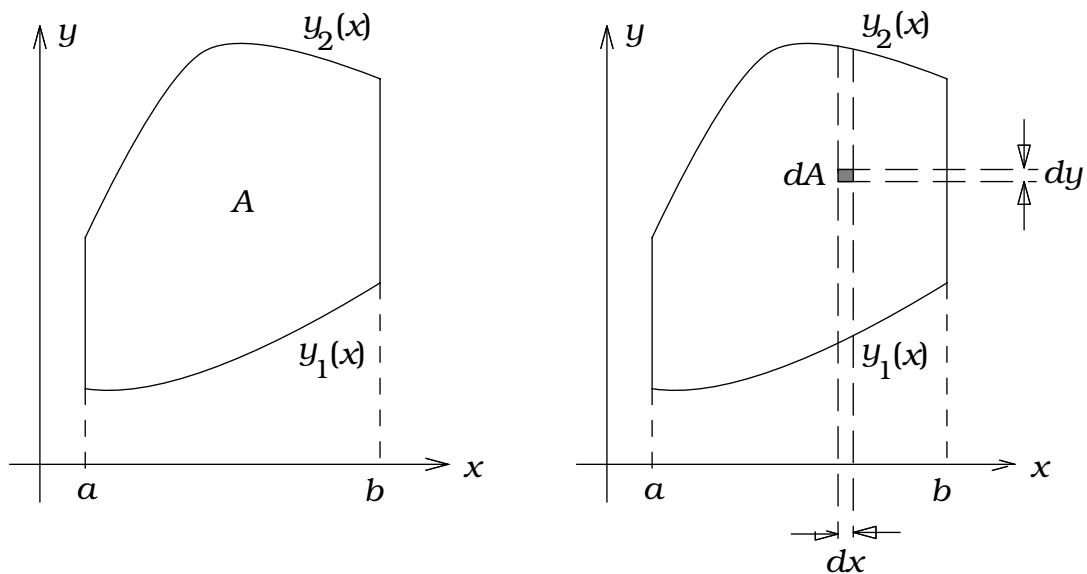
$$\operatorname{arsinh} \beta = \ln(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}),$$

also auch

$$s = \frac{L}{2} \{ \ln(\beta + \sqrt{1 + \beta^2}) + \beta \sqrt{1 + \beta^2} \}.$$



▼ Beispiel 6.12



Die Fläche A zwischen den Randkurven $y_1(x)$ und $y_2(x)$ über dem Intervall $a \leq x \leq b$ können wir als Differenz zweier Integrale schreiben:

$$A = \int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx.$$

Diese Formel lässt sich auch so darstellen:

$$A = \int_{x=a}^{x=b} \{ y_2(x) - y_1(x) \} dx = \int_{x=a}^{x=b} \left\{ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dy \right\} dx.$$

Wir führen nun das Flächenelement

$$dA := dy dx$$

ein und schreiben den Flächeninhalt A als Summe von Flächenelementen, also formal als Flächenintegral

$$A = \int_A dA,$$

wobei natürlich

$$\int_A dA = \int_{x=a}^{x=b} \underbrace{\left\{ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dy \right\}}_{x=\text{const}} dx$$

bedeutet.

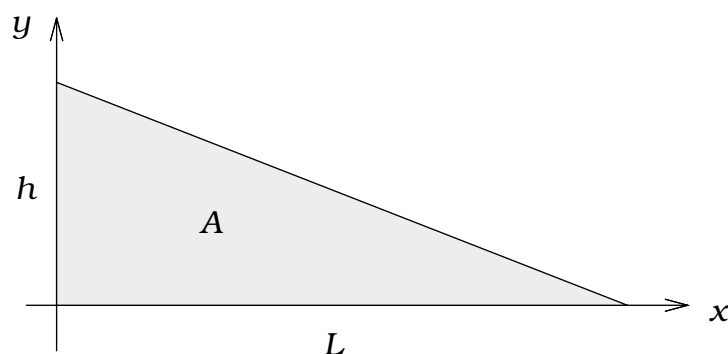
$$\left\{ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} dy \right\} dx = \{y_2(x) - y_1(x)\} dx$$

ist der Flächeninhalt des Flächenstreifens der infinitesimalen Breite dx an der Stelle x .

Bekommen nun die Flächenelemente dA in den Punkten mit den Koordinaten (x,y) die Gewichtungsfaktoren $f(x,y)$, so bedeutet

$$\int_A f(x,y) dA = \int_{x=a}^{x=b} \underbrace{\left\{ \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y) dy \right\}}_{x=\text{const}} dx.$$

Im inneren Integral wird also die Koordinate x wie eine Konstante behandelt und nur nach der Variablen y integriert. Dabei entsteht ein Integrand, der nur von x abhängt und im letzten Integrationsschritt über das Intervall $[a,b]$ zu integrieren ist.



Will man beispielsweise die Dreiecksfläche A , die über dem Intervall $0 \leq x \leq L$ von den Geraden

$$y_1(x) \equiv 0, \quad y_2(x) = h\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

begrenzt wird, sowie die Integrale

$$I_y = \int_A x dA, \quad I_x = \int_A y dA$$

berechnen, die man statische Momente 1. Ordnung der Fläche A bezüglich der Koordinatenachsen nennt, so wird

$$A = \int_0^L \left\{ \int_0^{h(1-x/L)} dy \right\} dx = \int_0^L h\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = \frac{hL}{2}.$$

$$I_y = \int_0^L \left\{ \int_0^{h(1-x/L)} x dy \right\} dx = \int_0^L xh\left(1 - \frac{x}{L}\right) dx = h \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3L} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} = \frac{hL^2}{6},$$

$$I_x = \int_0^L \left\{ \int_0^{h(1-x/L)} y dy \right\} dx = \int_0^L \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx = -\frac{h^2L}{6} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^3 \Big|_{x=0}^{x=L} = \frac{h^2L}{6}.$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes S einer Fläche A sind definiert durch

$$x_S := \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad y_S := \frac{1}{A} \int_A y dA.$$

Also gilt für die Dreiecksfläche:

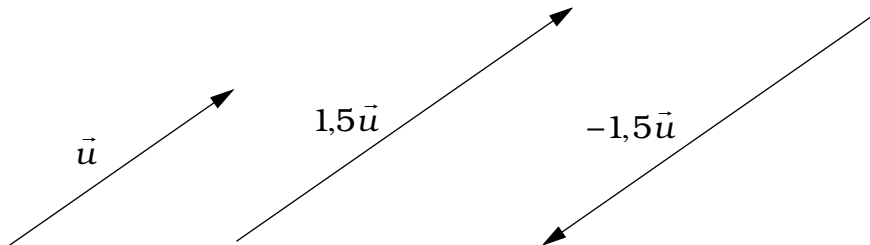
$$x_S := \frac{2I_y}{hL} = \frac{L}{3}, \quad y_S := \frac{2I_x}{hL} = \frac{h}{3}.$$



Vektoren im dreidimensionalen Raum

Ein Vektor lässt sich im dreidimensionalen Raum anschaulich durch einen Pfeil darstellen, der eine Länge und eine Richtung hat. Alle Pfeile mit gleicher Länge und Richtung repräsentieren den gleichen Vektor.

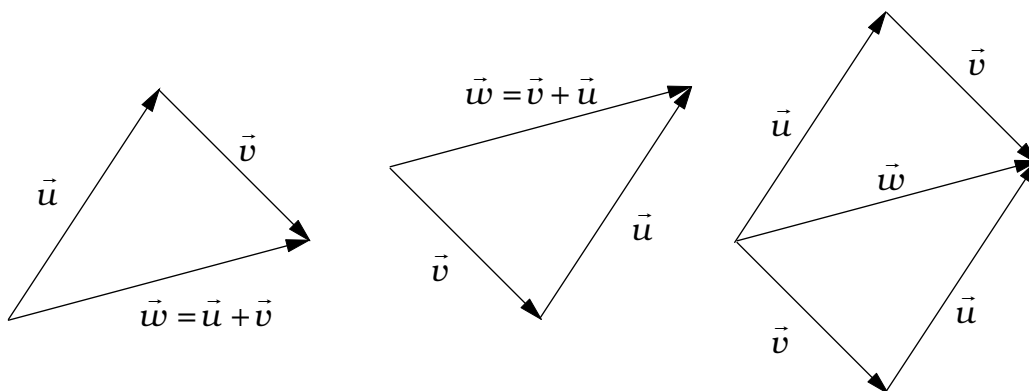
Die Multiplikation eines Vektors \vec{u} mit einer reellen Zahl $\lambda > 0$ ändert nur die Länge des Vektors um den Faktor λ ; ist $\lambda < 0$, so wird zusätzlich die Richtung umgekehrt.



Den Pfeil, der das Ergebnis der Addition von zwei Vektoren

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

darstellt, erhält man, wenn man den Anfangspunkt der aneinander gehängten Pfeile für die Vektoren \vec{u} und \vec{v} mit dem Endpunkt verbindet.



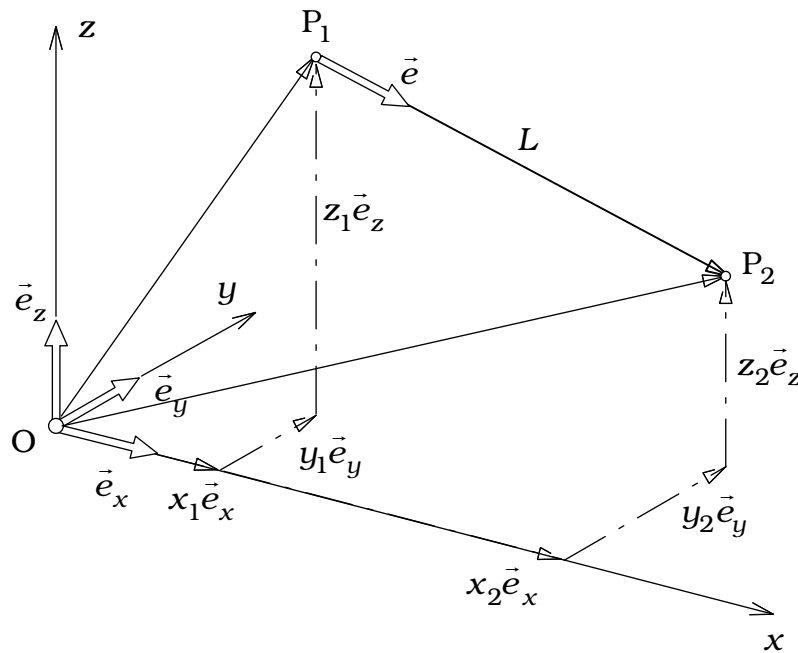
Parallelogrammkonstruktion

Eine auswertbare graphische Darstellung der Vektoraddition ist nur möglich, wenn alle Vektoren in einer Ebene liegen.

Vektoren \vec{e} , deren Länge durch die dimensionslose Zahl 1 beschrieben wird, nennen wir **Einheitsvektoren**; sie geben lediglich eine Richtung an. Dem **Betrag** $|\vec{u}|$ des Vektors \vec{u} entspricht die Länge des Pfeils. Ist \vec{e}_u der Einheitsvektor in Richtung des Vektors \vec{u} , so schreiben wir

$$\vec{u} = |\vec{u}| \vec{e}_u.$$

Für die Orientierung im dreidimensionalen Raum verwenden wir ein kartesisches Koordinatensystem mit den drei zueinander orthogonalen **Basisvektoren** \vec{e}_x, \vec{e}_y und \vec{e}_z . Die Basisvektoren seien „**rechtshändig**“ orientiert, d.h. ihre Richtungen sollen den Richtungen des Daumens ($\rightarrow x$), des Zeigefingers ($\rightarrow y$) und des Mittelfingers ($\rightarrow z$) der rechten Hand entsprechen, wenn man diese Finger zueinander senkrecht ausstreckt. Alle Basisvektoren sind Einheitsvektoren.



Die Raumpunkte P_1 und P_2 haben dann die Koordinaten

$$P_1:(x_1, y_1, z_1), \quad P_2:(x_2, y_2, z_2)$$

und die **Ortsvektoren**

$$\vec{OP}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z, \quad \vec{OP}_2 = x_2\vec{e}_x + y_2\vec{e}_y + z_2\vec{e}_z.$$

Wenn die zur Darstellung der Vektoren verwendete Basis vereinbart ist, genügt es, wenn man die Vektoren nur mit ihren Komponenten beschreibt. Das geschieht in der **Darstellung durch einspaltige Matrizen**

$$\vec{OP}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{OP}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Der Verbindungsvektor der beiden Punkte P_1 und P_2 ergibt sich aus der Vektorgleichung

$$\vec{OP}_2 = \vec{OP}_1 + \vec{P}_1P_2 \quad \rightarrow \quad \vec{P}_1P_2 = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1$$

$$\vec{P}_1P_2 = (x_2 - x_1)\vec{e}_x + (y_2 - y_1)\vec{e}_y + (z_2 - z_1)\vec{e}_z; \quad \vec{P}_1P_2 = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}.$$

Er hat den Betrag

$$\left| \vec{P}_1P_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =: L;$$

L ist der Abstand der Punkte P_1 und P_2 .

Der Vektor \vec{P}_1P_2 kann auch in der Form

$$\vec{P}_1P_2 = L\vec{e}$$

dargestellt werden. Dabei ist

$$\vec{e} := \frac{\vec{P}_1P_2}{L} = \frac{x_2 - x_1}{L}\vec{e}_x + \frac{y_2 - y_1}{L}\vec{e}_y + \frac{z_2 - z_1}{L}\vec{e}_z$$

der **Richtungsvektor** des Vektors \vec{P}_1P_2 ; \vec{e} ist ein Einheitsvektor, denn sein Betrag hat den Wert 1, was sich leicht nachprüfen lässt.

Sind β_x, β_y und β_z die Winkel, die der Vektor \vec{P}_1P_2 mit den positiven Koordinatenrichtungen bildet, so gilt

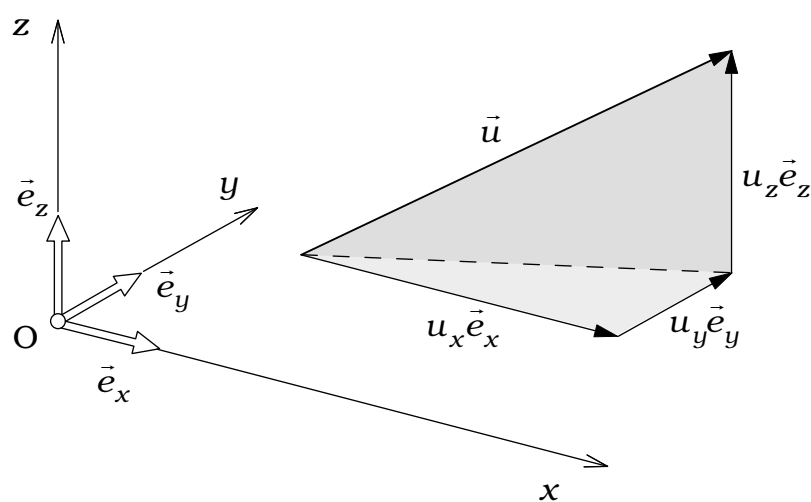
$$\frac{x_2 - x_1}{L} = \cos \beta_x, \quad \frac{y_2 - y_1}{L} = \cos \beta_y, \quad \frac{z_2 - z_1}{L} = \cos \beta_z,$$

und den Richtungsvektor \vec{e} können wir schreiben

$$\vec{e} = \cos \beta_x \vec{e}_x + \cos \beta_y \vec{e}_y + \cos \beta_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \cos \beta_x \\ \cos \beta_y \\ \cos \beta_z \end{bmatrix}.$$

Wir bezeichnen mit \vec{u} einen beliebigen Vektor (Kraftvektor, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor, Impulsvektor, ...) im dreidimensionalen Raum. In der kartesischen Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ erhält er die Darstellung

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}.$$



u_x, u_y und u_z sind die **Komponenten** des Vektors \vec{u} in der kartesischen Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

Dividiert man den Vektor durch seinen Betrag

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2},$$

so erhält man den Richtungsvektor von \vec{u}

$$\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{u_x}{|\vec{u}|} \vec{e}_x + \frac{u_y}{|\vec{u}|} \vec{e}_y + \frac{u_z}{|\vec{u}|} \vec{e}_z.$$

Die Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen sowie die Addition und Subtraktion von Vektoren geschieht nach folgenden Rechenregeln:

$$\lambda \vec{u} = \lambda u_x \vec{e}_x + \lambda u_y \vec{e}_y + \lambda u_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \lambda u_x \\ \lambda u_y \\ \lambda u_z \end{bmatrix},$$

$$\vec{u} \pm \vec{v} = (u_x \pm v_x) \vec{e}_x + (u_y \pm v_y) \vec{e}_y + (u_z \pm v_z) \vec{e}_z, \quad \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \pm v_x \\ u_y \pm v_y \\ u_z \pm v_z \end{bmatrix}.$$

Für die Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie und Physik sind zwei Produktoperationen mit Vektoren definiert: Das innere Produkt (Skalarprodukt) und das Kreuzprodukt (Vektorprodukt).

Als **inneres Produkt** von zwei Vektoren, das wir symbolisch durch einen Punkt zwischen den beiden Vektoren kennzeichnen, ist definiert:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\text{Winkel zwischen } \vec{u} \text{ und } \vec{v}).$$

($\vec{u} \cdot \vec{v}$ wird gelesen "u in v".)

Das Ergebnis des inneren Produktes zwischen zwei Vektoren ist eine skalare, also von der Wahl der benutzten Basis unabhängige Größe und wird deshalb auch **Skalarprodukt** genannt.

Wenn zwei Vektoren zueinander orthogonal sind, ist ihr inneres Produkt definitionsgemäß null, denn sie bilden miteinander den Winkel $\pi/2$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{u} \text{ orthogonal zu } \vec{v}.$$

Das innere Produkt ist kommutativ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$

und es gilt das Distributivgesetz:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Für die inneren Produkte mit den zueinander orthogonalen Basisvektoren gilt

$$\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a=b \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } a \neq b \text{ ist;} \end{cases} \quad a, b = x, y, z.$$

	\vec{e}_x	\vec{e}_y	\vec{e}_z
$\vec{e}_x \cdot$	1	0	0
$\vec{e}_y \cdot$	0	1	0
$\vec{e}_z \cdot$	0	0	1

Aus den Darstellungen der Vektoren \vec{u} und \vec{v}

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z,$$

folgt dann mit dem Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= u_x (v_x \vec{e}_x \cdot \vec{e}_x + v_y \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y + v_z \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z) + \\ &+ u_y (v_x \vec{e}_y \cdot \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y + v_z \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z) + \\ &+ u_z (v_x \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x + v_y \vec{e}_z \cdot \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z) \end{aligned}$$

die **Komponentendarstellung des inneren Produktes:**

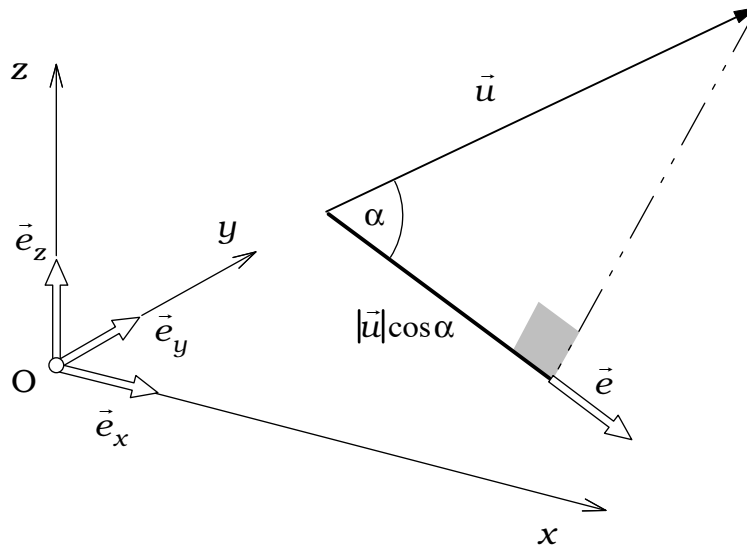
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Das innere Produkt des Vektors \vec{u} mit einem Richtungsvektor \vec{e}

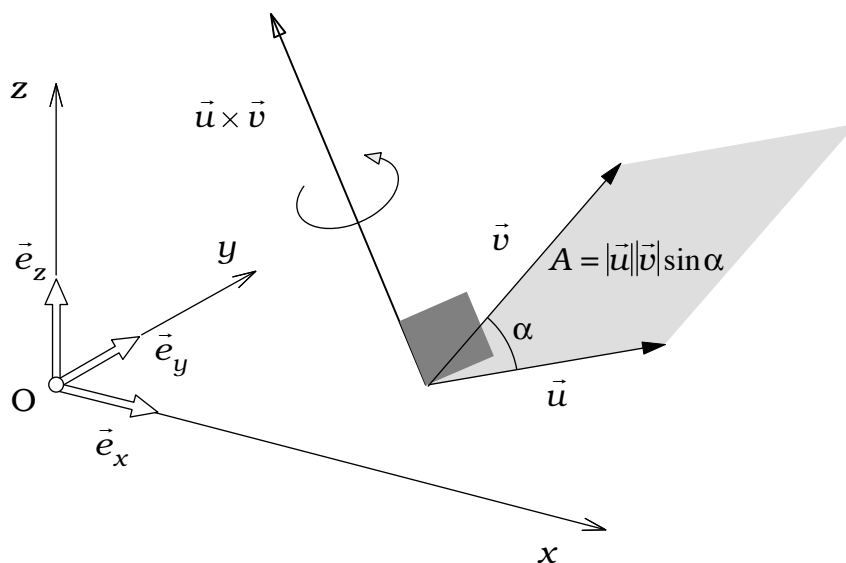
$$\vec{u} \cdot \vec{e} := |\vec{u}| \cos(\text{Winkel zwischen } \vec{u} \text{ und } \vec{e}).$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e} = |\vec{u}| \cos \alpha.$$

liefert die **Orthogonalprojektion** des Vektors \vec{u} auf die Richtung \vec{e} .



Das **Kreuzprodukt** oder **Vektorprodukt** $\vec{u} \times \vec{v}$ (gelesen: " u Kreuz v ") ist nur im dreidimensionalen Raum definiert. Es erzeugt einen Vektor, der auf der von \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Ebene senkrecht steht und so orientiert ist, dass die Vektoren \vec{u} , \vec{v} und $\vec{u} \times \vec{v}$ in dieser Reihenfolge einem "rechtshändigen" Bezugssystem entsprechen. Die "rechte-Hand-Regel" ordnet der Richtung von $\vec{u} \times \vec{v}$ die Richtung des ausgestreckten Daumen der rechten Hand zu, wenn man die zur Faust gekrümmten Finger der kürzesten Drehrichtung des Vektors \vec{u} in den Vektor \vec{v} anpaßt.



Als Betrag des Vektors $\vec{u} \times \vec{v}$ ist definiert

$$|\vec{u} \times \vec{v}| := |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\text{Winkel zwischen } \vec{u} \text{ und } \vec{v}),$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| := |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \alpha.$$

Wenn \vec{u} und \vec{v} Verbindungsvektoren von Raumpunkten sind, ist $|\vec{u} \times \vec{v}|$ gleich dem Flächeninhalt A des von den Vektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannten Parallelogramms.

Das Kreuzprodukt ist definitionsgemäß *nicht* kommutativ; es gilt

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}.$$

Die Kreuzprodukte der zueinander orthogonalen Basiseinheitsvektoren ergeben:

$$\begin{array}{l} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = -\vec{e}_y \times \vec{e}_x = \vec{e}_z, \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_z = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \vec{e}_x, \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_x = -\vec{e}_x \times \vec{e}_z = \vec{e}_y. \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \hline \vec{e}_x \times & \vec{0} & \vec{e}_z & -\vec{e}_y \\ \vec{e}_y \times & -\vec{e}_z & \vec{0} & \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times & \vec{e}_y & -\vec{e}_x & \vec{0} \end{array}$$

Mit diesen Formeln und dem Distributivgesetz

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c},$$

erhalten wir aus den Komponentendarstellungen der Vektoren \vec{u} und \vec{v}

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z,$$

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z,$$

die **Komponentendarstellung des Kreuzproduktes**

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= u_x (v_x \vec{e}_x \times \vec{e}_x + v_y \vec{e}_x \times \vec{e}_y + v_z \vec{e}_x \times \vec{e}_z) + \\ &+ u_y (v_x \vec{e}_y \times \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y \times \vec{e}_y + v_z \vec{e}_y \times \vec{e}_z) + \\ &+ u_z (v_x \vec{e}_z \times \vec{e}_x + v_y \vec{e}_z \times \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \times \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Determinante einer 2×2 - Matrix

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := ad - bc$$

lässt sich ein einfaches Schema für die Berechnung der drei Komponenten des Vektors $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ angeben:

Die i-te Komponente (i=1,2,3) von \vec{w} erhält man, indem man die i-te Zeile in der Spaltenvektor-Darstellung von $\vec{u} \times \vec{v}$ abdeckt und mit den jeweils sichtbaren 2×2 Komponenten die Determinante berechnet; für die zweite Komponente von \vec{w} muss noch mit dem Faktor (-1) multipliziert werden.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_x \\ - \\ - \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} - \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} - \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} - \\ w_y \\ - \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x \\ - \\ u_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ - \\ v_z \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} - \\ - \\ w_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ - \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ - \end{bmatrix}, \\ w_x &= \det \begin{bmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{bmatrix} & w_y &= -\det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{bmatrix} & w_z &= \det \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vorzeichen beachten

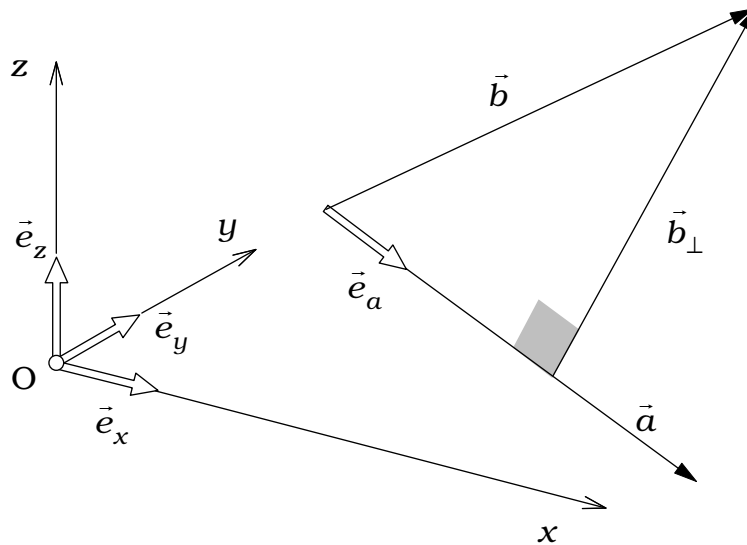
Weil der Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ definitionsgemäß orthogonal zu den Vektoren \vec{u} und \vec{v} ist, gilt

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0.$$

Das innere Produkt des Vektors \vec{a} mit dem Kreuzprodukt der Vektoren \vec{b} und \vec{c} nennt man **Spatprodukt** der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ; es gilt

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Bilden \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} die von einer Ecke eines Parallelepipeds ausgehenden Kanten, so ist das Spatprodukt das Volumen dieses Körpers.



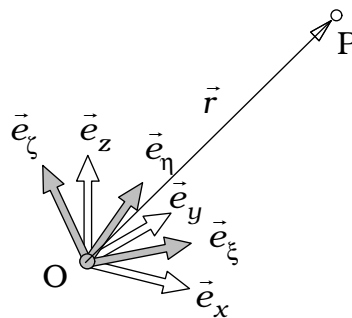
Aus der Formel für das **doppelte Kreuzprodukt**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

folgt

$$\vec{e}_a \times (\vec{b} \times \vec{e}_a) = (\vec{e}_a \cdot \vec{e}_a)\vec{b} - (\vec{e}_a \cdot \vec{b})\vec{e}_a = \vec{b} - |\vec{b}| \cos \alpha \vec{e}_a = \vec{b}_\perp.$$

Die Koordinaten eines Punktes P hängen ab von der zur Darstellung des Ortsvektors benutzten orthogonalen Basis.



$$\vec{r} = \begin{cases} x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z & \text{in der Basis } \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \\ \xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta & \text{in der Basis } \{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\} \end{cases}$$

Die Formeln für die **Koordinatentransformation** $\{x,y,z\} \leftrightarrow \{\xi,\eta,\zeta\}$ der Koordinaten des Punktes P erhalten wir über die inneren Produkte des Ortsvektors mit den Basisvektoren der entsprechenden Basis:

$$\begin{aligned} \xi &= (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_\xi, & x &= (\xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta) \cdot \vec{e}_x, \\ \eta &= (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_\eta, & y &= (\xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta) \cdot \vec{e}_y, \\ \zeta &= (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_\zeta; & z &= (\xi\vec{e}_\xi + \eta\vec{e}_\eta + \zeta\vec{e}_\zeta) \cdot \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die Komponenten eines Vektors \vec{u} in zwei unterschiedlichen orthogonalen Basissystemen.

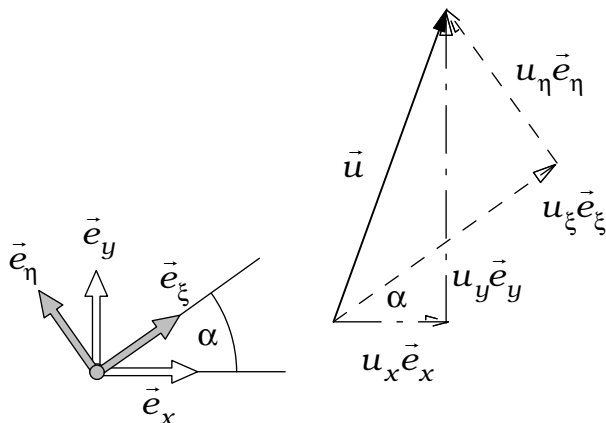
$$\vec{u} = \begin{cases} u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z & \text{in der Basis } \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \\ u_\xi\vec{e}_\xi + u_\eta\vec{e}_\eta + u_\zeta\vec{e}_\zeta & \text{in der Basis } \{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_\xi &= (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_x)u_x + (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_y)u_y + (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_z)u_z, & u_x &= (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\xi)u_\xi + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\eta)u_\eta + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\zeta)u_\zeta, \\ u_\eta &= (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_x)u_x + (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_y)u_y + (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_z)u_z, & u_y &= (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\xi)u_\xi + (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\eta)u_\eta + (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\zeta)u_\zeta, \\ u_\zeta &= (\vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_x)u_x + (\vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_y)u_y + (\vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_z)u_z; & u_z &= (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\xi)u_\xi + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\eta)u_\eta + (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\zeta)u_\zeta. \end{aligned}$$

Der Betrag des Vektors \vec{u} hängt nicht von der zur Darstellung des Vektors gewählten Basis ab; er ist eine **Invariante** des Vektors:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{u_\xi^2 + u_\eta^2 + u_\zeta^2}.$$

Ist insbesondere die $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ -Basis um den Winkel α um die \vec{e}_z -Achse gegenüber der $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -Basis gedreht,



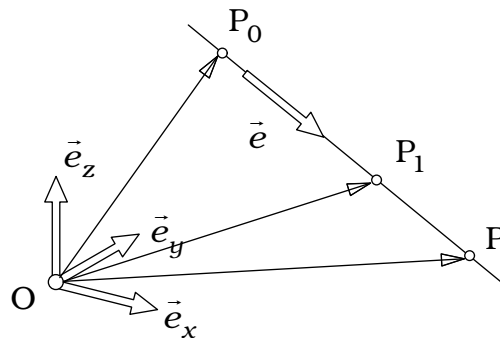
also

$$\begin{aligned}\vec{e}_\xi &= \cos\alpha \vec{e}_x + \sin\alpha \vec{e}_y, & \vec{e}_x &= \cos\alpha \vec{e}_\xi - \sin\alpha \vec{e}_\eta, \\ \vec{e}_\eta &= -\sin\alpha \vec{e}_x + \cos\alpha \vec{e}_y, & \vec{e}_y &= \sin\alpha \vec{e}_\xi + \cos\alpha \vec{e}_\eta, \\ \vec{e}_\zeta &= \vec{e}_z, & \vec{e}_z &= \vec{e}_\zeta,\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}u_\xi &= u_x \cos\alpha + u_y \sin\alpha, & u_x &= u_\xi \cos\alpha - u_\eta \sin\alpha, \\ u_\eta &= -u_x \sin\alpha + u_y \cos\alpha, & u_y &= u_\xi \sin\alpha + u_\eta \cos\alpha, \\ u_\zeta &= u_z; & u_z &= u_\zeta.\end{aligned}$$

Geraden und Ebenen im Raum lassen sich mit Hilfe der Vektorrechnung leicht beschreiben.



Durch zwei Punkte P_0 und P_1 im Raum ist eine Gerade definiert. Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P auf der Geraden lautet

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P} = \vec{OP}_0 + \lambda \vec{P_0P_1} = \vec{OP}_0 + \lambda (\vec{OP}_1 - \vec{OP}_0),$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}.$$

Mit dem Abstand L der Punkte P_0 und P_1

$$L = |\vec{P_0P_1}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

lautet der Richtungseinheitsvektor der Geraden

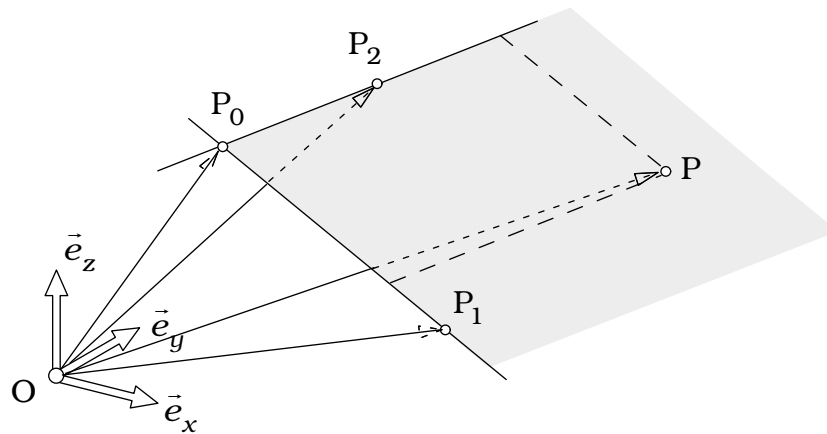
$$\vec{e} = \frac{1}{L} \vec{P_0P_1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}.$$

Damit wird

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + (\lambda L) \vec{e}.$$

(λL) ist der Abstand des Punktes P vom Punkt P_0 und λ die auf P_0 und die Längeneinheit L bezogene Koordinate des Punktes P auf der Geraden.

Durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2 im Raum, die nicht auf einer Geraden liegen, ist eine Ebene definiert.



Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P in der Ebene lautet

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P}_0P = \vec{OP}_0 + \lambda_1 \vec{P}_0P_1 + \lambda_2 \vec{P}_0P_2 = \vec{OP}_0 + \lambda_1 (\vec{OP}_1 - \vec{OP}_0) + \lambda_2 (\vec{OP}_2 - \vec{OP}_0).$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{bmatrix}.$$

Mit den Abständen der Punkte P_1 und P_2 von P_0

$$L_1 = |\vec{P}_0P_1|, \quad L_2 = |\vec{P}_0P_2|,$$

lauten die Richtungseinheitsvektoren der Trägergeraden der Ebene, die in der Regel nicht orthogonal sind,

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{L_1} \vec{P}_0P_1 = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{L_2} \vec{P}_0P_2 = \frac{1}{L_2} \begin{bmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{bmatrix},$$

Damit wird

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + (\lambda_1 L_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 L_2) \vec{e}_2 .$$

$(\lambda_1 L_1)$ und $(\lambda_2 L_2)$ sind die auf den Punkt P_0 und die Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bezogenen Koordinaten des Ebenenpunktes P .

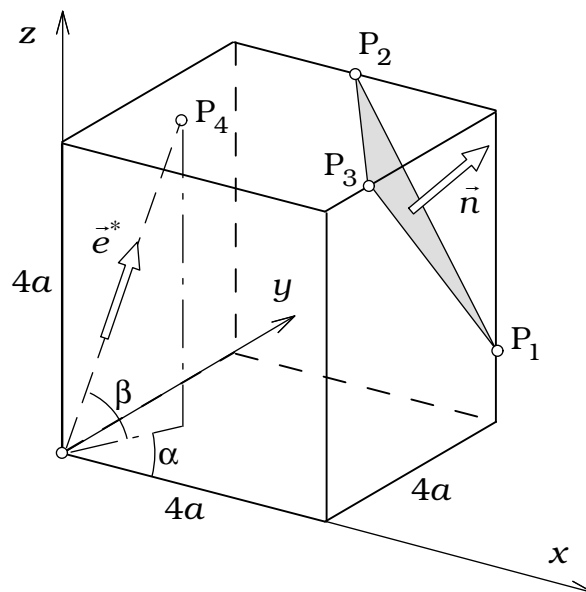
▼ Beispiel 7.1

Ein Würfel der Kantenlänge $4a$ soll vom Koordinatenursprung O aus in Richtung \vec{e}^* durchbohrt werden. Außerdem soll mit einem Schnitt durch die Punkte

$$P_1:(4a,4a,a), \quad P_2:(2a,4a,4a), \quad P_3:(4a,a,4a),$$

eine Würfecke abgetrennt werden.

Zu bestimmen sind: Die Koordinaten x_4, y_4 des Bohrloches P_4 , die Länge L der Bohrung, die Größe A und den Normaleneinheitsvektor \vec{n} der dreieckigen Schnittfläche, der Abstand d der Schnittfläche vom Punkt O , die Gleichung der Ebene durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 und die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Koordinatenachsen.



Aus

$$\vec{e}^* = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha \\ \cos \beta \sin \alpha \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \vec{OP}_4 = L\vec{e}^* = \begin{bmatrix} L\cos \beta \cos \alpha \\ L\cos \beta \sin \alpha \\ L\sin \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 4a \end{bmatrix},$$

folgt

$$L = \frac{4a}{\sin \beta}, \quad x_4 = 4a \frac{\cos \alpha}{\tan \beta}, \quad y_4 = 4a \frac{\sin \alpha}{\tan \beta}.$$

Mit der Definition des Kreuzproduktes erhalten wir

$$A\vec{n} = \frac{1}{2} \vec{P}_1 \vec{P}_2 \times \vec{P}_1 \vec{P}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2a \\ 0 \\ 3a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3a \\ 3a \end{bmatrix} = \frac{3a^2}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{3\sqrt{17}a^2}{2}}_A \underbrace{\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{n}},$$

$$A = \frac{3\sqrt{17}}{2} a^2, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Der Abstand d ist die Orthogonalprojektion des Ortsvektors eines Flächenpunktes auf den von O in Richtung \vec{n} weisenden Einheitsvektor:

$$d = \vec{OP}_i \cdot \vec{n} \quad (i=1,2,3),$$

$$d = a \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{22}{\sqrt{17}} a = 5,336 a$$

Ist \vec{r}_E der Ortsvektor eines Punktes auf der Ebene durch die Punkte P_1, P_2, P_3 , so gilt

$$\vec{r}_E \cdot \vec{n} = d, \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{22}{\sqrt{17}} a$$

$$3x + 2y + 2z = 22a.$$

Aus dieser Ebenengleichung erhalten wir die Abschnittsgleichung

$$\frac{x}{22a/3} + \frac{y}{11a} + \frac{z}{11a} = 1,$$

der man sofort die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen entnehmen kann:

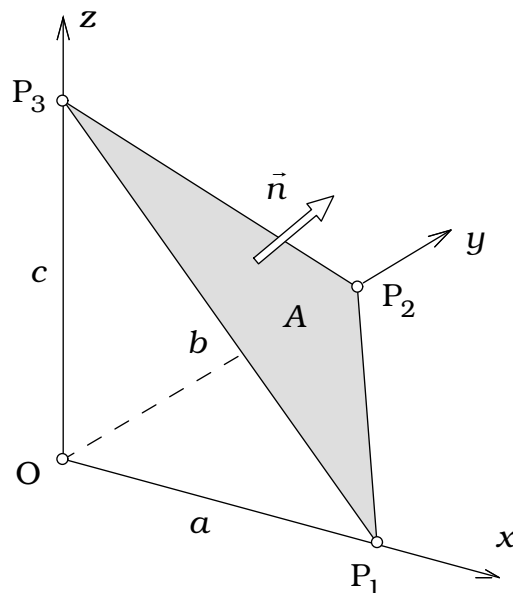
$$(22/3)a \text{ auf der } x\text{-Achse, } 11a \text{ auf der } y\text{- und der } z\text{-Achse.}$$



▼ Beispiel 7.2

Bei einem Tetraeder $OP_1P_2P_3$ bestehen Beziehungen zwischen den drei zu den Koordinatenebenen parallelen Tetraederflächen und der vierten Fläche A mit dem Normaleneinheitsvektor \vec{n} . Die Achsenabschnitte seien a, b und c . Dann gilt

$$A\vec{n} = \frac{1}{2}(\vec{P_1P_2}) \times (\vec{P_1P_3}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix};$$



Der Flächeninhalt A der Dreiecksfläche ist der Betrag dieses Vektors

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2},$$

und aus dem Komponentenvergleich mit den Flächeninhalten der Dreiecke in den Koordinatenebenen ergeben sich die Beziehungen

$$\text{Fläche } OP_1P_3 = \frac{ac}{2} = An_y,$$

$$\text{Fläche } OP_2P_1 = \frac{ba}{2} = An_z,$$

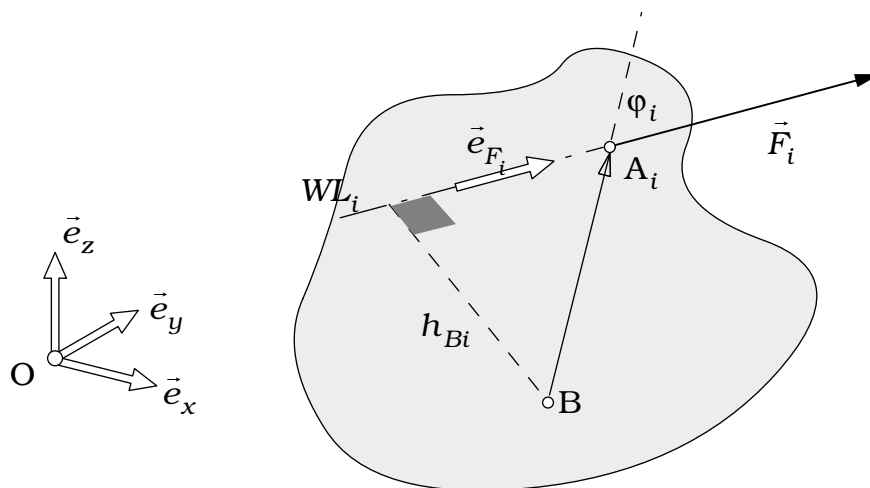
$$\text{Fläche } OP_3P_2 = \frac{cb}{2} = An_x.$$



▼ Beispiel 7.3

Die Wirkung einer Kraft auf einen festen Körper hängt ab von der Intensität, der Richtung und dem Angriffspunkt der Kraft. Deshalb beschreibt man Kräfte als Vektoren.

Den folgenden Beschreibungen liegt insbesondere das außerordentlich leistungsfähige Modell für einen nur schwer verformbaren materiellen Körper zugrunde: der **starre Körper**, bei dem die Abstände materieller Punkte definitionsgemäß unveränderlich sind.



Der **Kraftvektor** \vec{F}_i im Angriffspunkt A_i erhält in der kartesischen Basis die Darstellung

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_x + F_{iy}\vec{e}_y + F_{iz}\vec{e}_z = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}.$$

Der **Betrag der Kraft**

$$|\vec{F}_i| = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2}$$

wird in der Einheit

$$1 \text{Newton} = 1 \text{N} = 1 \text{kgms}^{-2}$$

gemessen.

Der Richtungsvektor der Kraft ist

$$\vec{e}_{F_i} = \frac{1}{|\vec{F}_i|} \vec{F}_i = \frac{1}{\sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2}} \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}.$$

Die Gerade WL_i in Richtung \vec{e}_{F_i} durch den Angriffspunkt A_i der Kraft nennt man die **Wirkungslinie** der Kraft.

Bei Kraftvektoren, deren Wirkungslinien nur in der xy -Ebene liegen, sind die z -Komponenten null. Deshalb können diese Vektoren einfacher als zweikomponentige Spaltenmatrizen dargestellt werden.

Die Drehwirkung der Kraft \vec{F}_i bezüglich des Körperpunktes B wird durch den **Momentenvektor**

$$\vec{M}_{iB} := \vec{BA}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{iB} := \begin{bmatrix} x_{A_i} - x_B \\ y_{A_i} - y_B \\ z_{A_i} - z_B \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{A_i} - y_B)F_{iz} - (z_{A_i} - z_B)F_{iy} \\ (z_{A_i} - z_B)F_{ix} - (x_{A_i} - x_B)F_{iz} \\ (x_{A_i} - x_B)F_{iy} - (y_{A_i} - y_B)F_{ix} \end{bmatrix}.$$

beschrieben, wobei

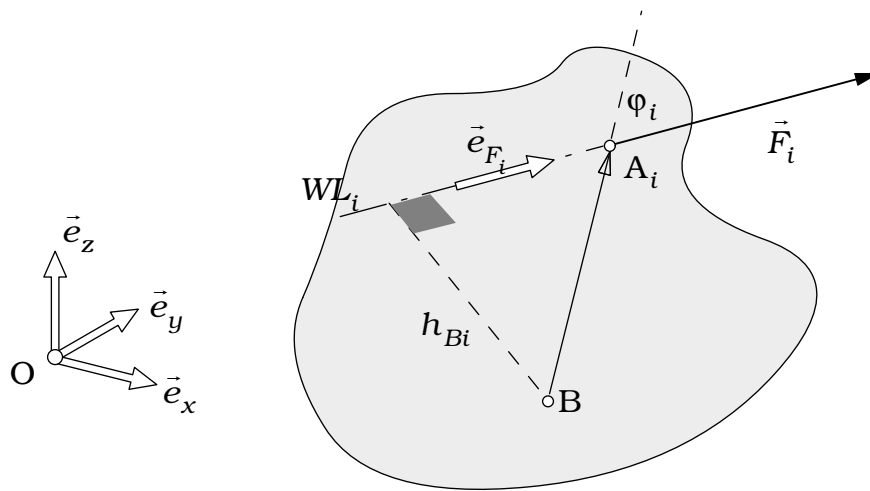
$$\vec{OA}_i = \vec{OB} + \vec{BA}_i, \quad \rightarrow \quad \vec{BA}_i = \vec{OA}_i - \vec{OB},$$

berücksichtigt wurde.

Aus dem Betrag des Momentenvektors

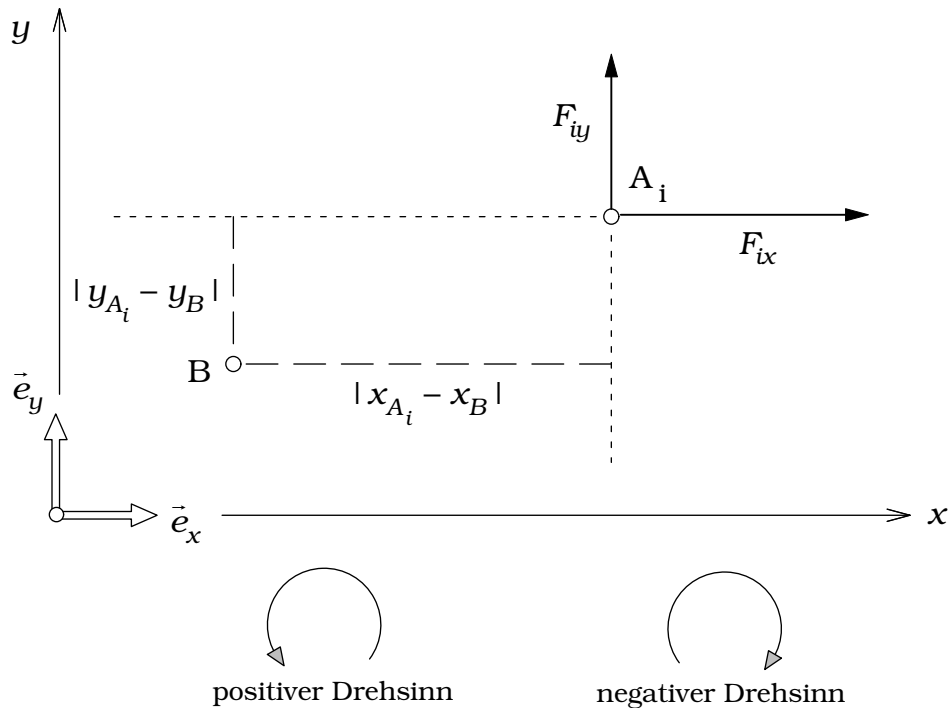
$$|\vec{M}_{iB}| = |\vec{BA}_i| |\vec{F}_i| \sin \varphi_i = h_{Bi} |\vec{F}_i|, \quad h_{Bi} := |\vec{BA}_i| \sin \varphi_i,$$

erkennt man, dass es zweckmäßig sein kann, den **Hebelarm** h_{Bi} als Abstand der Wirkungslinie der Kraft \vec{F}_i vom Momentenbezugspunkt B einzuführen. Da sich der Hebelarm bei Verschiebung des Kraftvektors auf seiner Wirkungslinie nicht ändert, bleibt auch die Drehwirkung der Kraft auf den Körper ungeändert, wenn man den Angriffspunkt der Kraft auf der Wirkungslinie im starren Körper verschiebt.



Wenn insbesondere alle Kräfte mit ihren Wirkungslinien in der xy -Ebene liegen (**ebenes Kräftesystem**), und der Bezugspunkt B ebenfalls ein Punkt in dieser Ebene ist, wird speziell

$$\vec{M}_{iB} := \begin{bmatrix} x_{A_i} - x_B \\ y_{A_i} - y_B \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (x_{A_i} - x_B)F_{iy} - (y_{A_i} - y_B)F_{ix} \end{bmatrix}.$$



Die auf den Punkt B: $(x_B, y_B, 0)$ bezogenen Momentenvektoren der einzelnen Kräfte haben dann jeweils nur eine z-Komponente. Deshalb kann man in diesem Spezialfall die Momente einfacher berechnen: Über die Produkte (Hebelarm \times Kraftkomponente) mit einem dem Drehsinn entsprechenden Vorzeichen, das die „rechte-Hand-Regel“ zur Geltung bringt.

$|x_{A_i} - x_B|$ ist der Hebelarm der Kraftkomponente F_{iy}

$|y_{A_i} - y_B|$ ist der Hebelarm der Kraftkomponente F_{ix}

$$M_{iBz} = (VZ_{\text{Drehsinn}}) |x_{A_i} - x_B| F_{iy} + (VZ_{\text{Drehsinn}}) |y_{A_i} - y_B| F_{ix}$$

$$(VZ_{\text{Drehsinn}}) := \begin{cases} +1 & \text{bei positivem Drehsinn} \\ -1 & \text{bei negativem Drehsinn} \end{cases}$$

Wenn am starren Körper n Kräfte in verschiedenen Körperpunkten angreifen, definiert man als **Kräfte**summe \vec{F} und auf den Punkt B bezogene **Momenten**summe \vec{M}_B

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{M}_B = \sum_{i=1}^n \vec{BA}_i \times \vec{F}_i.$$

Das Kräftesystem $\{\vec{F}_i \text{ in } A_i, \quad i=1,2,\dots,n\}$ wird **Gleichgewichtssystem** genannt, wenn Kräfte- und Momentensumme null sind:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}, \quad \sum_{i=1}^n \vec{BA}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}.$$



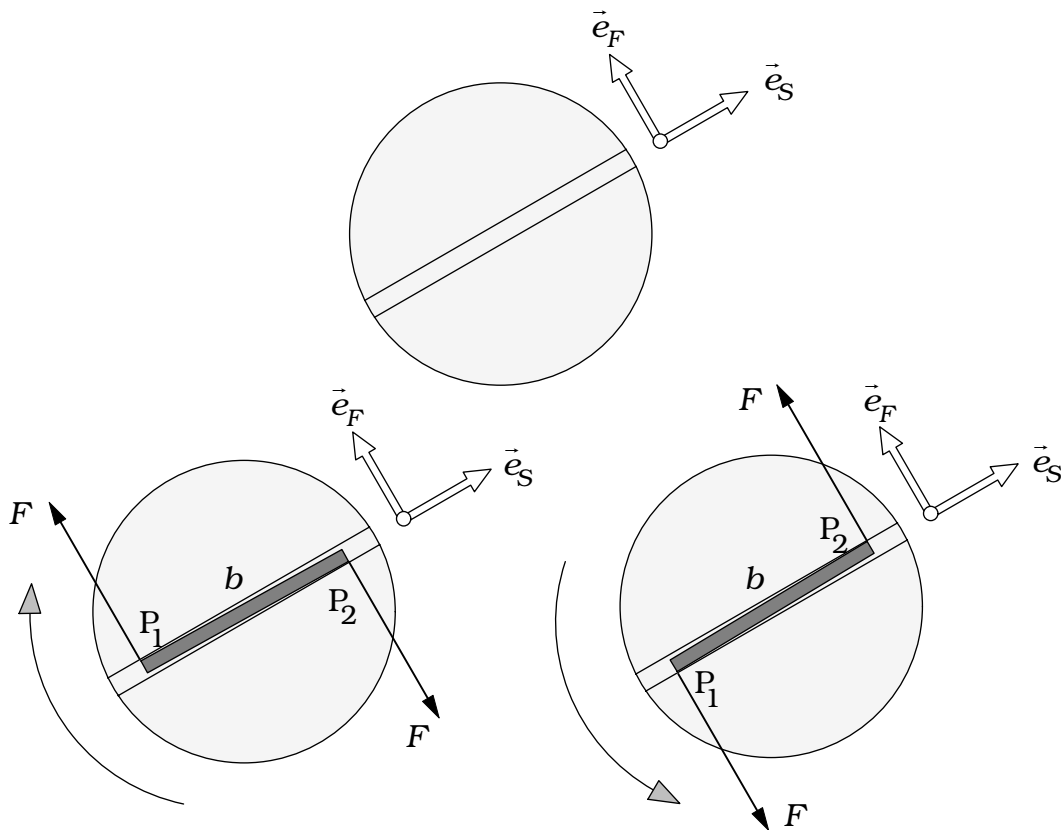
▼ Beispiel 7.4

Der Schlitz im Kopf einer Schraube habe die Richtung \vec{e}_S und die Schraubennachse die dazu senkrechte Richtung \vec{e}_A (hier senkrecht zur Zeichenebene). Der Einheitsvektor $\vec{e}_F := \vec{e}_S \times \vec{e}_A$ spannt zusammen mit \vec{e}_S die Schraubenkopfebene (Zeichenebene) auf.

$$\overrightarrow{P_1P_2} \approx b\vec{e}_S, \quad \vec{e}_A = \vec{e}_F \times \vec{e}_S.$$

Wird ein Schraubenzieher mit der Schneidenbreite b in den Schraubenschlitz gesteckt und dann um die Schraubennachse gedreht, so übertragen die beiden Endpunkte P_1 und P_2 der Schneide jeweils gleich große Kräfte F in entgegengesetzter Richtung auf die Flanken des Schraubenschlitzes. Die Richtungen der Kräfte auf den parallelen Wirkungslinien ändern sich mit dem Drehsinn des Schraubenziehers.

Ein solches spezielles Kräftesystem, dessen Kräftesumme null ist, nennt man ein **Kräftepaar**.



Für die auf einen beliebigen Punkt B der Schraube bezogenen Momente erhalten wir die folgenden Momentensummen:

(linkes Bild) Drehung des Schraubenziehers im Uhrzeigersinn:

$$\vec{M}_B = \vec{BP}_1 \times (F \vec{e}_F) + \vec{BP}_2 \times (-F \vec{e}_F) = (\vec{BP}_1 - \vec{BP}_2) \times (F \vec{e}_F) = (-b \vec{e}_S) \times (F \vec{e}_F) = bF \vec{e}_A.$$

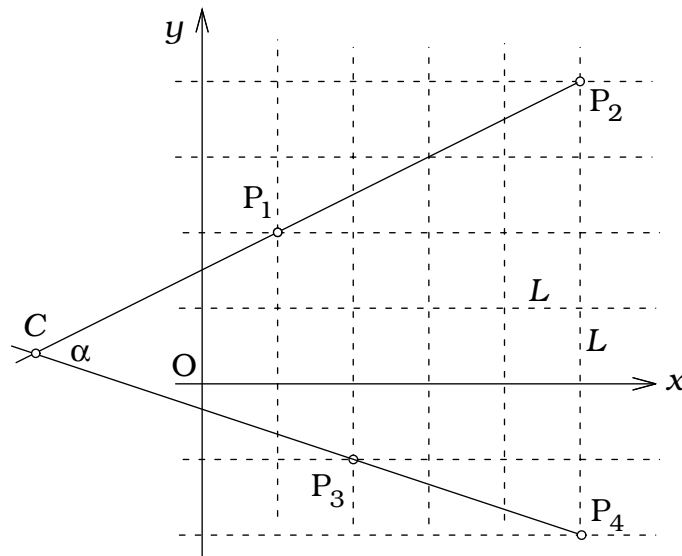
(rechtes Bild) Drehung des Schraubenziehers entgegen dem Uhrzeigersinn:

$$\vec{M}_B = \vec{BP}_1 \times (-F \vec{e}_F) + \vec{BP}_2 \times (F \vec{e}_F) = (\vec{BP}_2 - \vec{BP}_1) \times (F \vec{e}_F) = (b \vec{e}_S) \times (F \vec{e}_F) = -bF \vec{e}_A.$$

Die Momentensummen sind unabhängig vom Bezugspunkt B, weil die Ergebnisse keine Koordinaten dieses Punktes enthalten. Die Momentenvektoren sind parallel zur Schraubenachse; Richtung und Drehsinn entsprechen der „rechte-Hand-Regel“.



▼ Beispiel 7.5



Zu bestimmen sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden, den Winkel α , den sie miteinander bilden, den Schnittpunkt C und die Abstände λ_1 und λ_2 des Schnittpunktes von den Punkten P_1 und P_3 .

Alle Vektoren liegen in der xy -Ebene, haben also nur zwei Komponenten. Aus der Abbildung mit den angegebenen Längeneinheiten L werden zuerst die Ortsvektoren zu den vier Punkten P_i aufgestellt.

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} L \\ 2L \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 5L \\ 4L \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_4 = \begin{bmatrix} 5L \\ -2L \end{bmatrix}.$$

Aus den Verbindungsvektoren

$$\vec{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{bmatrix} 4L \\ 2L \end{bmatrix}, \quad \vec{P_3P_4} = \vec{r}_4 - \vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 3L \\ -L \end{bmatrix},$$

ergeben sich die Punktabstände

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{20}L, \quad |\vec{P_3P_4}| = \sqrt{10}L,$$

und die Darstellungen der Richtungsvektoren der beiden Geraden

$$\vec{P_1P_2} = |\vec{P_1P_2}| \vec{e}_1, \quad \vec{P_3P_4} = |\vec{P_3P_4}| \vec{e}_2, \quad \rightarrow \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Der Schnittwinkel α wird über das Skalarprodukt der Richtungsvektoren bestimmt:

$$\cos \alpha = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^\circ.$$

Der Schnittpunkt C liegt auf beiden Geraden. Deshalb gilt mit noch unbekanntem Parametern λ_1 und λ_2 , den Abständen der Punkte P_1 und P_3 vom Punkt C,

$$\begin{aligned} \vec{r}_C + \lambda_1 \vec{e}_1 &= \vec{r}_1, \\ \vec{r}_C + \lambda_2 \vec{e}_2 &= \vec{r}_3, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 \vec{e}_1 - \lambda_2 \vec{e}_2 = \vec{r}_1 - \vec{r}_3, \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ 3L \end{bmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem muß nun gelöst werden:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 - 3\sqrt{2}\lambda_2 &= -\sqrt{20}L, \\ 2\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2 &= 3\sqrt{20}L, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{8}{\sqrt{5}}L = 3,58L \quad \lambda_2 = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}}L = 4,43L$$

Damit ist der Ortsvektor des Schnittpunktes C bekannt:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_1 - \lambda_1 \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} L \\ 2L \end{bmatrix} - \frac{8}{\sqrt{5}}L \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ 2L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3,2L \\ 1,6L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,2L \\ 0,4L \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_3 - \lambda_2 \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \end{bmatrix} - \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}}L \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2L \\ -L \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4,2L \\ -1,4L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,2L \\ 0,4L \end{bmatrix}.$$



▼ Beispiel 7.6

Die Ebene E

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

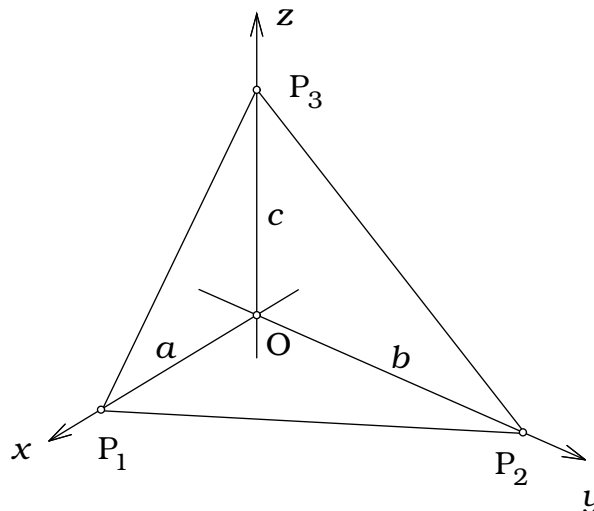
schneidet die Koordinatenachsen in den Schnittpunkten P_1, P_2, P_3 mit den Ortsvektoren

$$\vec{r}_1 = a\vec{e}_x, \quad \vec{r}_2 = b\vec{e}_y, \quad \vec{r}_3 = c\vec{e}_z.$$

Der Vektor

$$\vec{v} = \frac{1}{a}\vec{e}_x + \frac{1}{b}\vec{e}_y + \frac{1}{c}\vec{e}_z$$

ist dann zur Ebene E orthogonal. Um das nachzuweisen, berechnen wir



den Inhalt A des Dreiecks P_1, P_2, P_3 und den Normaleneinheitsvektor \vec{n} auf der Ebene:

$$A\vec{n} = \frac{1}{2} \vec{P_1P_2} \times \vec{P_1P_3} = \frac{1}{2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{bmatrix}.$$

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}. \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2}} \begin{bmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{bmatrix}.$$

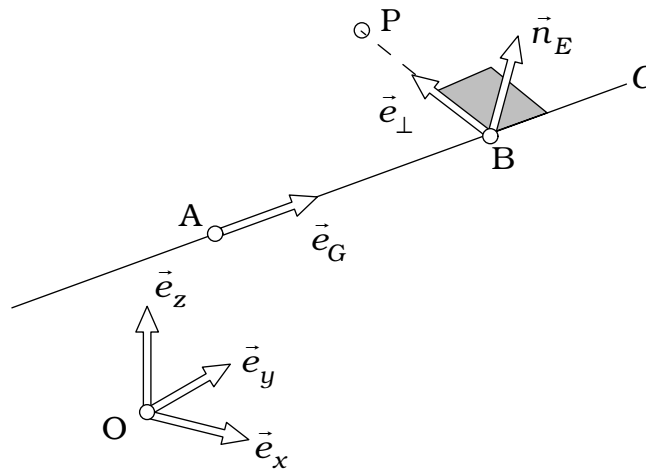
Den Orthogonalitätsnachweis wird über das Skalarprodukt des gegebenen Vektors \vec{v} mit beliebigen Vektoren in der Fläche geführt. Wir wählen beispielsweise Verbindungsvektoren von Flächenpunkten:

$$\vec{v} \cdot \vec{P_1P_2} = \begin{bmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ b \\ 0 \end{bmatrix} = -1+1+0=0, \quad \vec{v} \cdot \vec{P_1P_3} = \begin{bmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = -1+0+1=0,$$

$$\vec{v} \perp \vec{P_1P_2} \quad \text{und} \quad \vec{v} \perp \vec{P_1P_3} \quad \rightarrow \quad \vec{v} \perp \text{Ebene E.}$$



▼ Beispiel 7.7



Berechnet werden sollen: Der Abstand d_p des Punktes P von der Geraden G durch den Punkt A in Richtung \vec{e}_G , der Normaleneinheitsvektor \vec{n}_E der Ebene E durch P und die Gerade G, der Abstand d_E der Ebene E vom Koordinatenursprung O sowie die die Schnittpunkte a, b und c der Ebene E mit den Koordinatenachsen.

Der Verbindungsvektor der Punkte A und P

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA},$$

kann zerlegt werden in die Summe der Verbindungsvektoren

$$\vec{AB} = (\vec{AP} \cdot \vec{e}_G) \vec{e}_G,$$

und \vec{BP} , wobei B der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade G ist:

$$\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP} \quad \rightarrow \quad \vec{BP} = \vec{AP} - \vec{AB},$$

$$\vec{BP} = \vec{AP} - (\vec{AP} \cdot \vec{e}_G) \vec{e}_G,$$

$(\vec{AP} \cdot \vec{e}_G)$ ist die Orthogonalprojektion des Vektors \vec{AP} auf die Gerade G.

Nun kann man berechnen:

$$d_P = |\vec{BP}|, \quad \vec{e}_\perp = \frac{\vec{BP}}{d_P}, \quad \vec{n}_E = \vec{e}_G \times \vec{e}_\perp.$$

Weil A ein Punkt auf der von der Geraden G und dem Punkt P aufgespannten Ebene ist, gilt für den Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung

$$d_E = \vec{n}_E \cdot \vec{OA}.$$

Für die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen gilt entsprechend

$$(a\vec{e}_x) \cdot \vec{n}_E = d_E, \quad (b\vec{e}_y) \cdot \vec{n}_E = d_E, \quad (c\vec{e}_z) \cdot \vec{n}_E = d_E,$$

also wird

$$a = \frac{d_E}{n_{Ex}}, \quad b = \frac{d_E}{n_{Ey}}, \quad c = \frac{d_E}{n_{Ez}}.$$

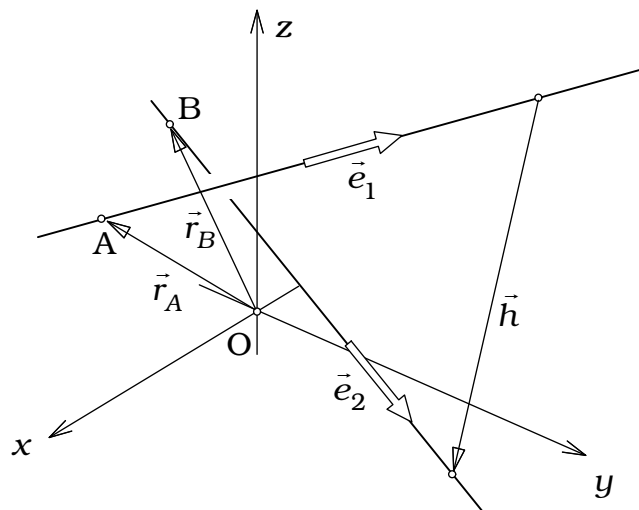


▼ Beispiel 7.8

Gesucht ist der kürzeste Abstand h der Punkte von zwei Geraden (= Abstand der Geraden)

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_A + \lambda_1 \vec{e}_1, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_B + \lambda_2 \vec{e}_2,$$

die sich nicht schneiden.



Der Verbindungsvektor von zwei beliebigen Punkten auf den beiden Geraden lautet

$$\vec{h}(\lambda_1, \lambda_2) := \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_B - \vec{r}_A + \lambda_2 \vec{e}_2 - \lambda_1 \vec{e}_1.$$

Als Bedingungen für den minimalen Abstand stehen zwei Gleichungen zur Verfügung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\vec{h} \cdot \vec{h})}{\partial \lambda_1} = 0 &\quad \rightarrow \quad 2\vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial \lambda_1} = -2\vec{h} \cdot \vec{e}_1 = 0, \\ \frac{\partial(\vec{h} \cdot \vec{h})}{\partial \lambda_2} = 0 &\quad \rightarrow \quad 2\vec{h} \cdot \frac{\partial \vec{h}}{\partial \lambda_2} = 2\vec{h} \cdot \vec{e}_2 = 0, \end{aligned}$$

Der kürzeste Verbindungsvektor der beiden Geraden ist also zu beiden Geraden orthogonal. Dieser Lotvektor wird durch die Parameter λ_{1L} und λ_{2L} beschrieben, die folgende Bedingungen erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} \vec{h} \cdot \vec{e}_1 &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \cdot \vec{e}_1 + \lambda_{2L}(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) - \lambda_{1L} = 0, \\ \vec{h} \cdot \vec{e}_2 &= (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \cdot \vec{e}_2 + \lambda_{2L} - \lambda_{1L}(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) = 0, \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 =: c, \quad (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot \vec{e}_1 =: b_1, \quad (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \cdot \vec{e}_2 =: b_2,$$

lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_{2L}c - \lambda_{1L} &= b_1, \\ \lambda_{2L} - \lambda_{1L}c &= b_2, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \lambda_{1L} = \frac{cb_2 - b_1}{1 - c^2}, \quad \lambda_{2L} = \frac{b_2 - cb_1}{1 - c^2}.$$

Der Abstand der Geraden ist dann

$$h = |\vec{r}_B - \vec{r}_A + \lambda_{2L}\vec{e}_2 - \lambda_{1L}\vec{e}_1|.$$



▼ Beispiel 7.9

Die beiden nicht-parallelen Ebenen

$$E_1: \quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1} = 1, \quad E_2: \quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} + \frac{z}{c_2} = 1.$$

schneiden sich in einer Geraden. Es sei $(a_1/a_2) \neq (b_1/b_2)$. Gesucht ist die Schnittgerade.

Mit den zu den Ebenen jeweils orthogonalen Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/a_1 \\ 1/b_1 \\ 1/c_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/a_2 \\ 1/b_2 \\ 1/c_2 \end{bmatrix},$$

erhalten wir den Richtungsvektor

$$\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/a_1 \\ 1/b_1 \\ 1/c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/a_2 \\ 1/b_2 \\ 1/c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/(b_1 c_2) - 1/(b_2 c_1) \\ 1/(c_1 a_2) - 1/(c_2 a_1) \\ 1/(a_1 b_2) - 1/(a_2 b_1) \end{bmatrix}$$

der Schnittgeraden.

Die Koordinaten des in der xy -Ebene liegenden Punktes $P:(x_P, y_P, z_P = 0)$ auf der Schnittgeraden erhalten wir aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{x_P}{a_1} + \frac{y_P}{b_1} &= 1, \\ \frac{x_P}{a_2} + \frac{y_P}{b_2} &= 1, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad x_P = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{b_1 a_2 - b_2 a_1}, \quad y_P = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad z_P = 0.$$

Die vektorielle Gleichung der Schnittgeraden lautet

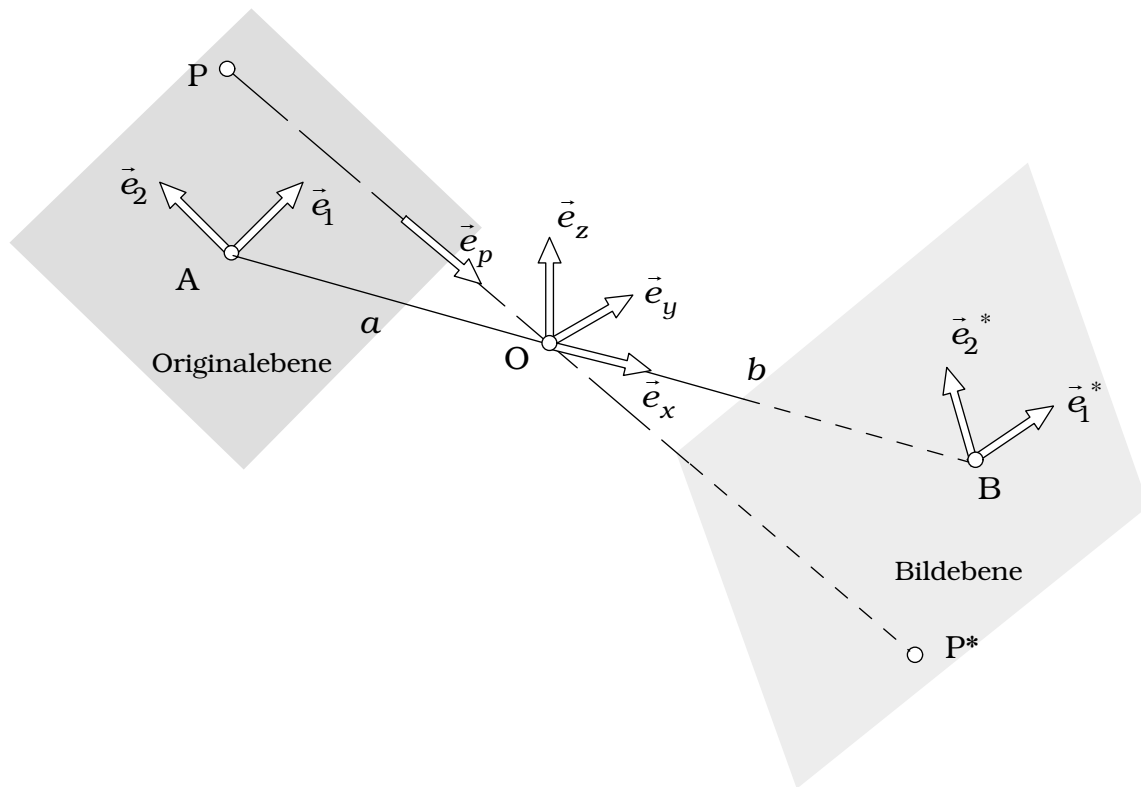
$$\vec{r} = \vec{r}_P + \lambda \vec{w}.$$



▼ Beispiel 7.10

In der yz -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems befindet sich eine lichtundurchlässige Wand, die im Nullpunkt mit einem kleinen Loch versehen ist. Nach dem Funktionsprinzip einer Lochkamera kann man die Punkte auf einer beliebig geneigten Originalebene links von der Wand auf eine ebenfalls beliebig geneigte Bildebene rechts von der Wand abbilden. Das Abbildungsgesetz soll bestimmt werden.

Wir führen in der Originalebene eine orthogonale Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ von Einheitsvektoren ein, wobei der Vektor \vec{e}_3 Normalenvektor der Ebene sein soll.



Ist die Ebene zunächst parallel zur yz -Ebene, so gilt

$$\begin{matrix} \underline{(0)} \\ \vec{e}_1 \end{matrix} = \vec{e}_y, \quad \begin{matrix} \underline{(0)} \\ \vec{e}_2 \end{matrix} = \vec{e}_z, \quad \begin{matrix} \underline{(0)} \\ \vec{e}_3 \end{matrix} = \vec{e}_x.$$

Wird die Ebene dann um die \vec{e}_z -Achse um den Winkel α gedreht, so entstehen die Basisvektoren

$$\begin{matrix} \underline{(1)} \\ \vec{e}_1 \end{matrix} = -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y, \quad \begin{matrix} \underline{(1)} \\ \vec{e}_2 \end{matrix} = \vec{e}_z, \quad \begin{matrix} \underline{(1)} \\ \vec{e}_3 \end{matrix} = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y.$$

Eine zweite Drehung der Ebene um die neue $\vec{e}_1^{(1)}$ -Achse um den Winkel β , erzeugt die Ebenen-Basis

$$\begin{matrix} \underline{(2)} \\ \vec{e}_1 \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{(1)} \\ \vec{e}_1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \underline{(2)} \\ \vec{e}_2 \end{matrix} = -\sin \beta \begin{matrix} \underline{(1)} \\ \vec{e}_3 \end{matrix} + \cos \beta \vec{e}_z,$$

Wir setzen nun

$$\begin{matrix} \underline{(2)} \\ \vec{e}_1 \end{matrix} = \vec{e}_1, \quad \begin{matrix} \underline{(2)} \\ \vec{e}_2 \end{matrix} = \vec{e}_2$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y, \\ \vec{e}_2 &= -\sin \beta \cos \alpha \vec{e}_x - \sin \beta \sin \alpha \vec{e}_y + \cos \beta \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Entsprechende Drehungen der Bildebene um die Winkel α^* und β^* erzeugen die Ebenen-Basis

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^* &= -\sin \alpha^* \vec{e}_x + \cos \alpha^* \vec{e}_y, \\ \vec{e}_2^* &= -\sin \beta^* \cos \alpha^* \vec{e}_x - \sin \beta^* \sin \alpha^* \vec{e}_y + \cos \beta^* \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Aus der obigen Darstellung der Originalebene und der Bildebene mit der Abbildung des Punktes P in den Punkt P* entnehmen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned}\vec{OA} + \vec{AP} &= \vec{OP}, & \vec{OB} + \vec{BP}^* &= \lambda \vec{PO}. \\ \vec{OA} = -a \vec{e}_x, & \vec{AP} = \xi_1 \vec{e}_1 + \xi_2 \vec{e}_2, & \vec{OB} = b \vec{e}_x, & \vec{BP}^* = \xi_1^* \vec{e}_1^* + \xi_2^* \vec{e}_2^*, \\ \vec{OP} = \begin{bmatrix} -a - \xi_1 \sin \alpha - \xi_2 \cos \alpha \sin \beta \\ \xi_1 \cos \alpha - \xi_2 \sin \alpha \sin \beta \\ \xi_2 \cos \beta \end{bmatrix} &=: \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, & \vec{BP}^* = \begin{bmatrix} -\xi_1^* \sin \alpha^* - \xi_2^* \cos \alpha^* \sin \beta^* \\ \xi_1^* \cos \alpha^* - \xi_2^* \sin \alpha^* \sin \beta^* \\ \xi_2^* \cos \beta^* \end{bmatrix},\end{aligned}$$

Gesucht sind die Koordinaten des Bildpunktes P*.

$$\begin{aligned}\vec{BP}^* &= \lambda \vec{PO} - \vec{OB}, \\ \begin{bmatrix} -\xi_1^* \sin \alpha^* - \xi_2^* \cos \alpha^* \sin \beta^* \\ \xi_1^* \cos \alpha^* - \xi_2^* \sin \alpha^* \sin \beta^* \\ \xi_2^* \cos \beta^* \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\lambda = \frac{\xi_1^* \cos \alpha^* - \xi_2^* \sin \alpha^* \sin \beta^*}{-p_y} = -\xi_1^* \frac{\cos \alpha^*}{p_y} + \xi_2^* \frac{\sin \alpha^* \sin \beta^*}{p_y},$$

Aus der ersten und dritten Gleichung erhalten wir dann das lineare Gleichungssystem für die Bildkoordinaten

$$\begin{aligned}-\xi_1^* \sin \alpha^* - \xi_2^* \cos \alpha^* \sin \beta^* + (-\xi_1^* \cos \alpha^* + \xi_2^* \sin \alpha^* \sin \beta^*) \frac{p_x}{p_y} &= -b, \\ \xi_2^* \cos \beta^* + (-\xi_1^* \cos \alpha^* + \xi_2^* \sin \alpha^* \sin \beta^*) \frac{p_z}{p_y} &= 0,\end{aligned}$$

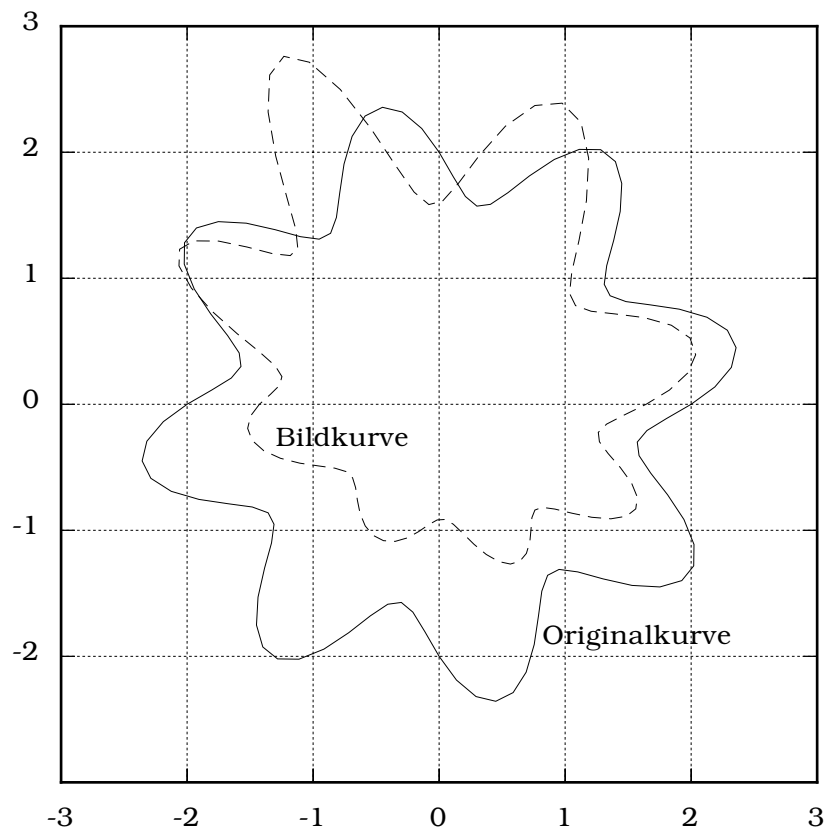
Mit den Abkürzungen

$$C_{11} := -\sin\alpha^* - \cos\alpha^* \frac{p_x}{p_y}, \quad C_{12} := -\cos\alpha^* \sin\beta^* + \sin\alpha^* \sin\beta^* \frac{p_x}{p_y},$$

$$C_{21} := -\cos\alpha^* \frac{p_z}{p_y}, \quad C_{22} := \cos\beta^* + \sin\alpha^* \sin\beta^* \frac{p_z}{p_y}$$

lautet das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} C_{11}\xi_1^* + C_{12}\xi_2^* &= -b, \\ C_{21}\xi_1^* + C_{22}\xi_2^* &= 0, \end{aligned} \quad \xi_1^* = \frac{-C_{22}b}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}, \quad \xi_2^* = \frac{C_{21}b}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}},$$



Für die speziellen Neigungswinkel der Original- und der Bildebene

$$\begin{aligned} \alpha &= 20^\circ, & \beta &= 30^\circ, \\ \alpha^* &= 30^\circ, & \beta^* &= -20^\circ, \end{aligned}$$

wird aus der Originalkurve

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2\{1 + 0,2 \sin(8\varphi)\} \cos \varphi, \\ \xi_2 &= 2\{1 + 0,2 \sin(8\varphi)\} \sin \varphi, \end{aligned}$$

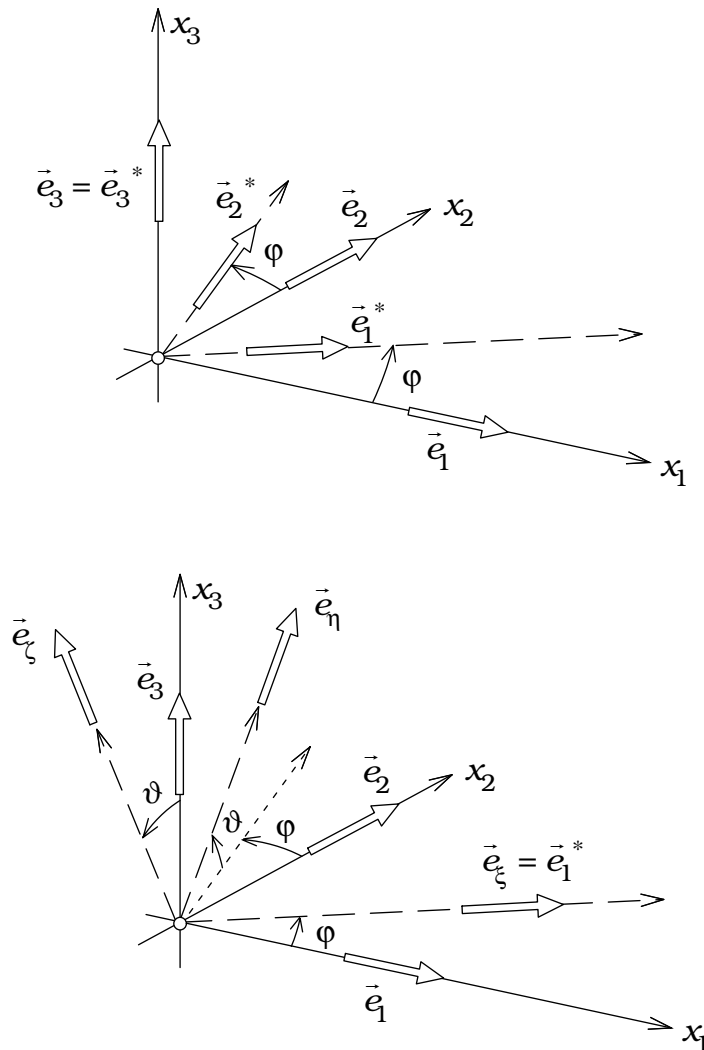
die in der Abbildung gestrichelt dargestellte Bildkurve.



▼ Beispiel 7.11

Die graphische Darstellung von dreidimensionalen Körpern in einer zweidimensionalen Technischen Zeichnung beruht auf Orthogonalprojektionen des Körpers in die Zeichenebene. Mit Hilfe der Vektorrechnung lassen sich die entsprechenden Transformationsgesetze von den drei kartesischen Koordinaten des Körperpunktes im Raum auf die zwei Koordinaten des Bildpunktes in der Zeichenebene berechnen.

Wir führen im dreidimensionalen Raum zwei orthogonale Basisvektorsysteme ein: Das erste besteht aus den Einheitsvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und das zweite aus den Einheitsvektoren $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$, die als starrer Verband durch zwei aufeinanderfolgende Drehungen erzeugt werden.



Die erste Drehung mit dem Winkel φ um die \vec{e}_3 -Achse führt zu den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1^* = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{e}_2^* = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3^* = \vec{e}_3.$$

Die zweite Drehung mit dem Winkel ϑ um die soeben erzeugte \vec{e}_1^* -Achse liefert die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\xi = \vec{e}_1^*, \quad \vec{e}_\eta = \cos \vartheta \vec{e}_2^* + \sin \vartheta \vec{e}_3^*, \quad \vec{e}_\zeta = -\sin \vartheta \vec{e}_2^* + \cos \vartheta \vec{e}_3^*,$$

Das ergibt schließlich die Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{e}_\xi &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \\ \vec{e}_\eta &= \cos \vartheta (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + \sin \vartheta \vec{e}_3, \\ \vec{e}_\zeta &= -\sin \vartheta (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2) + \cos \vartheta \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Ein Punkt P im dreidimensionalen Raum hat in der $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ -Basis die Darstellung

$$\vec{OP} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

und in der $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ -Basis lautet sie

$$\vec{OP} = \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta + \zeta \vec{e}_\zeta.$$

Die Orthogonalprojektion des Punktes P in die ξ, η -Ebene erzeugt den Punkt P' mit dem Ortsvektor

$$\vec{OP}' = \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \xi &= \vec{OP} \cdot \vec{e}_\xi = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_\xi, & \eta &= \vec{OP} \cdot \vec{e}_\eta = (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_\eta, \\ \xi &= x_1 (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_1) + x_2 (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_2) + x_3 (\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_3), & \eta &= x_1 (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_1) + x_2 (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_2) + x_3 (\vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_3), \end{aligned}$$

und mit den oben berechneten Basisvektoren erhalten wir die Formeln für die Abbildung $P \rightarrow P'$:

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ \eta &= -x_1 \sin \varphi \cos \vartheta + x_2 \cos \varphi \cos \vartheta + x_3 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Die $\xi\eta$ -Ebene wird die Zeichenebene für die Darstellung der Orthogonalprojektion eines dreidimensionalen Körpers. Wenn beispielsweise als (negative) Projektionsrichtung

$$\vec{e}_\zeta(\varphi = 30^\circ, \vartheta = 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{e}_1 - \frac{3}{4}\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3$$

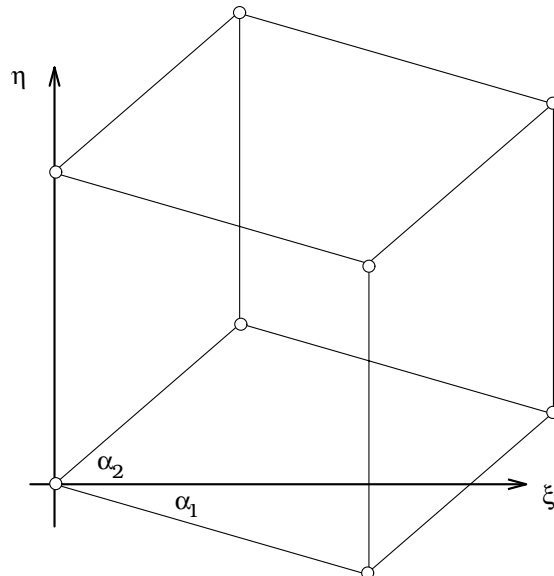
gewählt wird, werden die acht Eckpunkte eines Würfels mit der Kantenlänge L parallel zu den Achsen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und einer Ecke im Ursprung des Koordinatensystems nach den Formeln

$$\xi = \frac{1}{2}(x_1\sqrt{3} + x_2), \quad \eta = \frac{1}{4}(-x_1 + x_2\sqrt{3} + x_32\sqrt{3}).$$

abgebildet auf die in der folgenden Tabelle beschriebenen Punkte in der $\xi\eta$ -Ebene. Die Kanten des Würfels werden unterschiedlich verkürzt dargestellt.

$$\begin{aligned} |L\vec{e}_1| &\rightarrow \sqrt{\cos^2\varphi + (\sin\varphi\cos\vartheta)^2}L = \frac{\sqrt{13}}{4}L = 0,901L \\ |L\vec{e}_2| &\rightarrow \sqrt{\sin^2\varphi + (\cos\varphi\cos\vartheta)^2}L = \frac{\sqrt{7}}{4}L = 0,661L \\ |L\vec{e}_3| &\rightarrow \sin\vartheta L = \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0,866L \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	ξ	η
0	0	0	0	0
L	0	0	$0,866L$	$-0,25L$
L	L	0	$1,366L$	$0,183L$
0	L	0	$0,5L$	$0,433L$
0	0	L	0	$0,866L$
L	0	L	$0,866L$	$0,616L$
L	L	L	$1,366L$	$1,049L$
0	L	L	$0,5L$	$1,299L$



Die Projektionen der x_1 - und der x_2 -Achse in die $\xi\eta$ -Ebene bilden mit der ξ -Achse die Winkel

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\arctan(\tan\varphi\cos\vartheta) = -\arctan(\sqrt{3}/6) = -16,1^\circ, \\ \alpha_2 &= \arctan(\cos\vartheta/\tan\varphi) = \arctan(\sqrt{3}/2) = 40,9^\circ. \end{aligned}$$

Die folgende Abbildung zeigt die Projektion in die ξ, η -Ebene eines zu den x_i -Achsen parallelen Würfels mit Kreisen um die Würfelflächenmittelpunkte. Die drei Kreise wurden in den Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{L}{2} + r \cos \beta, & x_2 &= 0, & x_3 &= \frac{L}{2} + r \sin \beta; \\ x_1 &= L, & x_2 &= \frac{L}{2} + r \cos \beta, & x_3 &= \frac{L}{2} + r \sin \beta; \\ x_1 &= \frac{L}{2} + r \cos \beta, & x_2 &= \frac{L}{2} + r \sin \beta, & x_3 &= L \end{aligned}$$

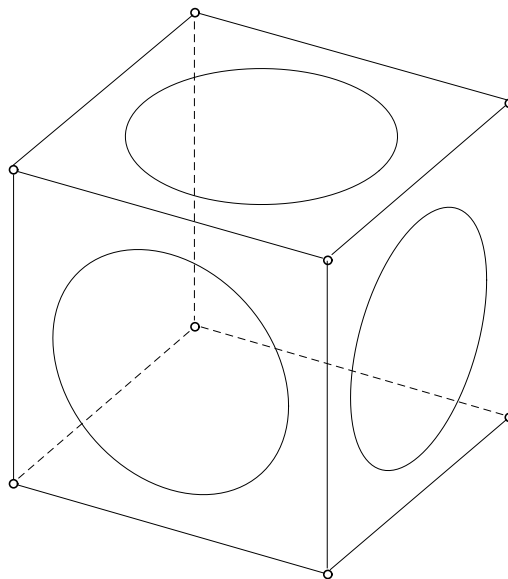
transformiert.

Für die speziellen Orientierungswinkel ($\varphi = 21,34^\circ$, $\vartheta = 70^\circ$) der ξ, η -Ebene ergeben sich die Längenveränderungen

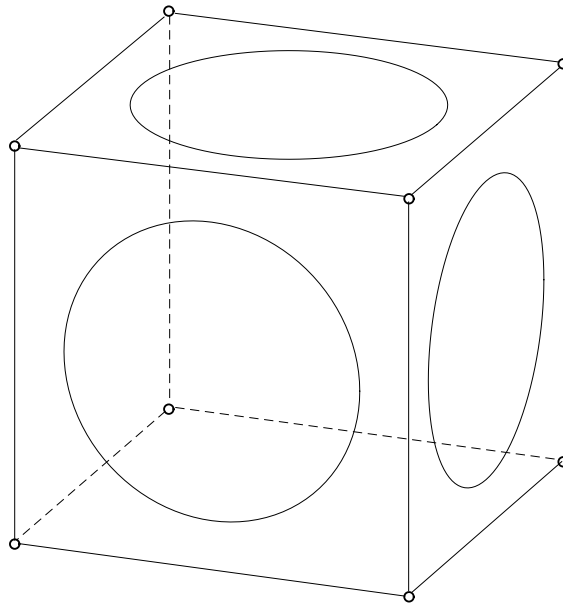
$$\begin{aligned} |L\vec{e}_1| &\rightarrow \sqrt{\cos^2 \varphi + (\sin \varphi \cos \vartheta)^2} L = 0,940 L \\ |L\vec{e}_2| &\rightarrow \sqrt{\sin^2 \varphi + (\cos \varphi \cos \vartheta)^2} L = 0,484 L \\ |L\vec{e}_3| &\rightarrow \sin \vartheta L = 0,940 L \end{aligned}$$

und die Winkel

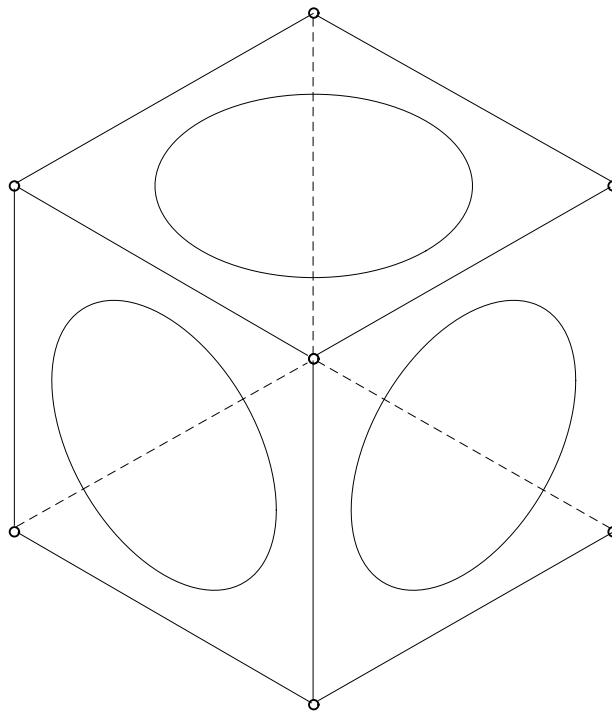
$$\alpha_1 = -\arctan(\tan \varphi \cos \vartheta) = -7,6^\circ, \quad \alpha_2 = \arctan(\cos \vartheta / \tan \varphi) = 41,2^\circ.$$



Die entsprechende Darstellung nennt man **dimetrisch**, weil es jetzt nur noch zwei verschiedene Längenänderungen achsenparalleler Strecken gibt. Man erhält in dieser Darstellung das folgende Bild des Würfels



Die **isometrische** Darstellung des Würfels



erhält man mit den Winkeln

$$(\varphi = 45^\circ, \vartheta = 54,736^\circ)$$

Dann wird $\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$ und

$$|L\vec{e}_i| \rightarrow 0,816L \quad (i=1,2,3)$$

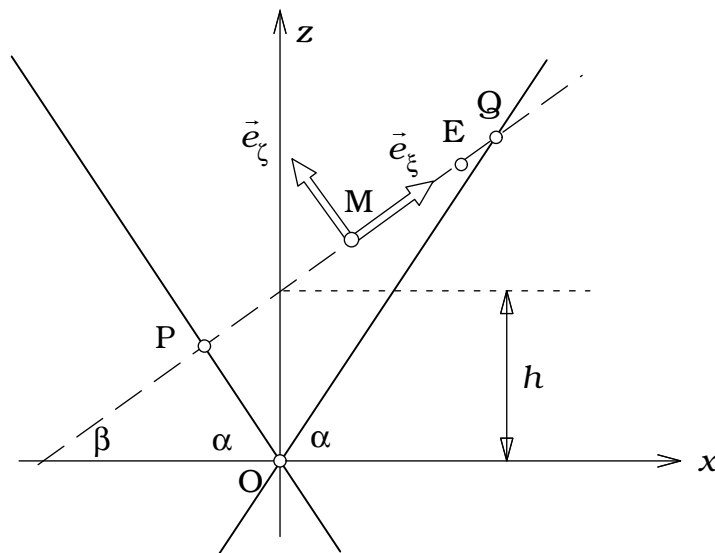
Die dimetrische und die isometrische Projektion werden im Technischen Zeichnen bevorzugt verwendet. ▲

▼ Beispiel 7.12

Man berechne die Schnittkurve eines Kreiskegels um die z - Achse mit einer Ebene, die mit der x - Achse den Winkel β bildet und die z - Achse im Abstand h von der xy - Ebene schneidet.

Der Schnittpunkt E liegt auf dem Kreiskegel und hat deshalb den Ortsvektor

$$\vec{OE} = \begin{bmatrix} r(z_E) \cos \varphi \\ r(z_E) \sin \varphi \\ z_E \end{bmatrix}, \quad \frac{z_E}{r(z_E)} = \tan \alpha, \quad \vec{OE} = z_E \begin{bmatrix} \cos \varphi / \tan \alpha \\ \sin \varphi / \tan \alpha \\ 1 \end{bmatrix};$$



E liegt aber auch auf der Schnittebene. Deshalb gilt

$$z_E = h + \tan \beta x_E = h + \tan \beta r(z_E) \cos \varphi = h + z_E \frac{\tan \beta \cos \varphi}{\tan \alpha},$$

$$z_E = h \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta \cos \varphi}.$$

Also wird

$$\vec{OE} = \frac{h}{\tan \alpha - \tan \beta \cos \varphi} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \end{bmatrix}.$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ erhalten wir die Ortsvektoren zu den Endpunkten der Strecke PQ:

$$\vec{OQ} = \frac{h}{\tan \alpha - \tan \beta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{OP} = \frac{h}{\tan \alpha + \tan \beta} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \tan \alpha \end{bmatrix}.$$

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{h}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} \left((\tan \alpha + \tan \beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan \alpha \end{bmatrix} - (\tan \alpha - \tan \beta) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \tan \alpha \end{bmatrix} \right),$$

$$\vec{PQ} = \frac{2h \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan \beta \end{bmatrix},$$

Der Ortsvektor zum Mittelpunkt M der Strecke PQ in der xz -Ebene lautet:

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \frac{1}{2} \vec{PQ} = \frac{h}{\tan \alpha + \tan \beta} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \tan \alpha \end{bmatrix} + \frac{h \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \tan \beta \end{bmatrix},$$

$$\vec{OM} = \frac{h}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} \begin{bmatrix} \tan \beta \\ 0 \\ \tan^2 \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ 0 \\ z_M \end{bmatrix}.$$

Aus dem Ortsvektor eines beliebigen Punktes K auf dem Kreiskegel

$$\vec{OK} = \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_K) \cos \varphi \\ r(z_K) \sin \varphi \\ z_K \end{bmatrix}, \quad \frac{z_K}{r(z_K)} = \tan \alpha,$$

folgt

$$x_K^2 + y_K^2 = r^2(z_K), \quad \rightarrow \quad x_K^2 + y_K^2 = \frac{z_K^2}{\tan^2 \alpha}.$$

Wir transformieren diese Gleichung in das ξ, η, ζ -Koordinatensystem im Punkt M mit den Basisvektoren

$$\bar{e}_\xi = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ 0 \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_\zeta = \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Die entsprechenden Transformationsgesetze lauten.

$$\begin{aligned} x_K &= x_M + \xi_K \cos \beta - \zeta_K \sin \beta, \\ y_K &= \eta_K, \\ z_K &= z_M + \xi_K \sin \beta + \zeta_K \cos \beta. \end{aligned}$$

Für einen Punkt E auf der Schnittkurve in der $\xi\eta$ -Ebene gilt dann insbesondere $\zeta_K = \zeta_E = 0$, also

$$\begin{aligned} x_E^2 + y_E^2 &= \frac{z_E^2}{\tan^2 \alpha}, & x_E &= x_M + \xi_E \cos \beta, \\ & & y_E &= \eta_E, \\ & & z_E &= z_M + \xi_E \sin \beta. \end{aligned}$$

$$\tan^2 \alpha \{(x_M + \xi_E \cos \beta)^2 + \eta_E^2\} = (z_M + \xi_E \sin \beta)^2,$$

$$\xi_E^2 (\tan^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + 2\xi_E (x_M \tan^2 \alpha \cos \beta - z_M \sin \beta) + \tan^2 \alpha \eta_E^2 = z_M^2 - \tan^2 \alpha x_M^2.$$

Mit dem oben berechneten Ortsvektor

$$\vec{OM} = \frac{h}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} \begin{bmatrix} \tan \beta \\ 0 \\ \tan^2 \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ 0 \\ z_M \end{bmatrix},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} x_M \tan^2 \alpha \cos \beta - z_M \sin \beta &= \frac{h}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} (\tan \beta \tan^2 \alpha \cos \beta - \tan^2 \alpha \sin \beta) = 0, \\ z_M^2 - \tan^2 \alpha x_M^2 &= \frac{h^2}{(\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)^2} (\tan^4 \alpha - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta) = \frac{h^2 \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}, \end{aligned}$$

und schließlich

$$\frac{\cos^2 \beta (\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta)^2}{h^2 \tan^2 \alpha} \xi_E^2 + \frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}{h^2} \eta_E^2 = 1.$$

Die Schnittkurve ist also eine Ellipse mit den Halbachsen a und b :

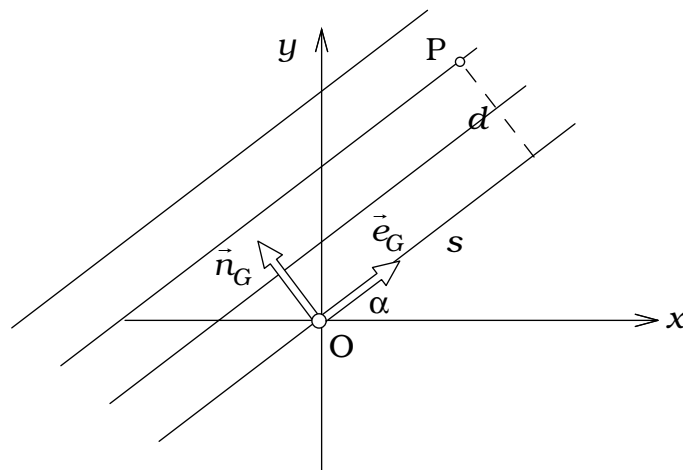
$$\frac{\xi_E^2}{a^2} + \frac{\eta_E^2}{b^2} = 1, \quad a = h \frac{\tan \alpha}{(\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta) \cos \beta}, \quad b = \frac{h}{\sqrt{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}}.$$



▼ Beispiel 7.13

Man bestimme die Gleichungen paralleler Geraden in der Ebene und paralleler Ebenen im dreidimensionalen Raum.

(1) Parallele Geraden in der xy -Ebene:



Mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_G = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_G = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix},$$

gilt für den Ortsvektor eines Punktes P auf einer Geraden, die von der parallelen Geraden durch den Nullpunkt O den Abstand d hat,

$$\vec{OP} = s \vec{e}_G + d \vec{n}_G,$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Wenn wir die Koordinate s eliminieren, erhalten wir die Darstellung paralleler Geraden in der xy -Ebene:

$$\begin{aligned} \vec{OP} \cdot \vec{n}_G &= d, \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha &= d, \end{aligned}$$

und wenn $d \neq 0$ ist

$$\frac{x}{(-d/\sin \alpha)} + \frac{y}{(d/\cos \alpha)} = 1.$$

(2) Parallele Ebenen im dreidimensionalen Raum:

Die in der Ebene E benutzte Basis soll durch zwei Drehungen aus der Raumbasis hervorgehen:

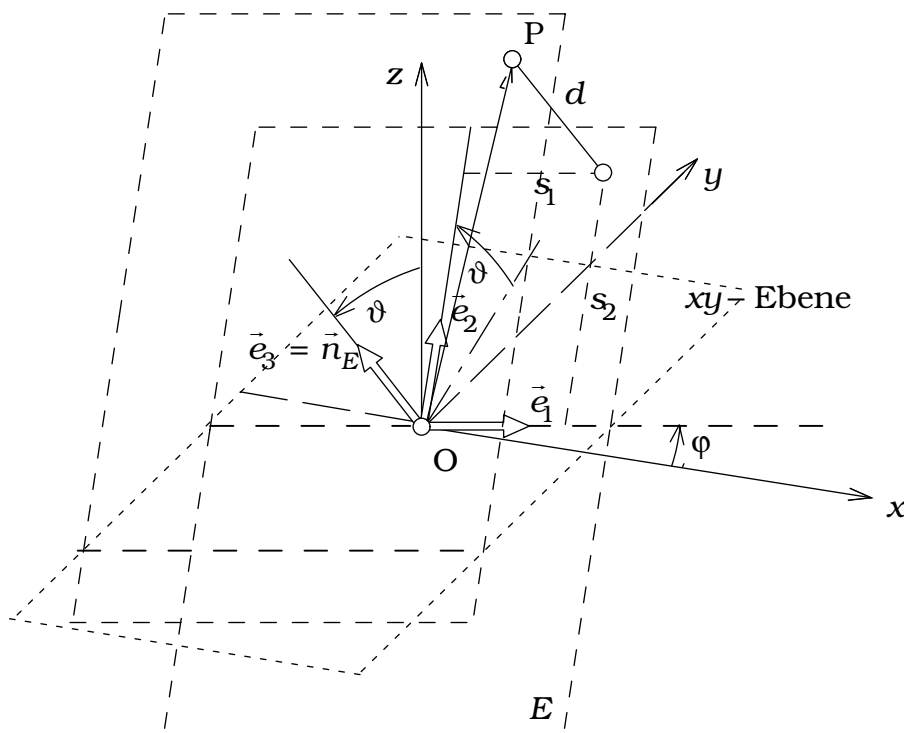
$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_\xi, \\ \vec{e}_2 &= \cos \vartheta \vec{e}_\eta + \sin \vartheta \vec{e}_\zeta, \\ \vec{e}_3 &= -\sin \vartheta \vec{e}_\eta + \cos \vartheta \vec{e}_\zeta. \end{aligned}$$

Die Einheitsvektoren

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_2 &= \cos \vartheta (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) + \sin \vartheta \vec{e}_z, \end{aligned}$$

bilden die Basis in der den Nullpunkt O enthaltenden Ebene mit dem Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n}_E = \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = -\sin \vartheta (-\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y) + \cos \vartheta \vec{e}_z.$$



Ein Punkt P in einer dazu parallelen Ebene, die den Abstand d von der durch den Nullpunkt gehenden Ebene hat, lautet

$$\vec{OP} = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 + d \vec{n}_E,$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Wenn wir die Ebenenkoordinaten s_1 und s_2 eliminieren, erhalten wir die Gleichung der parallelen Ebene:

$$\vec{OP} \cdot \vec{n}_E = d,$$

$$x \sin \varphi \cos \vartheta - y \cos \varphi \sin \vartheta + z \cos \vartheta = d,$$

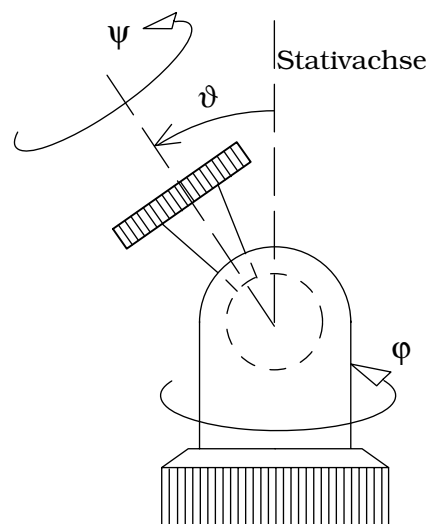
und wenn $d \neq 0$ ist

$$\frac{x}{d/(\sin \varphi \cos \vartheta)} + \frac{y}{d/(-\cos \varphi \sin \vartheta)} + \frac{z}{d/\cos \vartheta} = 1.$$



▼ Beispiel 7.14

Am Kugelkopf eines Kamerastativs können die folgenden Drehungen einer Kamera ausgeführt werden:



- (1) Drehung des Kopflagers um den Winkel φ um die vertikale Stativachse,
- (2) Neigung der Kopfes um den Winkel ϑ ,
- (3) Drehung der Kamera um den Winkel ψ um die Kopfachse.

Das Ergebnis dieser Drehungen ist unabhängig von der Reihenfolge der drei Drehungen.

Wenn man diese Drehungen entsprechend mit einer um den Punkt A drehbaren Basis von zueinander orthogonalen Einheitsvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ausführt, erhält man Basisvektoren, die in einer raumfesten Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ beschrieben werden können.

$$\{\vec{e}_1^{(0)}, \vec{e}_2^{(0)}, \vec{e}_3^{(0)}\} \xRightarrow{\varphi} \{\vec{e}_1^{(1)}, \vec{e}_2^{(1)}, \vec{e}_3^{(1)}\} \xRightarrow{\vartheta} \{\vec{e}_1^{(2)}, \vec{e}_2^{(2)}, \vec{e}_3^{(2)}\} \xRightarrow{\psi} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}.$$

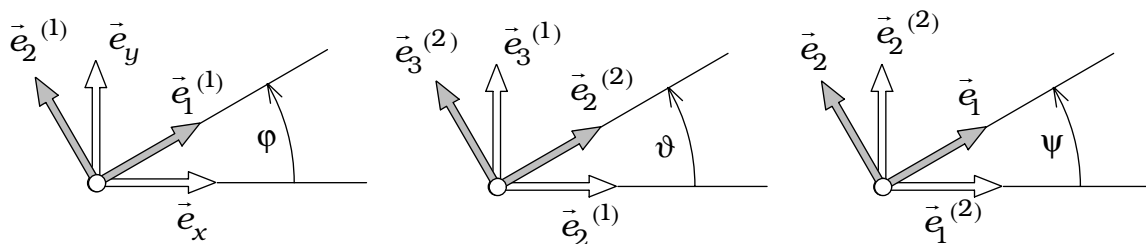
In der Ausgangslage sei

$$\vec{e}_1^{(0)} = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_2^{(0)} = \vec{e}_y, \quad \vec{e}_3^{(0)} = \vec{e}_z.$$

Dann werden die folgenden Drehungen ausgeführt:

- (1) Drehung um $\vec{e}_3^{(0)} = \vec{e}_z$, Drehwinkel φ ,
- (2) Drehung um $\vec{e}_1^{(1)}$, Drehwinkel ϑ ,
- (3) Drehung um $\vec{e}_3^{(2)}$, Drehwinkel ψ .

Aus den folgenden Bildern lassen sich die Darstellungen der geänderten Basisvektoren in der jeweiligen Ausgangsbasis ablesen:



Nach der ersten Drehung um den Winkel φ um die \vec{e}_z - Achse durch A entsteht die Basis

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{(1)} &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_2^{(1)} &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_3^{(1)} &= \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Eine weitere Drehung um den Winkel ϑ um die $\vec{e}_1^{(1)}$ -Achse durch A erzeugt die Basis

$$\begin{aligned}\vec{e}_1^{(2)} &= \vec{e}_1^{(1)} \\ \vec{e}_2^{(2)} &= \cos \vartheta \vec{e}_2^{(1)} + \sin \vartheta \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{e}_3^{(2)} &= -\sin \vartheta \vec{e}_2^{(1)} + \cos \vartheta \vec{e}_3^{(1)}.\end{aligned}$$

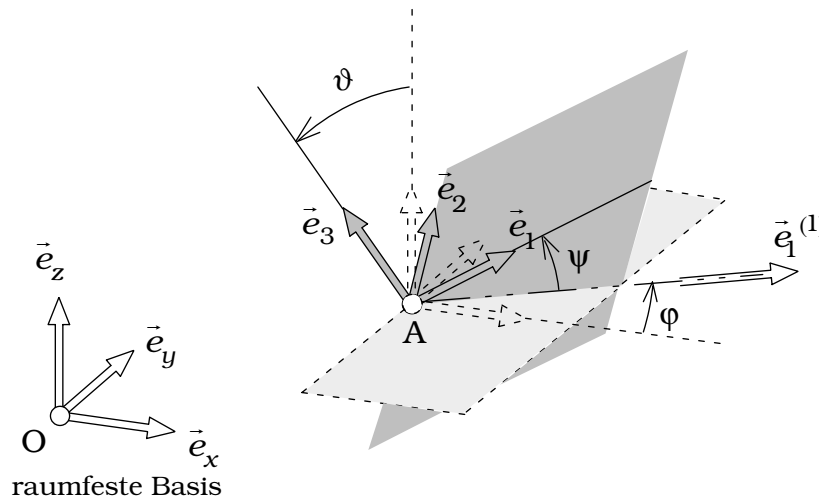
Die dritte Drehung um den Winkel ψ um die $\vec{e}_3^{(2)}$ -Achse durch A lässt die Basis

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos \psi \vec{e}_1^{(2)} + \sin \psi \vec{e}_2^{(2)}, \\ \vec{e}_2 &= -\sin \psi \vec{e}_1^{(2)} + \cos \psi \vec{e}_2^{(2)}, \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_3^{(2)}\end{aligned}$$

entstehen.

Wir können nun die Basisvektoren der Zwischenzustände eliminieren und erhalten die Darstellung der gedrehten körperfesten Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ in der raumfesten Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi) \vec{e}_x + (\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi) \vec{e}_y + \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_z, \\ \vec{e}_2 &= (-\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi) \vec{e}_x + (-\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi) \vec{e}_y + \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_z, \\ \vec{e}_3 &= \sin \varphi \sin \vartheta \vec{e}_x - \cos \varphi \sin \vartheta \vec{e}_y + \cos \vartheta \vec{e}_z.\end{aligned}$$



Man nennt die beschriebenen Drehwinkel EULERSche Winkel.

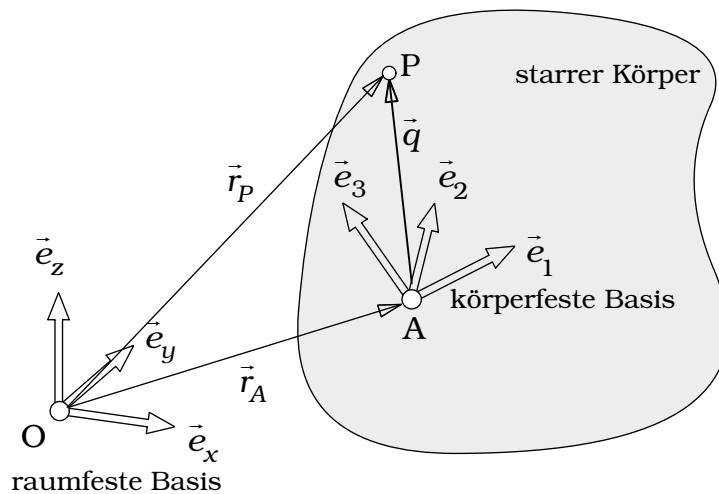
Der Vektor $\vec{e}_1^{(1)}$ hat die Richtung der Schnittgeraden zwischen der raumfesten (\vec{e}_x, \vec{e}_y) -Ebene durch A und der gedrehten (\vec{e}_1, \vec{e}_2) -Ebene durch A; sie wird Knotenlinie genannt.



▼ Beispiel 7.15

Das Geschwindigkeitsvektorfeld eines starren Körpers soll berechnet werden. Im Punkt A eines starren Körpers führen wir eine körperfeste rechtshändige Basis von zueinander orthogonalen Einheitsvektoren ein. Diese Basisvektoren ändern bei einer Drehbewegung des starren Körpers ihre Orientierung im Raum, werden also Funktionen der Zeit t , erfüllen aber andauernd die Orthogonalitäts- und Einheitsvektorbedingungen

$$(B1) \quad \vec{e}_i(t) \cdot \vec{e}_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$



Wenn wir diese Bedingungen nach der Zeit differenzieren, erhalten wir die Gleichungen

$$(B2) \quad \frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} \cdot \vec{e}_j(t) + \vec{e}_i(t) \cdot \frac{d\vec{e}_j(t)}{dt} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Weil die Zeitableitung eines Vektors wieder ein Vektor ist, den wir in der körperfesten Basis darstellen können, dürfen wir schreiben

$$\frac{d\vec{e}_i(t)}{dt} = \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik}(t) \vec{e}_k(t), \quad i = 1, 2, 3.$$

Damit erhält die Bedingung (B2) die Gestalt

$$\sum_{k=1}^3 \Omega_{ik}(t) \vec{e}_k(t) \cdot \vec{e}_j(t) + \vec{e}_i(t) \cdot \sum_{k=1}^3 \Omega_{jk}(t) \vec{e}_k(t) = 0.$$

Wegen der Bedingung (B1) für die körperfesten Einheitsvektoren liefern diese Gleichungen für die insgesamt 9 zeitabhängigen Komponenten $\Omega_{ik}(t)$ die für jeden Zeitpunkt t geltenden Aussagen:

$$\Omega_{ij}(t) + \Omega_{ji}(t) = 0, \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \Omega_{11}(t) &= \Omega_{22}(t) = \Omega_{33}(t) \equiv 0, \\ \Omega_{12}(t) &= -\Omega_{21}(t), \quad \Omega_{23}(t) = -\Omega_{32}(t), \quad \Omega_{31}(t) = -\Omega_{13}(t). \end{aligned}$$

Es bleiben also nur drei Komponenten übrig, die wir jetzt neu bezeichnen:

$$\Omega_{12}(t) =: \omega_3(t), \quad \Omega_{23}(t) =: \omega_1(t), \quad \Omega_{31}(t) =: \omega_2(t).$$

Für die Zeitableitungen führen wir nun eine einfachere Schreibweise ein. Ein Punkt über dem Funktionssymbol bedeutet Differentiation nach der Zeit t . Damit wird

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \sum_{k=1}^3 \Omega_{ik}(t) \vec{e}_k(t), \quad i=1,2,3. \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1(t) &= \omega_3(t) \vec{e}_2(t) - \omega_2(t) \vec{e}_3(t), \\ \dot{\vec{e}}_2(t) &= \omega_1(t) \vec{e}_3(t) - \omega_3(t) \vec{e}_1(t), \\ \dot{\vec{e}}_3(t) &= \omega_2(t) \vec{e}_1(t) - \omega_1(t) \vec{e}_2(t), \end{aligned}$$

Als **Winkelgeschwindigkeitsvektor des starren Körpers** definieren wir

$$\vec{\omega}(t) := \omega_1(t) \vec{e}_1(t) + \omega_2(t) \vec{e}_2(t) + \omega_3(t) \vec{e}_3(t).$$

Damit können wir die wichtigste Formel der Kinematik starrer Körper schließlich schreiben

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_1(t) &= \omega_3(t) \vec{e}_2(t) - \omega_2(t) \vec{e}_3(t), \\ \dot{\vec{e}}_2(t) &= \omega_1(t) \vec{e}_3(t) - \omega_3(t) \vec{e}_1(t), \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i(t), \quad i=1,2,3, \\ \dot{\vec{e}}_3(t) &= \omega_2(t) \vec{e}_1(t) - \omega_1(t) \vec{e}_2(t), \end{aligned}$$

denn es gilt vereinbarungsgemäß dauernd die Tabelle für die Kreuzprodukte der körperfesten Basisvektoren

	$\vec{e}_1(t)$	$\vec{e}_2(t)$	$\vec{e}_3(t)$
$\vec{e}_1(t) \times$	$\vec{0}$	$\vec{e}_3(t)$	$-\vec{e}_2(t)$
$\vec{e}_2(t) \times$	$-\vec{e}_3(t)$	$\vec{0}$	$\vec{e}_1(t)$
$\vec{e}_3(t) \times$	$\vec{e}_2(t)$	$-\vec{e}_1(t)$	$\vec{0}$

Die Darstellung der körperfesten Basisvektoren in der raumfesten Basis lautet

$$\vec{e}_i(t) = e_{ix}(t) \vec{e}_x + e_{iy}(t) \vec{e}_y + e_{iz}(t) \vec{e}_z, \quad i=1,2,3.$$

Die im Beispiel 1.15 beschriebenen EULER-Drehungen liefern eine Darstellung der Basisvektoren mit den zeitabhängigen Winkeln $\varphi(t), \vartheta(t)$ und $\psi(t)$. Es bedeutet also

$$\vec{e}_i(t) = \vec{e}_i(\varphi(t), \vartheta(t), \psi(t)).$$

Den entsprechenden Winkelgeschwindigkeitsvektor erhalten wir am bequemsten über die aus den einzelnen EULER-Drehungen sich ergebenden Darstellung

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t) \vec{e}_z + \dot{\vartheta}(t) \vec{e}_1^{(1)}(t) + \dot{\psi}(t) \vec{e}_3(t).$$

Dazu ist es erforderlich, die Einheitsvektoren \vec{e}_z und $\vec{e}_1^{(1)}(t)$ in der momentanen Basis $\{\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t), \vec{e}_3(t)\}$ darzustellen.

Aus den Zwischenergebnissen im Beispiel 1.15 entnehmen wir

$$\begin{aligned} \vec{e}_z &= \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{e}_3^{(1)} &= \sin \vartheta \vec{e}_2^{(2)} + \cos \vartheta \vec{e}_3^{(2)}, \\ \vec{e}_2^{(2)} &= \sin \psi \vec{e}_1 + \cos \psi \vec{e}_2, \\ \vec{e}_3^{(2)} &= \vec{e}_3; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \vec{e}_z = \sin \vartheta \sin \psi \vec{e}_1 + \sin \vartheta \cos \psi \vec{e}_2 + \cos \vartheta \vec{e}_3;$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^{(1)} &= \vec{e}_1^{(2)}, \\ \vec{e}_1^{(2)} &= \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2; \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \vec{e}_1^{(1)} = \cos \psi \vec{e}_1 - \sin \psi \vec{e}_2,$$

Also wird schließlich

$$\vec{\omega} = (\dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi) \vec{e}_1 + (\dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi) \vec{e}_2 + (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \vec{e}_3,$$

wobei alle Terme zum Zeitpunkt t zu nehmen sind.

Will man den Winkelgeschwindigkeitsvektor in der raumfesten Basis darstellen, so benötigen wir die Darstellungen der Vektoren $\vec{e}_1^{(1)}(t)$ und $\vec{e}_3(t)$ in der Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

Aus den Ergebnissen im Beispiel 1.15 folgt sofort

$$\vec{e}_1^{(1)} = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y,$$

und mit

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{e}_3^{(2)}, \\ \vec{e}_3^{(2)} &= -\sin\vartheta \vec{e}_2^{(1)} + \cos\vartheta \vec{e}_3^{(1)}, \\ \vec{e}_2^{(1)} &= -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_3^{(1)} &= \vec{e}_z, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \vec{e}_3 = \sin\varphi \sin\vartheta \vec{e}_x - \cos\varphi \sin\vartheta \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z,$$

erhalten wir aus

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(t) &= \dot{\varphi}(t) \vec{e}_z + \dot{\vartheta}(t) \vec{e}_1^{(1)}(t) + \dot{\psi}(t) \vec{e}_3(t) \\ \vec{\omega} &= (\dot{\psi} \sin\varphi \sin\vartheta + \dot{\vartheta} \cos\varphi) \vec{e}_x + (-\dot{\psi} \cos\varphi \sin\vartheta + \dot{\vartheta} \sin\varphi) \vec{e}_y + (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos\vartheta) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Der Betrag des Winkelgeschwindigkeitsvektors hat selbstverständlich sowohl in der körperfesten wie in der raumfesten Darstellung den Wert

$$|\dot{\vec{\omega}}| = \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos\vartheta}.$$

Bei einer Bewegung des starren Körpers wird der **Ortsvektor** des Körperpunktes A ein zeitabhängiger Vektor, den wir in der raumfesten Basis mit zeitabhängigen Komponenten darstellen:

$$\vec{r}_A(t) = x_A(t) \vec{e}_x + y_A(t) \vec{e}_y + z_A(t) \vec{e}_z.$$

Die Zeitableitung dieses Vektors ist der **Geschwindigkeitsvektor** des Körperpunktes A:

$$\vec{v}_A(t) = \dot{\vec{r}}_A(t) = \dot{x}_A(t) \vec{e}_x + \dot{y}_A(t) \vec{e}_y + \dot{z}_A(t) \vec{e}_z.$$

Der Punkt P des starren Körpers hat in der körperfesten Basis definitionsgemäß zeitunabhängige Koordinaten q_1, q_2, q_3 , also gilt

$$\vec{AP}(t) = \vec{q}(t) = \sum_{i=1}^3 q_i \vec{e}_i(t).$$

Der auf das raumfeste System bezogene Ortsvektor des Punktes P lautet

$$\vec{r}_P(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{AP}(t) = \vec{r}_A(t) + \sum_{i=1}^3 q_i \vec{e}_i(t),$$

und der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}_P(t) = \dot{\vec{r}}_A(t) + \dot{\vec{AP}}(t) = \dot{\vec{r}}_A(t) + \sum_{i=1}^3 q_i \dot{\vec{e}}_i(t).$$

Oben wurde die wichtige Formel für die zeitliche Änderung der körperfesten Basisvektoren

$$\dot{\vec{e}}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

abgeleitet. Damit wird

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_A(t) + \sum_{i=1}^3 q_i \vec{\omega}(t) \times \vec{e}_i(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \times \sum_{i=1}^3 q_i \vec{e}_i(t)$$

$$\vec{v}_P(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{AP}(t).$$

Das ist die gesuchte Formel für das **Geschwindigkeitsvektorfeld eines starren Körpers**. Es folgt daraus die Starrheitsbedingung

$$\vec{v}_P(t) \cdot \vec{AP}(t) = \vec{v}_A(t) \cdot \vec{AP}(t).$$

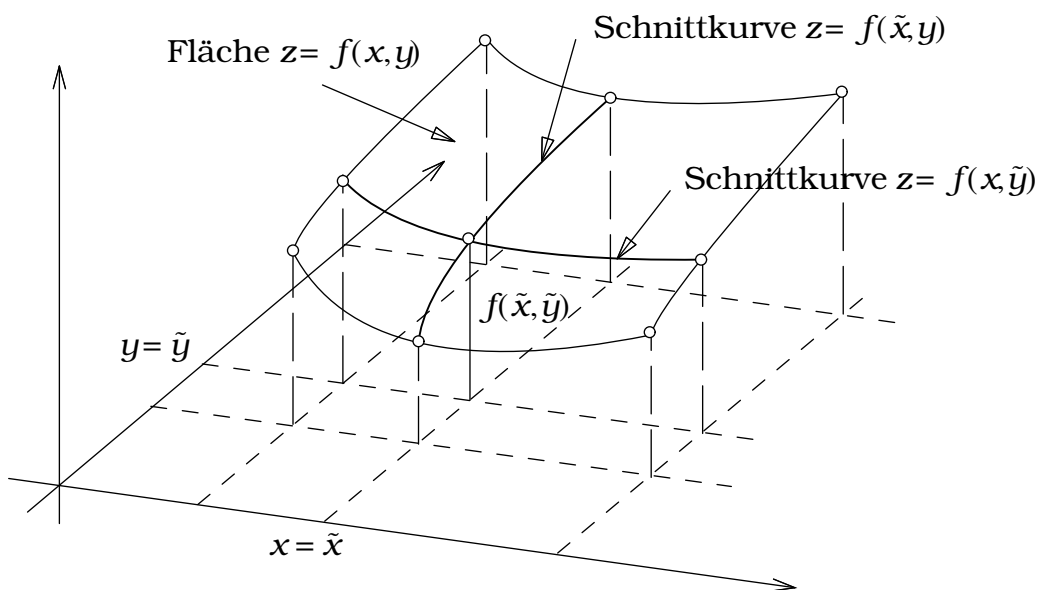
Die Projektionen der Geschwindigkeitsvektoren von zwei Körperpunkten auf den Verbindungsvektor dieser Punkte sind gleich groß, also bleibt der Abstand der Punkte ungeändert.



Funktionen von zwei Variablen

8.1 Differentialrechnung

Eine **Funktion** $f(x,y)$ **von zwei voneinander unabhängigen Variablen** x und y kann im dreidimensionalen Raum als Fläche über dem Definitionsbereich A in der xy -Ebene graphisch dargestellt werden.

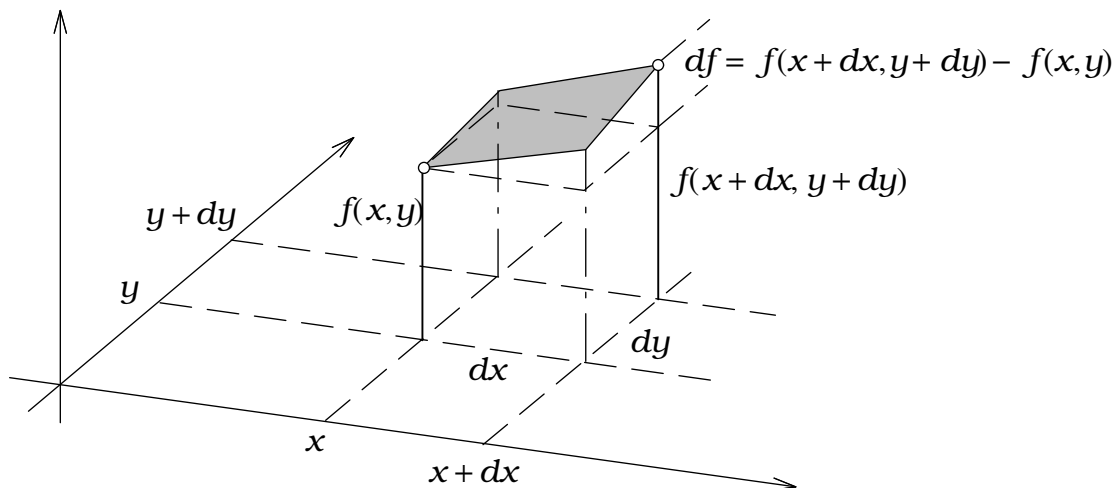


Die Kurve $z = f(x, \tilde{y})$ ist dann die zur xz -Ebene parallele Schnittkurve der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $y = \tilde{y} = \text{const}$ und die Kurve $z = f(\tilde{x}, y)$ die zur yz -Ebene parallele Schnittkurve der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene $x = \tilde{x} = \text{const}$.

Die Steigungen solcher Schnittkurven im Raumpunkt $\{x, y, z = f(x, y)\}$ sind die **partiellen Differentialquotienten**

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} := \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Bei partiellen Ableitungen wird also die nicht betroffene Variable wie eine Konstante behandelt.



Für die Änderung des Funktionswertes $f(x, y)$, wenn wir in der xy -Ebene vom Punkt $\{x, y\}$ zum infinitesimal benachbarten Punkt $\{x + dx, y + dy\}$ weitergehen, schreiben wir

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Wir nennen df das **totale Differential** der Funktion $f(x, y)$ und bezeichnen

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

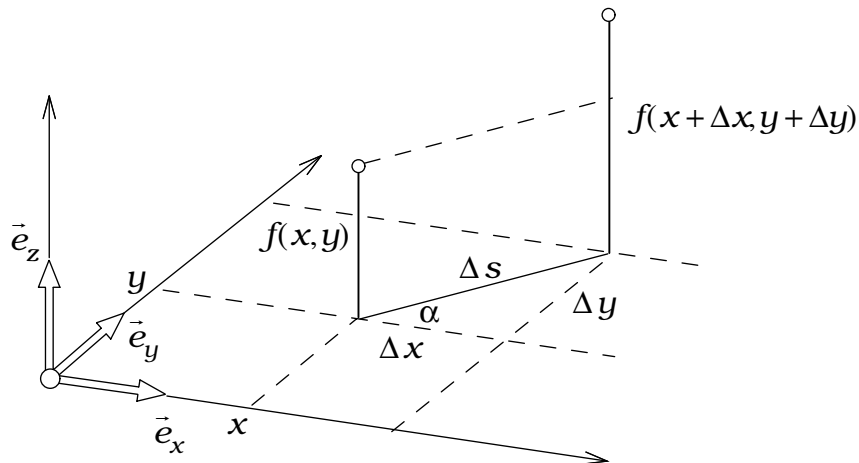
als **Zuwachsformel** für die Funktion $f(x, y)$.

Wenn wir in der xy -Ebene vom Punkt $\{x, y\}$ aus um die infinitesimale Strecke Δs in eine Richtung gehen, die den Winkel α mit der x -Achse bildet, gelangen wir in den Punkt mit den Koordinaten

$$x + \Delta x = x + \Delta s \cos \alpha, \quad y + \Delta y = y + \Delta s \sin \alpha.$$

Bis auf Terme höherer Ordnung in Δs gilt dann

$$f(x + \Delta s \cos \alpha, y + \Delta s \sin \alpha) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta s \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta s \sin \alpha.$$



Als **Richtungsableitung** der Funktion $f(x, y)$ in die Richtung, die mit der x -Achse den Winkel α bildet, definieren wir

$$\frac{df}{ds} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta s \cos \alpha, y + \Delta s \sin \alpha) - f(x, y)}{\Delta s},$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha.$$

Mit dem **Gradientenvektor** der Funktion $f(x, y)$

$$\text{grad } f := \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{e}_y$$

und dem Richtungsvektor

$$\vec{e} = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y$$

lässt sich die Richtungsableitung als inneres Produkt formulieren:

$$\frac{df}{ds} = \vec{e} \cdot \text{grad } f.$$

Wenn an der Stelle (x^*, y^*) alle Richtungsableitungen null sind, hat dort die Fläche $z = f(x, y)$ eine zur xy -Ebene parallele Tangentialebene. Das ist eine notwendige Bedingung für einen lokalen Extremwert (Maximum oder Minimum) oder einen Sattelpunkt. Die notwendigen Bedingungen für die Existenz eines Extremwertes im Punkt (x^*, y^*) lauten deshalb

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = 0.$$

Über das Verhalten der Funktion $z = f(x, y)$ in der Umgebung eines Punktes mit Nullwerten für die ersten partiellen Ableitungen geben die zweiten partiellen Ableitungen Auskunft.

Zunächst bilden wir die zweite Richtungsableitung:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{df}{ds} \right) \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{df}{ds} \right) \sin \alpha,$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos^2 \alpha + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \sin^2 \alpha,$$

Es gilt die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

und wenn wir für die zweiten partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ eine verkürzte Schreibweise einführen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: f_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) =: f_{yy}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) =: f_{xy}$$

erhalten wir

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \right) = f_{xx} \cos^2 \alpha + 2 f_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + f_{yy} \sin^2 \alpha,$$

Diese zweite Richtungsableitung, ausgewertet an einer Stelle (x^*, y^*) , wo alle ersten Richtungsableitungen null sind, gibt Auskunft über das Verhalten der Funktionsfläche $z = f(x, y)$ in der Umgebung des Punktes (x^*, y^*) . Zu unterscheiden sind insbesondere zwei Fälle:

$$\text{(Lokales Minimum)} \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} > 0 \quad \text{für alle Winkel } \alpha$$

$$\text{(Lokales Maximum)} \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} < 0 \quad \text{für alle Winkel } \alpha$$

Wenn die zweite Richtungsableitung im Intervall $0 \leq \alpha < 2\pi$ positive und negative Werte hat, ist $f(x^*, y^*)$ ein Sattelpunkt.

Sucht man die Extremwerte der Funktion $z = f(x, y)$ unter der **Nebenbedingung** $g(x, y) = 0$, so kann man mitunter die Nebenbedingung umformen

$$g(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = G(x)$$

und erhält dann die nur von x abhängende Funktion

$$F(x) := f(x, G(x)),$$

deren Extremwerte wie üblich bestimmt werden können:

$$F'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=G(x)} \frac{dG}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad x = x^*;$$

$$y^* = G(x^*) \quad \rightarrow \quad f(x^*, y^*) = \begin{cases} \text{Extremum von } f \\ \text{unter der Nebenbedingung } g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Die explizite Auflösung

$$g(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad y = G(x)$$

kann jedoch mühsam oder sogar unmöglich sein. Dann folgt aus

$$g(x, y) = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0, \quad \rightarrow \quad dy = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} dx,$$

und aus einem Vergleich der beiden Formeln für dy

$$dy = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} dx, \quad dy = \frac{dG(x)}{dx} dx$$

ergibt sich

$$\frac{dG(x)}{dx} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}},$$

und statt

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=G(x)} \frac{dG}{dx} = 0,$$

lauten die Gleichungen, aus denen die Koordinaten (x^*, y^*) der Extremwertstelle berechnet werden müssen,

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

Diese nichtlinearen Gleichungen kann man auch unmittelbar erhalten, wenn man die Nebenbedingung $g(x,y)=0$ mit einem **LAGRANGESchen Multiplikator** λ in die neue Funktion

$$\tilde{f}(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

aufnimmt und als Extremwertbedingung

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = 0$$

fordert. Das bedeutet

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen den Faktor λ , so entsteht wieder das obige Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad g(x,y) = 0.$$

▼ Beispiel 8.1.1

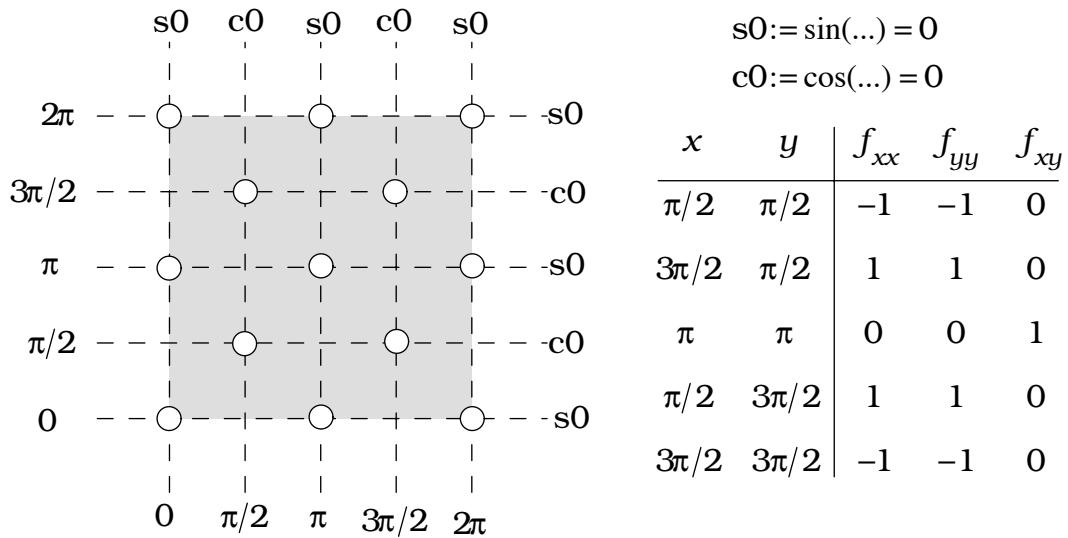
Die in x - und y -Richtung 2π -periodische Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$$

hat die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x)\sin(y), & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= -\sin(x)\sin(y), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin(x)\cos(y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= -\sin(x)\sin(y), \\ & & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \cos(x)\cos(y), \end{aligned}$$

Über dem Rechteck $\{0 \leq x \leq 2\pi; 0 \leq y \leq 2\pi\}$ in der xy -Ebene sind durch Kreise diejenigen Punkte markiert, in denen die beiden ersten partiellen Ableitungen null, also die notwendigen Bedingungen für Extremwerte erfüllt sind. Die zweiten partiellen Ableitungen in diesen Punkten sind -1 , $+1$ oder 0 . Für die fünf Punkte in der Mitte des Definitionsbereiches erhalten wir die in den folgenden Tabellen angegebenen Werte der Ableitungen und Bezeichnungen der Stellen mit Nullwerten der beiden ersten Ableitungen.



x	y	$\frac{d}{ds} \left(\frac{df}{ds} \right) =$	Vorzeichen	Typ
$\pi/2$	$\pi/2$	$-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -1$	< 0	Maximum
$3\pi/2$	$\pi/2$	$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$	> 0	Minimum
π	π	$2 \sin \alpha \cos \alpha$	$(\leq 0) \& (\geq 0)$	Sattelpunkt
$\pi/2$	$3\pi/2$	$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$	> 0	Minimum
$3\pi/2$	$3\pi/2$	$-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -1$	< 0	Maximum



▼ Beispiel 8.1.2

Um die Extremwerte der Funktion

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

zu berechnen, führen wir die Funktion

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

ein und erhalten mit den Forderungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} &= 2a_{11}x + 2a_{12}y + \lambda 2x = 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} &= 2a_{12}x + 2a_{22}y + \lambda 2y = 0, \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1 = 0;\end{aligned}$$

zunächst das homogenen lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(a_{11} + \lambda)x + a_{12}y &= 0, \\ a_{12}x + (a_{22} + \lambda)y &= 0,\end{aligned}$$

das dann und nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} + \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}^2 = \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

ist. Zu den beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung für λ

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}$$

gehören die speziellen Koordinatenpaare

$$y_1 = -\frac{a_{11} + \lambda_1}{a_{12}} x_1 =: \mu_1 x_1, \quad y_2 = -\frac{a_{11} + \lambda_2}{a_{12}} x_2 =: \mu_2 x_2,$$

die, eingesetzt in die Nebenbedingung, die Koordinatenpaare für die Extremwerte ergeben:

$$x_k^2 + (\mu_k x_k)^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}, \quad y_k = \frac{\mu_k}{\sqrt{1 + \mu_k^2}}, \quad (k = 1, 2)$$

Die Extremwerte lauten dann

$$f_k = a_{11}x_k^2 + 2a_{12}x_k y_k + a_{22}y_k^2, \quad k = 1, 2.$$



▼ Beispiel 8.1.3

Es soll der Extremwert der Funktion

$$f(x,y) = 10 - (x-2)^2 - (y-3)^2$$

im Definitionsbereich $0 \leq x \leq 6$; $0 \leq y \leq 8$ unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

bestimmt werden, also der größte Funktionswert von $f(x,y)$ über dem Viertelkreis mit dem Radius 2 um den Koordinatenursprung.

Mit der Funktion

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = -2(x-2) + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = -2(y-3) + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

$$\tilde{f}(x,y;\lambda) := 10 - (x-2)^2 - (y-3)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

lauten die Bedingungen für die Extremwerte:

Aus der ersten und zweiten Bedingung folgt

$$x = \frac{2}{\lambda-1}, \quad y = \frac{3}{\lambda-1}$$

und damit aus der dritten

$$\frac{4}{(\lambda-1)^2} + \frac{9}{(\lambda-1)^2} = 4 \rightarrow (\lambda-1)^2 = \frac{13}{4} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \frac{\sqrt{13}}{2} \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Für die Positionen der Extremstellen erhalten wir dann die Koordinaten

$$x_1 = \frac{2}{\lambda_1-1} = \frac{4}{\sqrt{13}} = 1,1094, \quad y_1 = \frac{3}{\lambda_1-1} = \frac{6}{\sqrt{13}} = 1,6641,$$

$$x_2 = -x_1, \quad y_2 = -y_1.$$

Der Punkt $\{x_2, y_2\}$ liegt nicht im Definitionsbereich und der gesuchte Extremwert der Funktion $f(x,y)$ ist

$$f(x_1, y_1) = 10 - (x_1 - 2)^2 - (y_1 - 3)^2 = 7,4222.$$

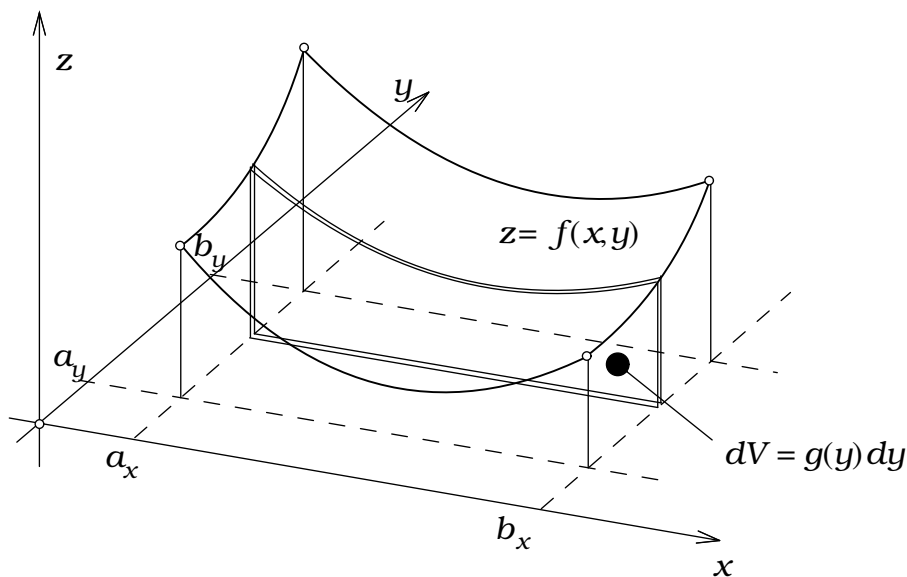


8.2 Integralrechnung

Um das Volumen V zwischen der Fläche $z = f(x,y)$ und dem Definitionsbereich $A: \{a_x \leq x \leq b_x, a_y \leq y \leq b_y\}$ der Funktion $f(x,y)$ in der xy -Ebene zu berechnen, unterteilen wir das Volumen in infinitesimal dünne Scheiben der Dicke dy parallel zur xz -Ebene.

Das Volumen der dünnen Scheibe um die Schnittfläche $y = \text{const}$ ist dann

$$dV = \left\{ \int_{a_x}^{b_x} f(x,y) dx \right\} dy = g(y) dy.$$



Addieren wir nun die Volumina aller Scheiben im Intervall $a_y \leq y \leq b_y$, so erhalten wir das gesuchte Volumen

$$V = \int_{a_y}^{b_y} g(y) dy = \int_{a_y}^{b_y} \left\{ \int_{a_x}^{b_x} f(x,y) dx \right\} dy.$$

Man kann diese Volumenberechnung auch auf andere Weise interpretieren: Mit dem infinitesimalen Flächenelement $dA = dx dy$ in der xy -Ebene ist

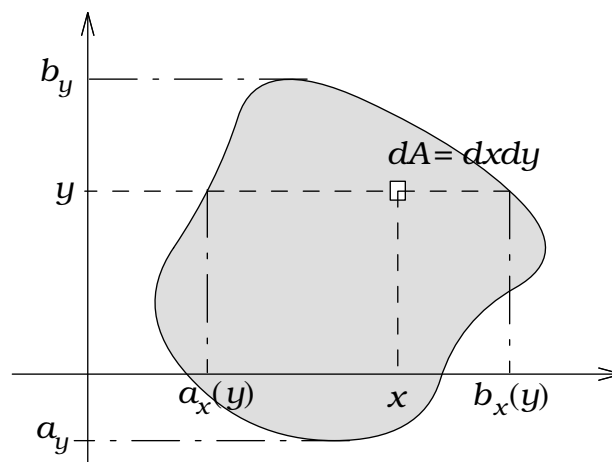
$$d\hat{V} = f(x,y) dA$$

das Volumen einer Säule der Höhe $f(x,y)$ mit dem infinitesimalen Rechteckquerschnitt $dA = dx dy$ über dem Punkt $\{x,y\}$ im Definitionsbereich A .

Das Volumen V unter der Fläche $z = f(x,y)$ über der Grundfläche A können wir dann schreiben

$$V = \underbrace{\int_A d\hat{V}}_{\text{symbolische Schreibweise}} = \int_{a_y}^{b_y} \left\{ \int_{a_x}^{b_x} f(x,y) dx \right\} dy.$$

Man muss also zunächst das innere Integral berechnen und dabei die y -Koordinate wie eine Konstante behandeln; erst im zweiten Integrationsschritt wird dann die y -Integration ausgeführt.



Ist das Integrationsgebiet A kein achsenparalleles Rechteck, so werden die x -Integrationsbereiche Funktionen von y

$$a_x(y) \leq x \leq b_x(y)$$

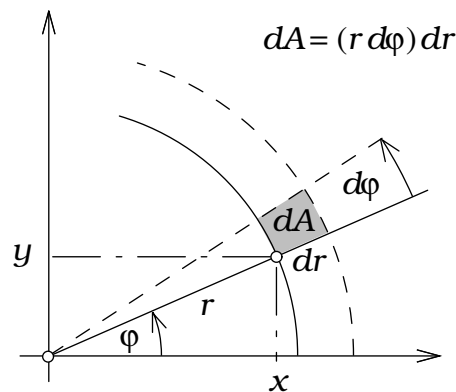
und es wird

$$V = \int_{a_y}^{b_y} \left\{ \underbrace{\int_{a_x(y)}^{b_x(y)} f(x,y) dx}_{y=\text{const}} \right\} dy.$$

Wenn sich das Integrationsgebiet A beispielsweise mit Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



einfacher beschreiben lässt als in kartesischen Koordinaten, ist es zweckmäßig, die Integration in Polarkoordinaten auszuführen. Der Integrand muss dann zunächst in eine Funktion von r und φ umgewandelt werden:

$$f(x,y) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) =: F(r,\varphi).$$

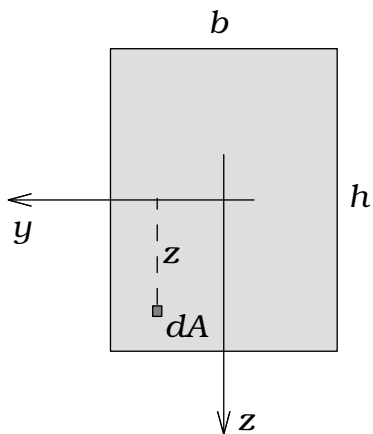
Das **Flächenelement in Polarkoordinaten** lautet

$$dA = (r d\varphi) dr = r dr d\varphi$$

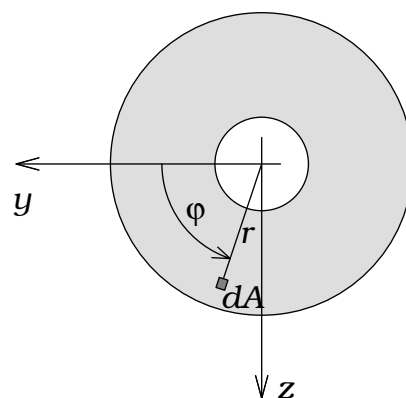
und die entsprechende Integrationsvorschrift

$$\int_A f(x,y) dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi) r dr \right\} d\varphi.$$

▼ Beispiel 8.2.1



$$\begin{aligned} -b/2 &\leq y \leq b/2, \\ -h/2 &\leq z \leq h/2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r_i &\leq r \leq r_a, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Für ein Rechteck und einen Kreisring in der yz -Ebene sollen die Flächenmomente 2. Ordnung bezogen auf die y -Achse

$$I_{yy} = \int_A z^2 dA$$

berechnet werden. Beim Rechteck verwenden wir kartesische Koordinaten mit dem Flächenelement $dA = dydz$ und beim Kreisring Polarkoordinaten mit dem Flächenelement $dA = r dr d\varphi$ und der Koordinatentransformation

$$z = r \sin \varphi.$$

Dabei ist zu berücksichtigen

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi \cos \varphi).$$

Rechteck

$$I_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dy \right\} dz,$$

$$I_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz,$$

$$I_{yy} = \frac{h^3 b}{12};$$

Kreisring

$$I_{yy} = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{r_i}^{r_a} r^2 \sin^2 \varphi r dr \right\} d\varphi,$$

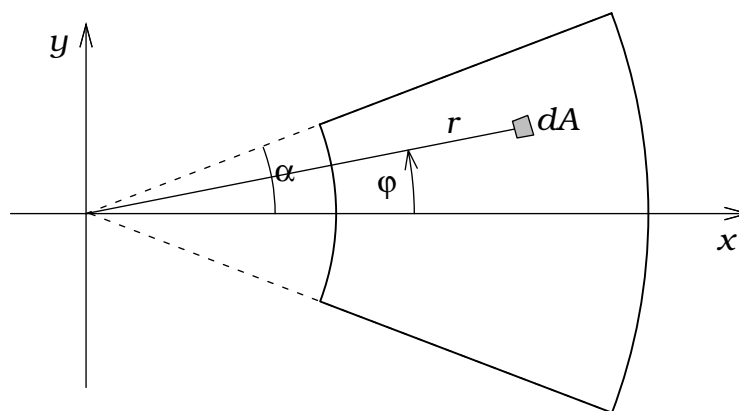
$$I_{yy} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (r_a^4 - r_i^4) \sin^2 \varphi d\varphi,$$

$$I_{yy} = \frac{\pi}{4} (r_a^4 - r_i^4).$$



▼ Beispiel 8.2.2

Die Fläche und der Schwerpunkt S eines zur x -Achse symmetrischen Kreisringsektors



$$\{r_i \leq r \leq r_a, -\alpha \leq \varphi \leq \alpha\}$$

sind definiert durch die Integrale

$$A = \int_A dA, \quad x_S = \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad y_S = \frac{1}{A} \int_A y dA.$$

Wegen der Symmetrie bezüglich der x -Achse wird $y_S = 0$.

$$A = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \int_{r_i}^{r_a} r dr \right\} d\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} (r_a^2 - r_i^2) d\varphi = (r_a^2 - r_i^2) \alpha.$$

$$\int_A x dA = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \int_{r_i}^{r_a} r^2 \cos \varphi dr \right\} d\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{3} (r_a^3 - r_i^3) \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} (r_a^3 - r_i^3) \sin \alpha,$$

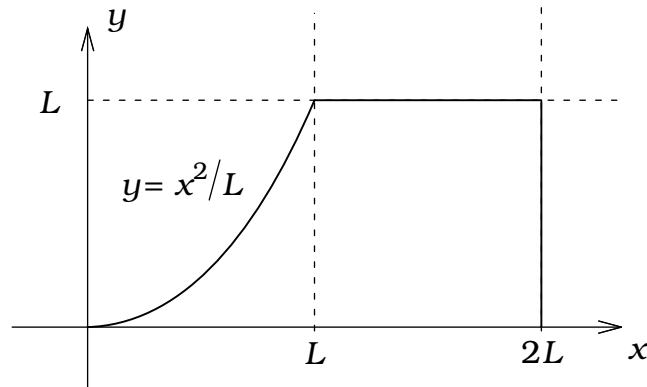
$$x_S = \frac{2}{3} \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Speziell für den Halbkreis $\{ r_i = 0, r_a = R, \alpha = \pi/2 \}$ wird

$$x_S = \frac{4}{3\pi} R = 0,424 R.$$



▼ Beispiel 8.2.3



Der Flächeninhalt des Rechtecks mit einem parabelförmigen Ausschnitt ist

$$A = \int_{y=0}^L \left\{ \int_{x=\sqrt{Ly}}^{2L} dx \right\} dy = \int_{y=0}^L \{ 2L - \sqrt{L}\sqrt{y} \} dy$$

$$A = \left\{ 2Ly - \sqrt{L} \frac{2}{3} y^{3/2} \right\} \Big|_{y=0}^{y=L} = 2L^2 - \frac{2}{3} L^2 = \frac{4}{3} L^2.$$



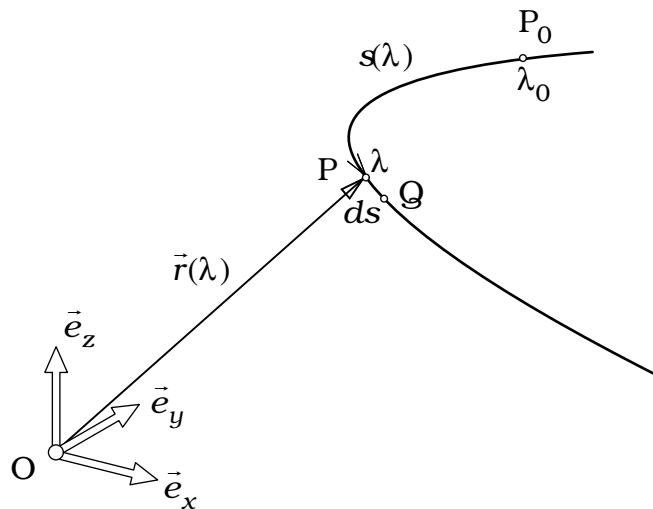
9

Kurvengeometrie

Eine Raumkurve wird durch einen Ortsvektor \vec{r} beschrieben, dessen Komponenten stetige und wenigstens stückweise differenzierbare Funktionen eines Kurvenparameters λ sind:

$$\vec{r}(\lambda) = x(\lambda) \vec{e}_x + y(\lambda) \vec{e}_y + z(\lambda) \vec{e}_z = \begin{bmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Jedem Kurvenpunkt P ist eindeutig ein Wert des Kurvenparameters λ zugeordnet. Deshalb kann λ auch als Koordinate von P auf der Raumkurve verwendet werden.



Der Verbindungsvektor von zwei infinitesimal benachbarten Kurvenpunkten P:(λ) und Q:($\lambda + d\lambda$)

$$\vec{PQ} = \vec{r}(\lambda + d\lambda) - \vec{r}(\lambda) = \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \begin{bmatrix} dx(\lambda) / d\lambda \\ dy(\lambda) / d\lambda \\ dz(\lambda) / d\lambda \end{bmatrix} d\lambda =: d\vec{r}$$

hat die Länge

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx/d\lambda)^2 + (dy/d\lambda)^2 + (dz/d\lambda)^2} d\lambda$$

die man auch Bogenelement nennt. Integriert man die Bogenelemente zwischen den Kurvenpunkten $P_0: (\lambda_0)$ und $P: (\lambda)$, so erhält man die **Bogenlänge**

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \sqrt{(dx/d\lambda)^2 + (dy/d\lambda)^2 + (dz/d\lambda)^2} d\lambda.$$

der Raumkurve zwischen den beiden Punkten P_0 und P . Der Punkt P_0 wurde dabei willkürlich als Nullpunkt der Bogenlängenmessung gewählt. Es gilt

$$\frac{ds(\lambda)}{d\lambda} = \left| \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \right|.$$

Da $s(\lambda)$ eine monoton wachsende Funktion von λ ist, kann man die Umkehrfunktion $\lambda = \lambda(s)$ definieren. Aus der Identität $s = s(\lambda(s))$ folgt

$$\frac{ds}{ds} = 1 = \frac{ds(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda(s)}{ds}, \quad \rightarrow \quad \frac{d\lambda(s)}{ds} = \frac{1}{ds(\lambda)/d\lambda} = \frac{1}{|d\vec{r}/d\lambda|}.$$

Wenn man die Bogenlänge s als Kurvenparameter in der Raumkurvendarstellung benutzt,

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{e}_x + y(s)\vec{e}_y + z(s)\vec{e}_z = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{bmatrix},$$

wird

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \begin{bmatrix} dx(s)/ds \\ dy(s)/ds \\ dz(s)/ds \end{bmatrix} ds$$

und weil $|d\vec{r}| = ds$ ist, muss $d\vec{r}/ds$ ein Einheitsvektor sein. Man nennt den Vektor

$$\vec{e}_s(s) := \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \begin{bmatrix} dx(s)/ds \\ dy(s)/ds \\ dz(s)/ds \end{bmatrix}, \quad |\vec{e}_s(s)| = 1$$

Tangenteneinheitsvektor an die Raumkurve im Kurvenpunkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}(s)$.

Liegt die Raumkurvendarstellung $\vec{r}(\lambda)$ vor, so wird

$$\vec{e}_s(\lambda) := \frac{d\vec{r}(\lambda)}{ds} = \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \left/ \left| \frac{d\vec{r}(\lambda)}{d\lambda} \right| \right.$$

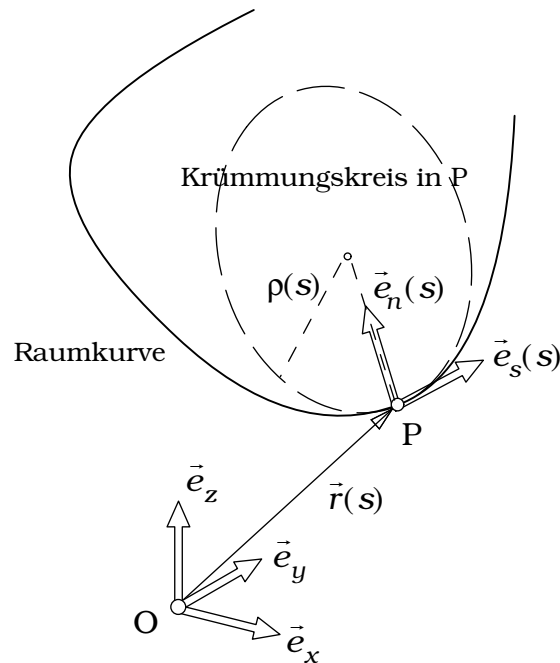
Die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors $\vec{e}_s(s)$ nach der Bogenlänge s schreiben wir

$$\frac{d\vec{e}_s(s)}{ds} =: \frac{1}{\rho(s)} \vec{e}_n(s), \quad |\vec{e}_n(s)| = 1$$

und nennen $\rho(s)$ **Krümmungsradius**, $1/\rho(s)$ **Krümmung** und $\vec{e}_n(s)$ **Hauptnormaleneinheitsvektor** der Raumkurve im Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r}(s)$. Da $\vec{e}_s(s)$ ein Einheitsvektor ist, gilt $\vec{e}_s(s) \cdot \vec{e}_s(s) = 1$ und deshalb wird

$$\frac{d\{\vec{e}_s(s) \cdot \vec{e}_s(s)\}}{ds} = \frac{d\{1\}}{ds} = 0 \rightarrow \frac{2}{\rho} \vec{e}_s \cdot \vec{e}_n = 0 \rightarrow \vec{e}_s \cdot \vec{e}_n = 0.$$

Der Hauptnormaleneinheitsvektor ist also orthogonal zum Tangenteneinheitsvektor.



Wenn die Parameterdarstellung $\vec{r}(\lambda)$ verwendet wird, gilt

$$\frac{1}{\rho} \vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_s}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\vec{e}_s/d\lambda}{ds/d\lambda} = \frac{d\vec{e}_s/d\lambda}{|d\vec{r}/d\lambda|} = \frac{|d\vec{e}_s/d\lambda|}{|d\vec{r}/d\lambda|} \frac{d\vec{e}_s/d\lambda}{|d\vec{e}_s/d\lambda|},$$

$$\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_s/d\lambda}{|d\vec{e}_s/d\lambda|}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{|d\vec{e}_s/d\lambda|}{|d\vec{r}/d\lambda|}.$$

Den Vektor

$$\vec{e}_b(s) := \vec{e}_s(s) \times \vec{e}_n(s)$$

nennt man **Binormaleneinheitsvektor** im Kurvenpunkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r}(s)$. Er steht senkrecht auf der in diesem Punkt von den beiden Einheitsvektoren $\vec{e}_s(s)$ und $\vec{e}_n(s)$ aufgespannten **Schmiegebene** der Raumkurve. In der Schmiegebene liegt in Richtung $\vec{e}_n(s)$ im Abstand $\rho(s)$ von $\vec{r}(s)$ aus der Mittelpunkt des **Krümmungskreises**, der die Raumkurve im Punkt P berührt.

Die drei zueinander orthogonalen Einheitsvektoren $\{\vec{e}_s(s), \vec{e}_n(s), \vec{e}_b(s)\}$ bilden das *begleitende Dreibein der Raumkurve*. Für die Änderungen dieser Vektoren gelten die **FRENETSchen Formeln**:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_s(s)}{ds} &= \frac{1}{\rho(s)} \vec{e}_n(s), \\ \frac{d\vec{e}_n(s)}{ds} &= -\frac{1}{\rho(s)} \vec{e}_s(s) + \frac{1}{\tau(s)} \vec{e}_b(s), \\ \frac{d\vec{e}_b(s)}{ds} &= -\frac{1}{\tau(s)} \vec{e}_n(s).\end{aligned}$$

Der Quotient $1/\tau(s)$ ist die **Windung** der Raumkurve im Punkt P.

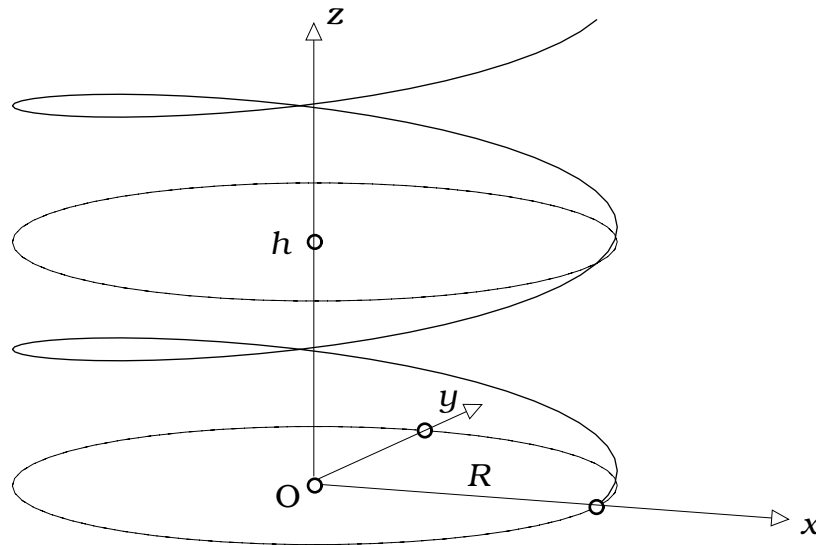
▼ Beispiel 9.1

Die Punkte auf einer Schraubenlinie um die z -Achse mit der Ganghöhe h und dem Grundkreisradius R besitzen die Ortsvektoren

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{bmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ h\varphi / (2\pi) \end{bmatrix}.$$

Hier ist der Winkel φ Kurvenparameter. Mit

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ h / (2\pi) \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| = \sqrt{R^2 + h^2 / (2\pi)^2},$$



wird die Bogenlänge

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi \left| \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} \right| d\varphi = \sqrt{R^2 + h^2 / (2\pi)^2} \varphi.$$

Der Tangenteneinheitsvektor lautet

$$\vec{e}_s(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2 / (2\pi)^2}} \begin{bmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ h / (2\pi) \end{bmatrix}.$$

Aus

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \frac{1}{|d\vec{r}/d\varphi|} = \frac{R}{R^2 + h^2 / (2\pi)^2} \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \vec{e}_n$$

folgen Krümmungsradius und Hauptnormaleneinheitsvektor der Schraubenlinie:

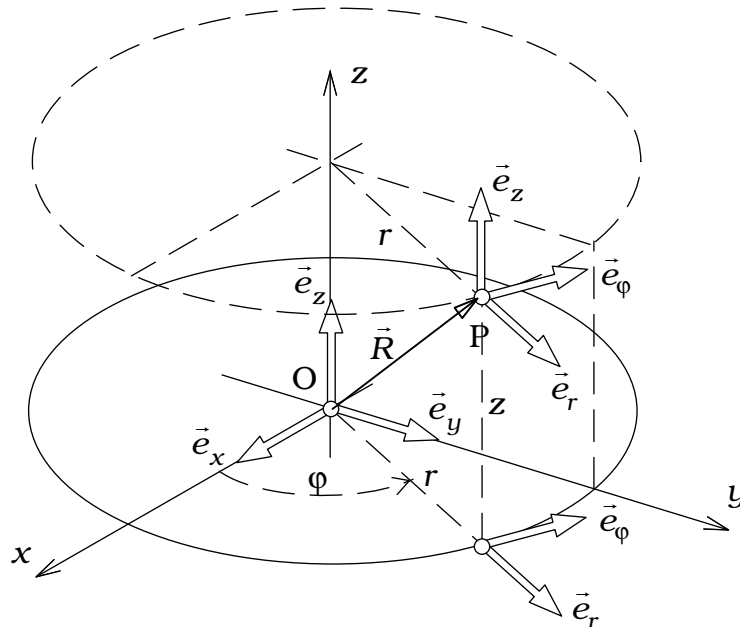
$$\rho = \frac{R^2 + h^2 / (2\pi)^2}{R}, \quad \vec{e}_n = - \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wenn die Ganghöhe $h = 0$ wird, wird die Schraubenlinie zum Kreis mit dem Radius R und es ist dann natürlich $s = R\varphi$ und $\rho = R$.



▼ Beispiel 9.2

Mitunter kann es vorteilhaft sein, **Zylinderkoordinaten** zu verwenden.



Der Ortsvektor vom Ursprung O des kartesischen Koordinatensystems zum Punkt P erhält dann die Darstellung

$$\vec{OP} = r \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \varphi \vec{e}_y + z \vec{e}_z.$$

Die Koordinatenlinien, bei denen sich nur jeweils eine Koordinate ändert und die beiden anderen konstant gehalten werden, sind dann spezielle Raumkurven:

- die z -Koordinatenlinien, auf denen sich nur z ändert, sind zur z -Achse parallele Geraden.
- Die r -Koordinatenlinien, auf denen sich nur r ändert, sind von der z -Achse ausgehende Geraden parallel zur xy -Ebene,
- die φ -Koordinatenlinien, auf denen sich nur φ ändert, sind zur xy -Ebene parallele Kreise um die z -Achse,

Die Tangenteneinheitsvektoren an diese Koordinatenlinien

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{dOP}/dr}{|dOP/dr|} = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\vec{dOP}/d\varphi}{|dOP/d\varphi|} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_z = \frac{\vec{dOP}/dz}{|dOP/dz|} = \vec{e}_z,$$

bilden in jedem Raumpunkt außerhalb der z-Achse eine **lokale orthogonale Basis** von Einheitsvektoren: $\{\vec{e}_r(\varphi), \vec{e}_\varphi(\varphi), \vec{e}_z\}$.

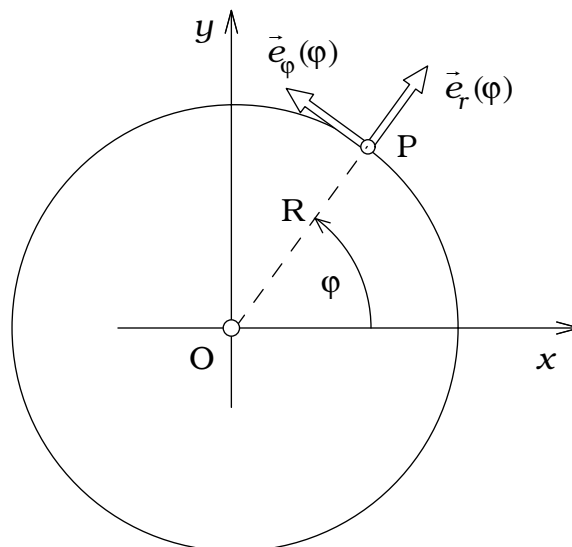
Es gilt

$$\frac{d\vec{e}_r(\varphi)}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi(\varphi), \quad \frac{d\vec{e}_\varphi(\varphi)}{d\varphi} = -\vec{e}_r(\varphi).$$

Jeden Vektor, der im Punkt P: (r, φ, z) definiert ist, kann man in der lokalen Basis $\{\vec{e}_r(\varphi), \vec{e}_\varphi(\varphi), \vec{e}_z\}$ darstellen.



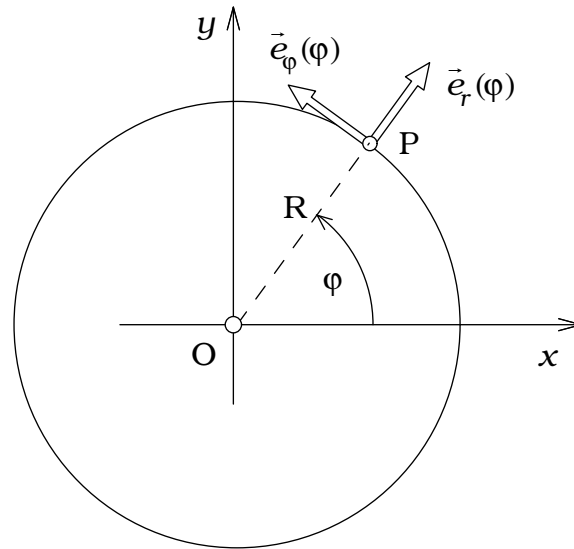
▼ Beispiel 9.3



Der Kreis in der xy -Ebene mit dem Radius R um den Punkt O erhält in Zylinderkoordinaten die Darstellung

$$\vec{r}(\varphi) = R \vec{e}_r(\varphi).$$

φ ist der Kurvenparameter.



Es wird

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi} d\varphi = R \vec{e}_\varphi d\varphi, \quad ds = |d\vec{r}| = R d\varphi, \quad s = R\varphi.$$

$$\vec{e}_s = \frac{d\vec{r} / d\varphi}{|d\vec{r} / d\varphi|} = \vec{e}_\varphi,$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = -\vec{e}_r \frac{1}{ds/d\varphi} = -\frac{1}{R} \vec{e}_r =: \frac{1}{\rho} \vec{e}_n,$$

$$\rho = R, \quad \vec{e}_n = -\vec{e}_r.$$

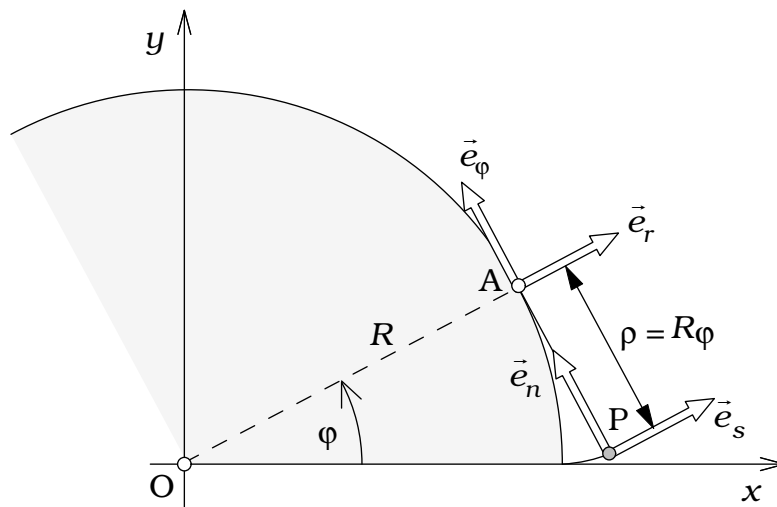


▼ Beispiel 9.4

Wenn in der xy -Ebene ein Faden von einem Kreiszyylinder abgewickelt wird, beschreibt der Endpunkt P des straff gespannten Fadens eine **Kreisevolvente**.

Der Ortsvektor des Punktes P lässt sich am besten in der Zylinderkoordinatenbasis darstellen.

$$\vec{r}(\varphi) = \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = R \vec{e}_r(\varphi) - R\varphi \vec{e}_\varphi(\varphi).$$



Aus dem Tangentenvektor

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = R\vec{e}_\varphi - R\vec{e}_\varphi + R\varphi\vec{e}_r = R\varphi\vec{e}_r$$

mit dem Betrag

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| = R\varphi$$

erhalten wir den Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_s , das Bogenelement ds und die Bogenlänge $s(\varphi)$ der Kreisevolvente:

$$\vec{e}_s = \vec{e}_r, \quad ds = \left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| d\varphi = R\varphi d\varphi, \quad s(\varphi) = \frac{1}{2} R\varphi^2.$$

Der Krümmungsradius ρ und der Hauptnormaleneinheitsvektor \vec{e}_n ergeben sich aus der Definitionsgleichung

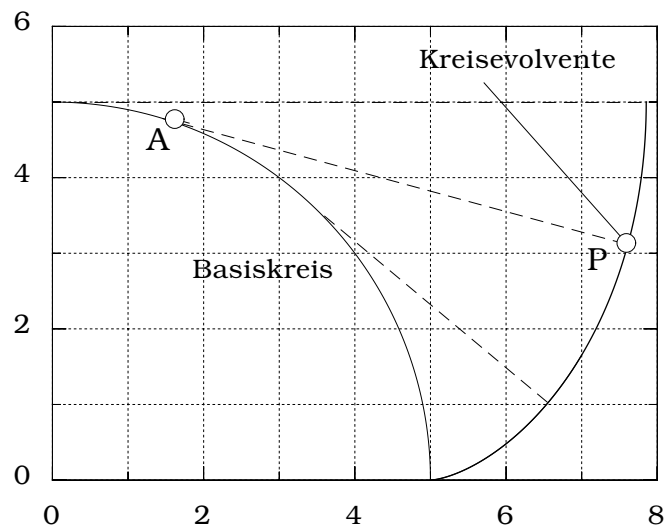
$$\frac{1}{\rho}\vec{e}_n = \frac{d\vec{e}_s}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \frac{1}{ds/d\varphi} = \vec{e}_\varphi \frac{1}{R\varphi};$$

$$\rho = R\varphi, \quad \vec{e}_n = \vec{e}_\varphi.$$

Der tangentielle Kontaktpunkt A des abgewickelten Fadens mit der Kreisscheibe ist der Krümmungsmittelpunkt zum Kreisevolventenpunkt P.

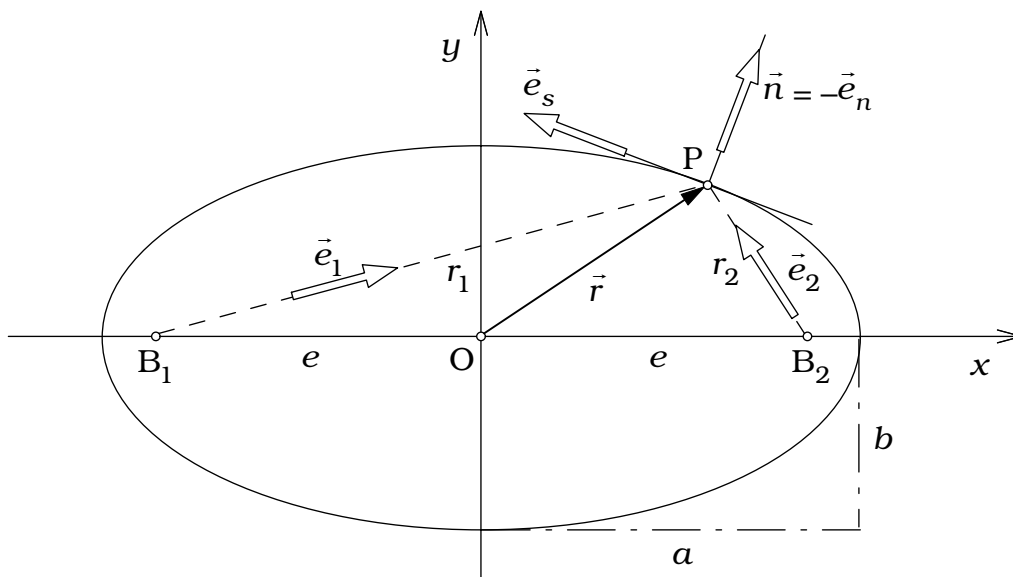
In der $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ - Basis lautet die Parameterdarstellung der Kreisevolvente

$$\vec{r}(\varphi) = R \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix} - R\varphi \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \\ R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) \end{bmatrix}.$$



▼ Beispiel 9.5

Für eine Ellipse berechne man in einem Ellipsenpunkt P den Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_s und den äußeren Normaleneinheitsvektor \vec{n} sowie die Winkel, die die Geraden von B_1 und B_2 nach P mit dem Normaleneinheitsvektor bilden.



Die Ellipse mit den Halbachsen a und b und dem Abstand

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

der Punkte B_1 und B_2 von O kann in der Parameterdarstellung durch die Ortsvektoren

$$\vec{r} = \vec{OP} = \begin{bmatrix} a \cos \lambda \\ b \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (0 \leq \lambda < 2\pi)$$

beschrieben werden; es gilt nämlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a \cos \lambda)^2}{a^2} + \frac{(b \sin \lambda)^2}{b^2} = 1.$$

Der Tangentenvektor

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} -a \sin \lambda \\ b \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

hat den Betrag

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| = \sqrt{(a \sin \lambda)^2 + (b \cos \lambda)^2} =: h(\lambda),$$

also lautet der Tangenteneinheitsvektor im Punkt P

$$\vec{e}_s = \frac{1}{h(\lambda)} \begin{bmatrix} -a \sin \lambda \\ b \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der äußere Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} := \vec{e}_s \times \vec{e}_z = \frac{1}{h(\lambda)} \begin{bmatrix} -a \sin \lambda \\ b \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h(\lambda)} \begin{bmatrix} b \cos \lambda \\ a \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

ist der negative Hauptnormaleneinheitsvektor: $\vec{n} = -\vec{e}_n$.

Aus den Ortsvektoren

$$\vec{B}_1 P = \vec{B}_1 O + \vec{OP} = \begin{bmatrix} e + a \cos \lambda \\ b \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix} =: r_1 \vec{e}_1, \quad \vec{B}_2 P = \vec{B}_2 O + \vec{OP} = \begin{bmatrix} -e + a \cos \lambda \\ b \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix} =: r_2 \vec{e}_2,$$

erhalten wir mit $b^2 = a^2 - e^2$

$$r_1 = \sqrt{(e + a \cos \lambda)^2 + (b \sin \lambda)^2} = a + e \cos \lambda,$$

$$r_2 = \sqrt{(-e + a \cos \lambda)^2 + (b \sin \lambda)^2} = a - e \cos \lambda,$$

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{r_1} \begin{bmatrix} e + a \cos \lambda \\ b \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{r_2} \begin{bmatrix} -e + a \cos \lambda \\ b \sin \lambda \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Winkel, die die Vektoren $\vec{B}_1 P$ und $\vec{B}_2 P$ mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor \vec{n} in P bilden, erhalten wir aus den Skalarprodukten der Einheitsvektoren

$$\alpha_1 = \arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{n}), \quad \alpha_2 = \arccos(\vec{e}_2 \cdot \vec{n}),$$

Wegen

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{n} = \frac{1}{r_1 h(\lambda)} \{(e + a \cos \lambda) b \cos \lambda + b \sin \lambda a \sin \lambda\} = \frac{b(e \cos \lambda + a)}{r_1 h(\lambda)} = \frac{b}{h(\lambda)},$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{n} = \frac{1}{r_2 h(\lambda)} \{(-e + a \cos \lambda) b \cos \lambda + b \sin \lambda a \sin \lambda\} = \frac{b(-e \cos \lambda + a)}{r_2 h(\lambda)} = \frac{b}{h(\lambda)},$$

wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \arccos\left(\frac{b}{h(\lambda)}\right),$$

wobei

$$h(\lambda) = \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \lambda} = \sqrt{r_1(\lambda) r_2(\lambda)}$$

geschrieben werden kann.

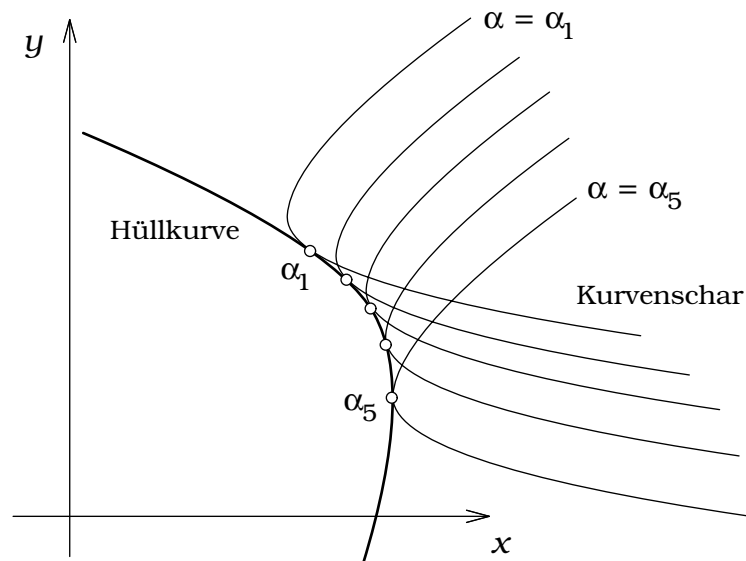
Ist die Ellipse die Erzeugende eines innen verspiegelten Hohlzylinders, so wird ein Lichtstrahl von B_1 nach P in den Punkt B_2 reflektiert (oder von B_2 nach P in den Punkt B_1), weil der auf die Normalenrichtung bezogene Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist. Deshalb heißen B_1 und B_2 Brennpunkte. ▲

▼ Beispiel 9.6

In der xy -Ebene sei

$$x = k_1(s, \alpha) \quad y = k_2(s, \alpha)$$

die Parameterdarstellung einer Kurvenschar, wobei α der Scharparameter und s der Kurvenparameter sein soll.



Die bei Variation des Scharparameters entstehende Kurvenschar erzeugt die **Hüllkurve (Envelope)**

$$x = h_1(\alpha), \quad y = h_2(\alpha),$$

die von den Kurven der Kurvenschar tangential berührt wird.

$h_1(\alpha)$ und $h_2(\alpha)$ beschreiben die Lage des Berührungspunktes $s(\alpha)$ auf der Kurve mit dem Scharparameter α . Es gilt also

$$h_1(\alpha) = k_1(s(\alpha), \alpha) \quad h_2(\alpha) = k_2(s(\alpha), \alpha).$$

Der Tangentenvektor der Hüllkurve

$$\vec{t}_h = \frac{dh_1(\alpha)}{d\alpha} \vec{e}_x + \frac{dh_2(\alpha)}{d\alpha} \vec{e}_y$$

und der Tangentenvektor an die Kurve mit dem Scharparameter α im Berührungspunkt $s(\alpha)$

$$\vec{t}_k = \left\{ \frac{\partial k_1}{\partial s} \vec{e}_x + \frac{\partial k_2}{\partial s} \vec{e}_y \right\}_{s=s(\alpha)}$$

sind definitionsgemäß parallel,

deshalb gilt

$$\vec{t}_h \times \vec{t}_k = \vec{0}$$

also

$$\left(\frac{dh_1}{d\alpha} \frac{\partial k_2}{\partial s} - \frac{dh_2}{d\alpha} \frac{\partial k_1}{\partial s} \right)_{s=s(\alpha)} = 0.$$

Aus

$$h_1(\alpha) = k_1(s(\alpha), \alpha) \quad h_2(\alpha) = k_2(s(\alpha), \alpha)$$

folgt

$$\frac{dh_1}{d\alpha} = \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{ds}{d\alpha} + \frac{\partial k_1}{\partial \alpha}, \quad \frac{dh_2}{d\alpha} = \frac{\partial k_2}{\partial s} \frac{ds}{d\alpha} + \frac{\partial k_2}{\partial \alpha},$$

und deshalb lautet die obige Parallelitätsbedingung der Tangentenvektoren

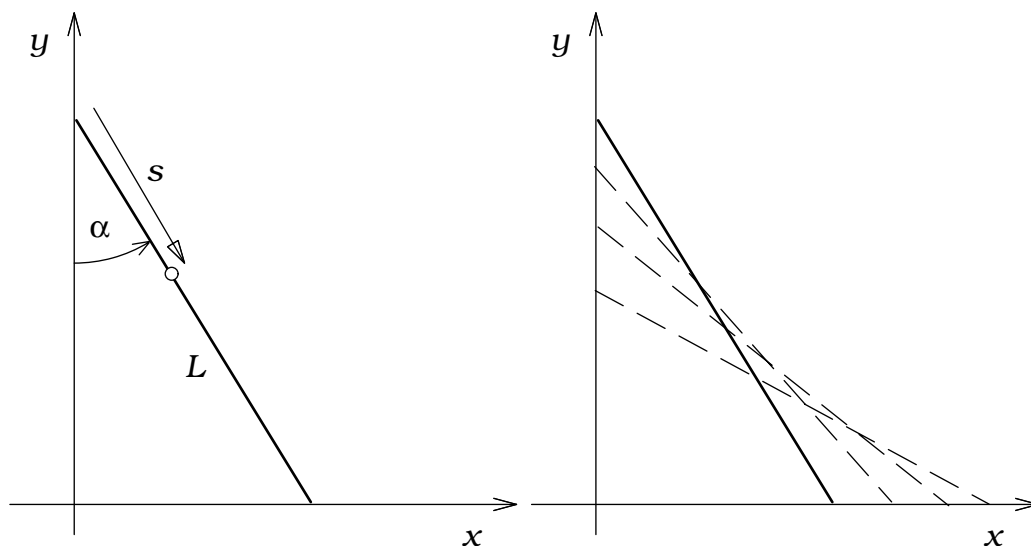
$$\frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{\partial k_2}{\partial s} - \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} = 0.$$

Diese Gleichung liefert die Funktion $s(\alpha)$, mit der schließlich die Parameterdarstellung der Hüllkurve

$$x = h_1(\alpha) = k_1(s(\alpha), \alpha) \quad y = h_2(\alpha) = k_2(s(\alpha), \alpha)$$

berechnet werden kann. ▲

▼ Beispiel 9.7



Berechnet werden soll die Hüllkurve für eine Stange der Länge L , die mit ihren Endpunkten auf den kartesischen Koordinatenachsen gleitet.

Die durch die Stange definierte Kurvenschar lautet

$$x = s \sin \alpha =: k_1(s, \alpha) \quad y = (L - s) \cos \alpha =: k_2(s, \alpha)$$

wobei $0 \leq s \leq L$ ist.

Aus der Hüllkurvenbedingung

$$\frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{\partial k_2}{\partial s} - \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} = 0$$

folgt dann

$$-s \cos \alpha \cos \alpha + \sin \alpha (L - s) \sin \alpha = 0,$$

und wir erhalten

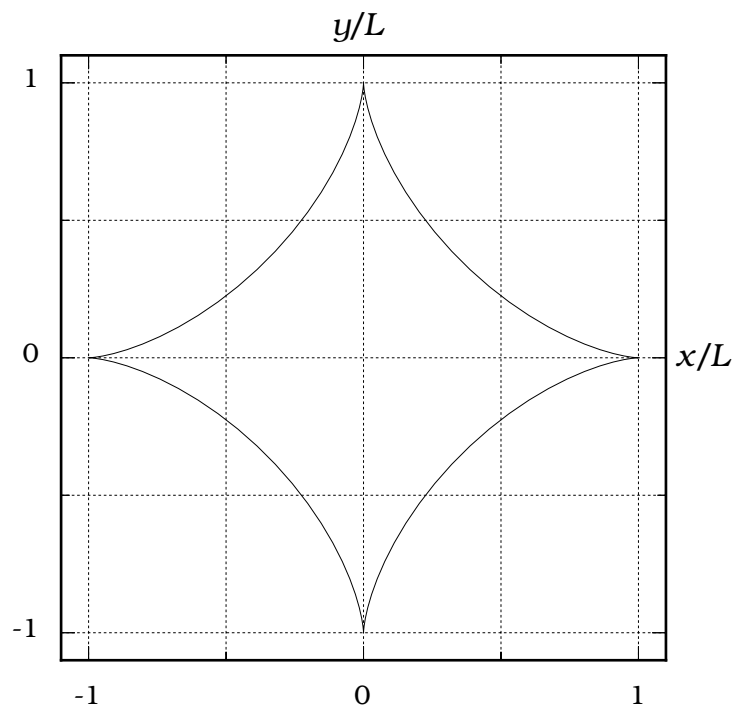
$$s(\alpha) = L \sin^2 \alpha.$$

Daraus ergibt sich die Parameterdarstellung

$$x = k_1(s(\alpha), \alpha) = L \sin^3 \alpha,$$

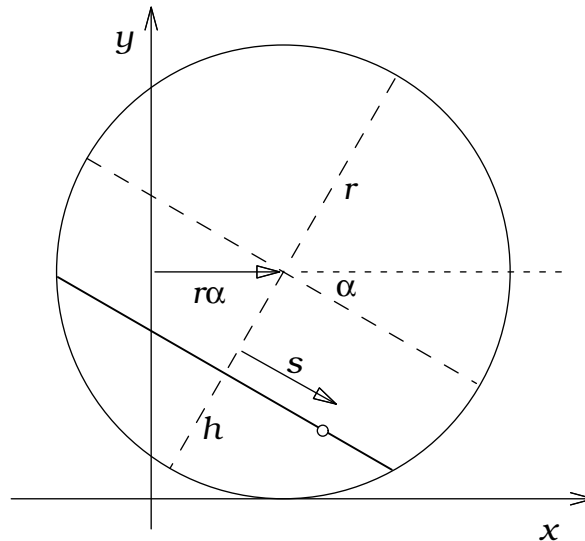
$$y = k_2(s(\alpha), \alpha) = L \cos^3 \alpha.$$

der in der folgenden Abbildung dargestellten Hüllkurve.



▼ Beispiel 9.8

Berechnet werden soll die Hüllkurve für die Sekante eines rollenden Rades (Radius r , Drehwinkel α).



Aus der Kurvenschar

$$x = r\alpha - (r - h) \sin \alpha + s \cos \alpha =: k_1(s, \alpha)$$

$$y = r - (r - h) \cos \alpha - s \sin \alpha =: k_2(s, \alpha)$$

ergibt sich die Hüllkurvenbedingung

$$\frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \frac{\partial k_2}{\partial s} - \frac{\partial k_1}{\partial s} \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} = 0$$

$$-[r - (r - h) \cos \alpha - s \sin \alpha] \sin \alpha - \cos \alpha [(r - h) \sin \alpha - s \cos \alpha] = 0$$

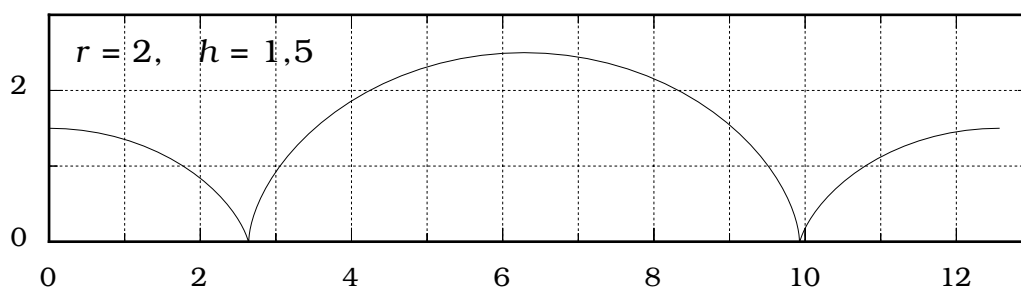
also

$$s = r \sin \alpha.$$

Daraus folgt für die Hüllkurve:

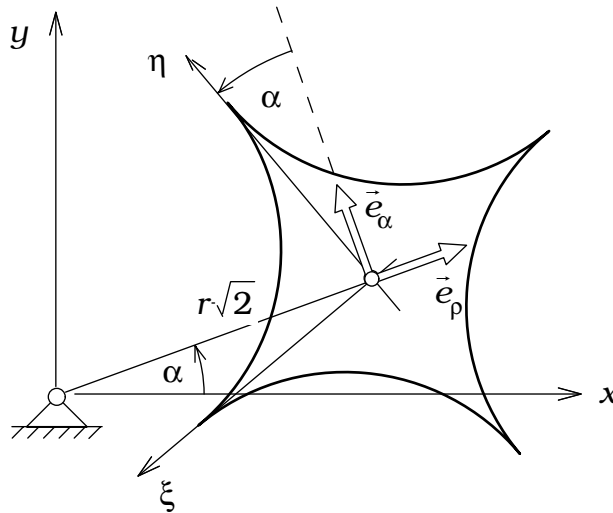
$$x = k_1(s(\alpha), \alpha) = r\alpha - (r - h) \sin \alpha + r \sin \alpha \cos \alpha$$

$$y = k_2(s(\alpha), \alpha) = r - (r - h) \cos \alpha - r \sin^2 \alpha.$$

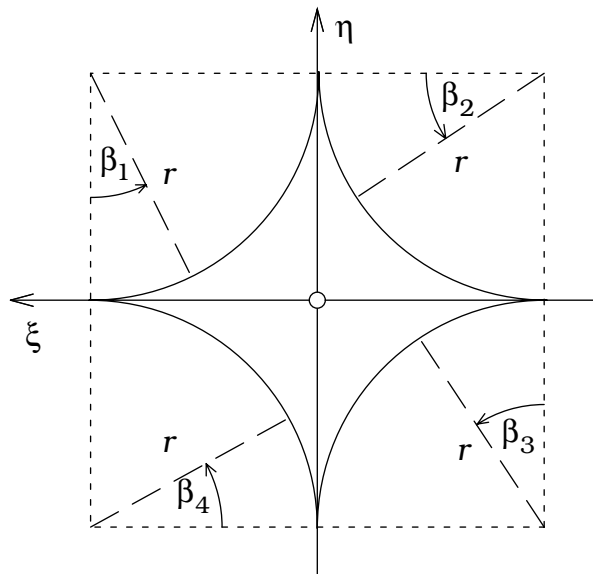


▼ Beispiel 9.9

Der Mittelpunkt einer sternförmigen Scheibe, deren Rand aus vier Viertel-Kreisbögen (Radius r) besteht, wird auf einem Kreisbogen (Radius $r\sqrt{2}$) geführt. Ist α die Winkelkoordinate des Mittelpunktes, also der Scharparameter, so soll der Drehwinkel der Scheibe doppelt so groß sein. Man berechne die Hüllkurve der sternförmigen Scheibe.



Die vier Abschnitte des Scheibenrandes werden durch vier Funktionenpaare beschrieben, wobei die Winkel β_1, \dots, β_4 die abschnittsweise zuständigen Kurvenparameter sind.



$$\begin{aligned}
(1): \quad & \xi = r(1 - \sin \beta_1), \quad \eta = r(1 - \cos \beta_1); \\
(2): \quad & \xi = r(-1 + \cos \beta_2), \quad \eta = r(1 - \sin \beta_2); \\
(3): \quad & \xi = r(-1 + \sin \beta_3), \quad \eta = r(-1 + \cos \beta_3); \\
(4): \quad & \xi = r(1 - \cos \beta_4), \quad \eta = r(-1 + \sin \beta_4);
\end{aligned}$$

Der kürzeste Abstand des Scheibenrandes vom Mittelpunkt ist

$$r_0 := r(\sqrt{2} - 1).$$

Der Ortsvektor vom Ursprung des xy -Systems zu einem Punkt auf dem Scheibenrand lautet

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= (r_0 + r) \vec{e}_\rho + \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta; \\
\vec{e}_\xi &= -\cos \alpha \vec{e}_\rho - \sin \alpha \vec{e}_\alpha, & \vec{e}_\rho &= \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y, \\
\vec{e}_\eta &= -\sin \alpha \vec{e}_\rho + \cos \alpha \vec{e}_\alpha; & \vec{e}_\alpha &= -\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y;
\end{aligned}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r\sqrt{2} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} -\cos(2\alpha) \\ -\sin(2\alpha) \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} -\sin(2\alpha) \\ \cos(2\alpha) \end{bmatrix},$$

Mit den Koordinaten

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{2} r \cos \alpha - \xi \cos(2\alpha) - \eta \sin(2\alpha), \\
y &= \sqrt{2} r \sin \alpha - \xi \sin(2\alpha) + \eta \cos(2\alpha),
\end{aligned}$$

bilden wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \alpha} &= -\sqrt{2} r \sin \alpha + 2\xi \sin(2\alpha) - 2\eta \cos(2\alpha), \\
\frac{\partial y}{\partial \alpha} &= \sqrt{2} r \cos \alpha - 2\xi \cos(2\alpha) - 2\eta \sin(2\alpha),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \beta_i} &= -\frac{\partial \xi}{\partial \beta_i} \cos(2\alpha) - \frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} \sin(2\alpha), \\
\frac{\partial y}{\partial \beta_i} &= -\frac{\partial \xi}{\partial \beta_i} \sin(2\alpha) + \frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} \cos(2\alpha),
\end{aligned}$$

für die Hüllkurvenbedingung

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta_i} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta_i} = 0.$$

$$\begin{aligned}
& \{-\sqrt{2} r \sin \alpha + 2\xi \sin(2\alpha) - 2\eta \cos(2\alpha)\} \left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial \beta_i} \sin(2\alpha) + \frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} \cos(2\alpha) \right\} - \\
& - \{ \sqrt{2} r \cos \alpha - 2\xi \cos(2\alpha) - 2\eta \sin(2\alpha) \} \left\{ -\frac{\partial \xi}{\partial \beta_i} \cos(2\alpha) - \frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} \sin(2\alpha) \right\} = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst die Bedingung,

$$\sqrt{2} r \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial \beta_i} \cos \alpha + \frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} \sin \alpha \right\} - 2\xi \frac{\partial \xi}{\partial \beta_i} - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \beta_i} = 0.$$

die für jeden der vier Randkurvenabschnitte mit dem entsprechenden ξ, η -Funktionspaar ausgewertet werden muss.

Im Drehwinkelbereich $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ wird

$$\xi = r (1 - \sin \beta_1), \quad \eta = r (1 - \cos \beta_1),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta_1} = -r \cos \beta_1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta_1} = r \sin \beta_1.$$

Wir erhalten damit die Bedingung

$$-\cos \beta_1 \cos \alpha + \sin \beta_1 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \beta_1 - \sqrt{2} \sin \beta_1 = 0,$$

$$-\cos \alpha + \tan \beta_1 \sin \alpha + \sqrt{2} - \sqrt{2} \tan \beta_1 = 0,$$

$$\beta_1 = \arctan \frac{\cos \alpha - \sqrt{2}}{\sin \alpha - \sqrt{2}};$$

und die Parameterdarstellung des ersten Abschnitts der Hüllkurve:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} r \cos \alpha - \xi \cos(2\alpha) - \eta \sin(2\alpha), & \xi &= r (1 - \sin \beta_1), & \eta &= r (1 - \cos \beta_1), \\ y &= \sqrt{2} r \sin \alpha - \xi \sin(2\alpha) + \eta \cos(2\alpha), \end{aligned}$$

Entsprechend gilt:

Drehwinkelbereich $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$.

$$\xi = r (-1 + \cos \beta_2), \quad \eta = r (1 - \sin \beta_2),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta_2} = -r \sin \beta_2, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta_2} = -r \cos \beta_2.$$

$$-\sin \beta_2 \cos \alpha - \cos \beta_2 \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \beta_2 + \sqrt{2} \cos \beta_2 = 0,$$

$$\beta_2 = \arctan \frac{-\sin \alpha + \sqrt{2}}{\cos \alpha + \sqrt{2}}.$$

Drehwinkelbereich $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$.

$$\xi = r(-1 + \sin \beta_3), \quad \eta = r(-1 + \cos \beta_3),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta_3} = r \cos \beta_3, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta_3} = -r \sin \beta_3.$$

$$\cos \beta_3 \cos \alpha - \sin \beta_3 \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \beta_3 + \sqrt{2} \cos \beta_3 = 0,$$

$$\beta_3 = \arctan \frac{\cos \alpha + \sqrt{2}}{\sin \alpha + \sqrt{2}}.$$

Drehwinkelbereich $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$.

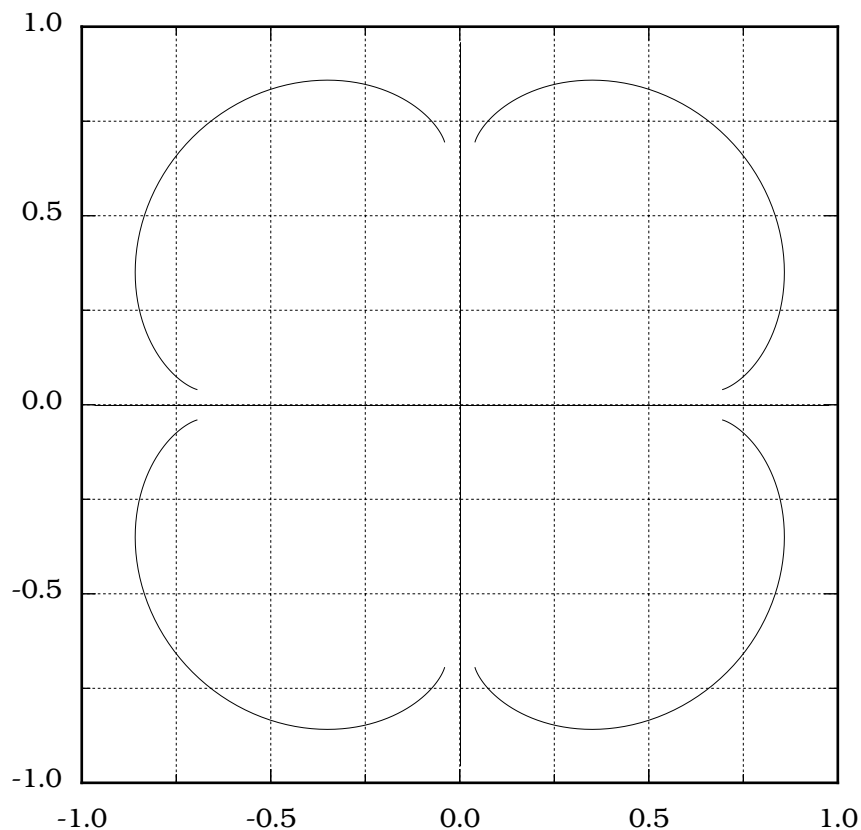
$$\xi = r(1 - \cos \beta_4), \quad \eta = r(-1 + \sin \beta_4),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \beta_4} = r \sin \beta_4, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \beta_4} = r \cos \beta_4.$$

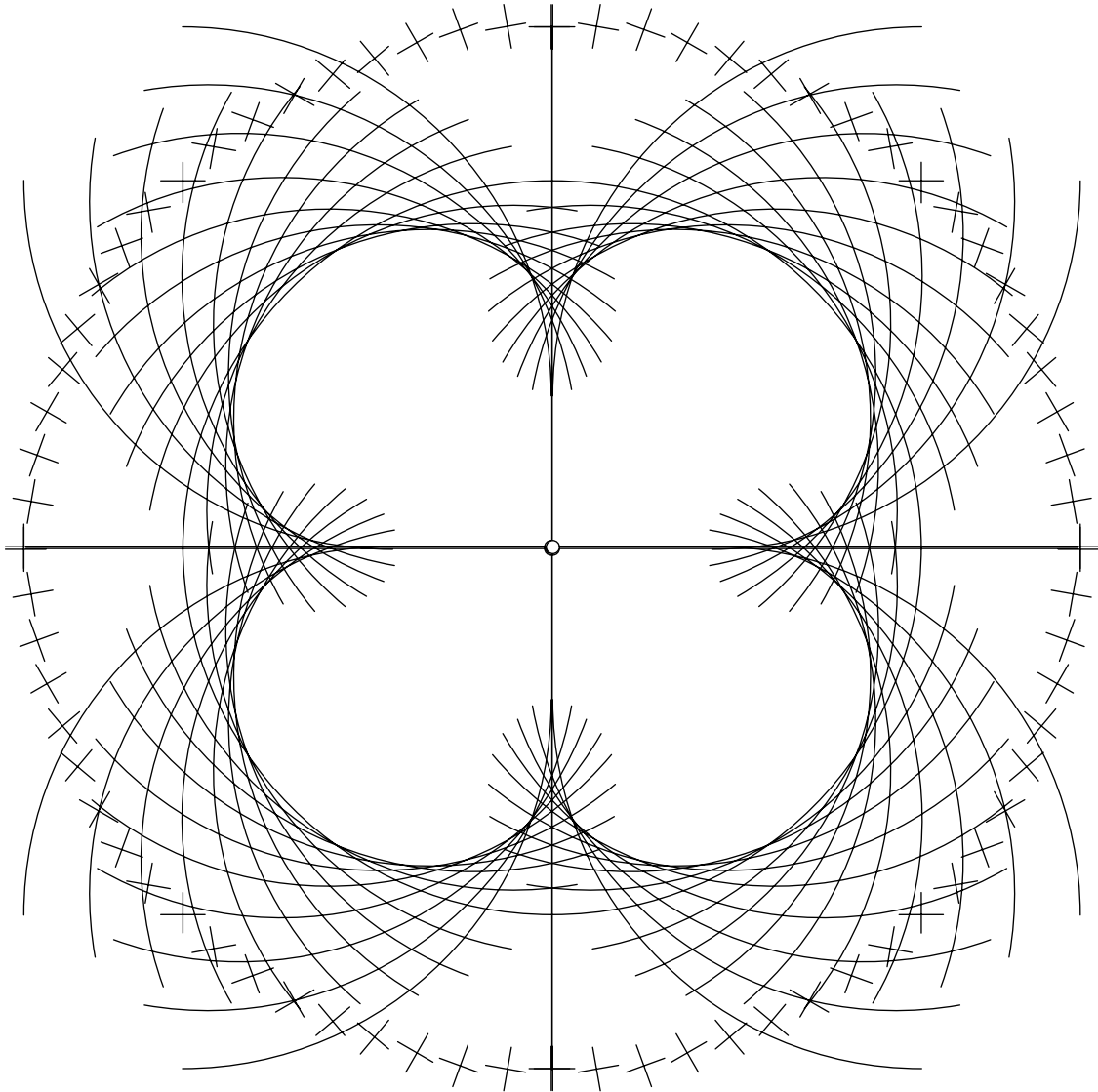
$$\sin \beta_4 \cos \alpha + \cos \beta_4 \sin \alpha - \sqrt{2} \sin \beta_4 + \sqrt{2} \cos \beta_4 = 0,$$

$$\beta_4 = \arctan \frac{-\sin \alpha - \sqrt{2}}{\cos \alpha - \sqrt{2}}.$$

Das folgende Bild zeigt die Hüllkurve für den Fall $r = 1$.



In der nächsten Abbildung ist die gesamte Kurvenschar dargestellt, wobei der Scharparameter α in 5° -Schritten und dementsprechend die Drehwinkel der Viertelkreisbögen des Randes in 10° -Schritten variieren.

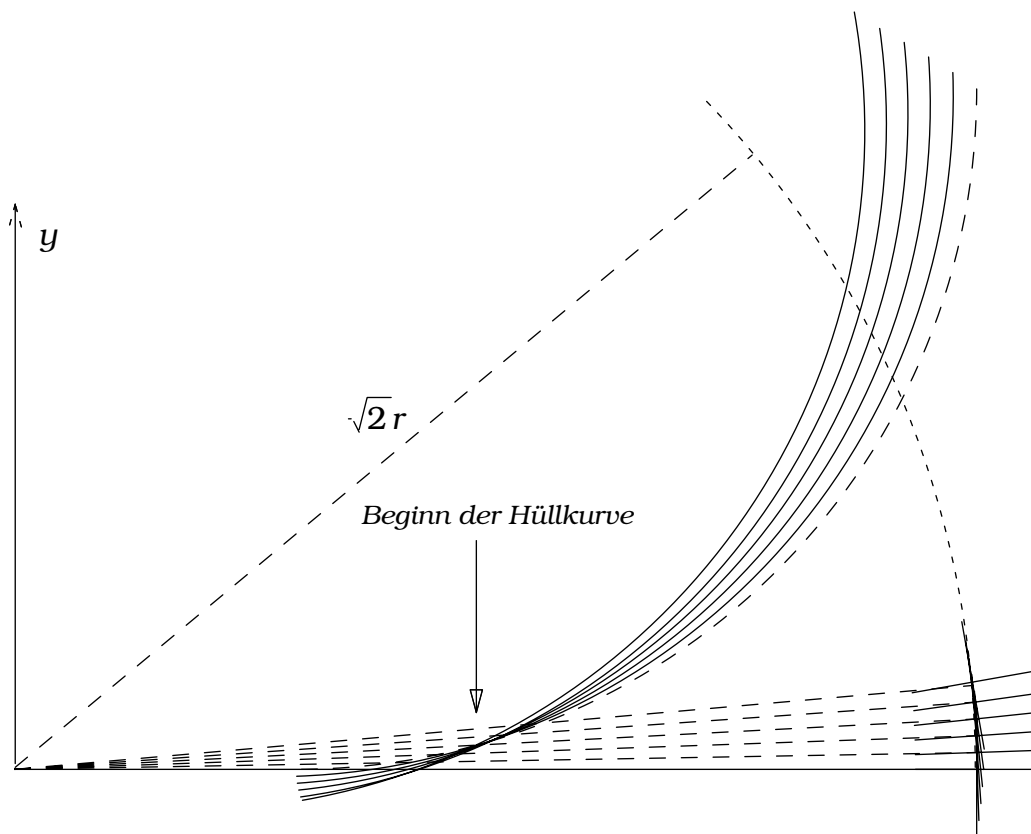


Die berechneten Hüllkurvenabschnitte beginnen nicht in den Spitzen und hängen nicht zusammen, wie man zunächst vermutet, sondern sind voneinander getrennt.

In der folgenden Abbildung ist zur Erläuterung des Ergebnisses die Kurvenschar in 1° -Schritten von $0^\circ - 5^\circ$ vergrößert dargestellt, so dass man den Beginn eines Hüllkurvenabschnittes deutlich erkennen kann. Die Spitze der Radien hat die Koordinate $\{x = 0; y = 0\}$ und die Hüllkurve beginnt im Punkt $\{x = 0,695r; y = 0,040r\}$, der zum Parameterwert

$$\alpha = 0 \rightarrow \beta_1 = \arctan(1 - 1/\sqrt{2})$$

gehört.



▼ Beispiel 9.10

Gibt man die Krümmung κ einer ebenen Kurve als Funktion der Bogenlänge s vor, so kann man die Parameterdarstellung $\vec{r}(s)$ der Kurve berechnen.

Aus

$$\vec{r}'(s) = \vec{e}_s(s), \quad \vec{e}_s'(s) = \frac{1}{\rho(s)} \vec{e}_n(s) = \kappa(s) \vec{e}_n(s)$$

$$\vec{e}_s(s) = \begin{bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_n(s) = \vec{e}_z \times \vec{e}_s(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_s'(s) = \begin{bmatrix} x''(s) \\ y''(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'' + \kappa(s)y' &= 0, \\ y'' - \kappa(s)x' &= 0. \end{aligned}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{f(s)}, \quad \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = f'(s) \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} e^{f(s)},$$

erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} f' & \kappa \\ -\kappa & f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit der Bedingung für nichttriviale Lösungen

$$\det \begin{bmatrix} f' & \kappa \\ -\kappa & f' \end{bmatrix} = (f')^2 + \kappa^2 = 0, \quad \rightarrow \quad f' = \pm i\kappa,$$

$$K(s) := \int_0^s \kappa(\bar{s}) d\bar{s}, \quad K(0) = 0. \quad \rightarrow \quad f(s) = \pm i K(s)$$

Der dementsprechend reelle Ansatz

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} \cos(K(s)) + \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} \sin(K(s)),$$

ergibt dann

$$-\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} \sin(K(s)) + \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} \cos(K(s)) + \begin{bmatrix} C_3 \\ -C_1 \end{bmatrix} \cos(K(s)) + \begin{bmatrix} C_4 \\ -C_2 \end{bmatrix} \sin(K(s)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$-\begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_4 \\ -C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_2 \\ C_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 \\ -C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_4, \quad C_2 = -C_3, \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix} \cos(K(s)) + \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} \sin(K(s)).$$

Mit der Anfangsbedingung $\vec{e}_s(0) = \vec{e}_x$ und wegen $K(0) = 0$ wird:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} C_2 \\ C_1 \end{bmatrix} 0, \quad \rightarrow \quad C_1 = 1, \quad C_2 = 0,$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos(K(s)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sin(K(s)).$$

$$x'(s) = \cos(K(s)) \quad \rightarrow \quad x(s) = \int_0^s \cos(K(\sigma)) d\sigma,$$

$$y'(s) = \sin(K(s)) \quad \rightarrow \quad y(s) = \int_0^s \sin(K(\sigma)) d\sigma,$$



▼ Beispiel 9.11

Ist die Krümmung eine lineare Funktion der Bogenlänge

$$\kappa(s) = \frac{s}{L^2},$$

so wird nach den Ergebnissen von Beispiel 2.10

$$K(s) = \frac{s^2}{2L^2}.$$

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right) d\sigma, \quad y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{\sigma^2}{2L^2}\right) d\sigma.$$

Die durch diese Parameterdarstellung beschriebene Kurve wird **Klotoide** genannt.

Mit der Substitution

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2L}} =: \xi \quad d\sigma = \sqrt{2L} d\xi$$

wird

$$x(s) = \sqrt{2L} \int_0^{s/(\sqrt{2L})} \cos(\xi^2) d\xi, \quad y(s) = \sqrt{2L} \int_0^{s/(\sqrt{2L})} \sin(\xi^2) d\xi.$$

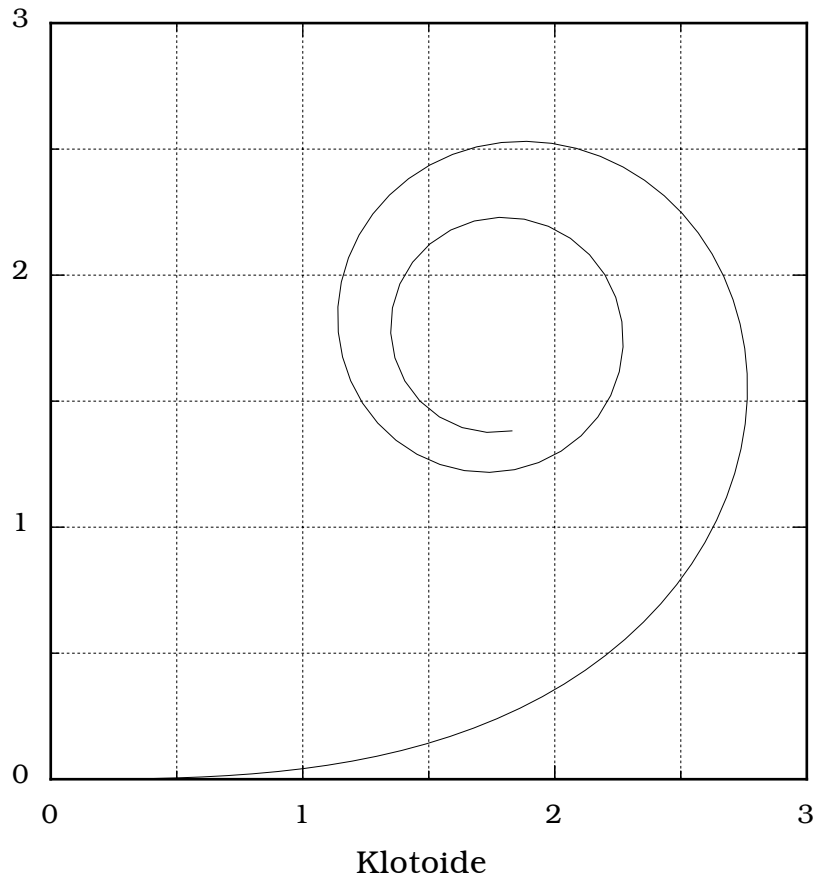
Weil

$$\int_0^{\infty} \cos(\xi^2) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \sin(\xi^2) d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ist, erhalten wir den „Endpunkt“ der Klotoide:

$$x(\infty) = y(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} L.$$

Für ($L=2$, $0 \leq s \leq 10$) ergibt sich die folgende Kurve:



▼ Beispiel 9.12

Wenn die Krümmung durch das Gesetz

$$\kappa(s) = \frac{1}{h} \sin\left(2\pi \frac{s}{L}\right)$$

gegeben ist, erhalten wir nach den Ergebnissen von Beispiel 9.10

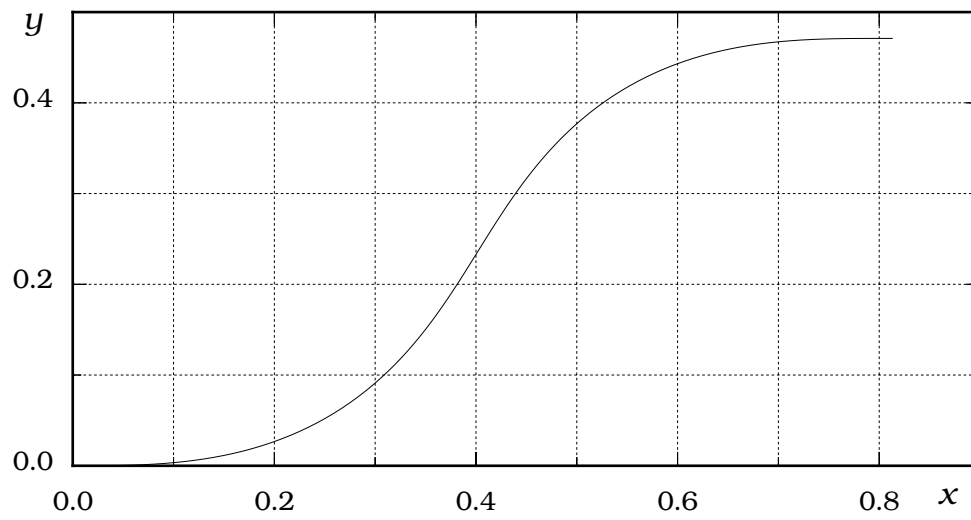
$$K(s) = \frac{1}{h} \int_0^s \sin\left(2\pi \frac{\sigma}{L}\right) d\sigma = \frac{L}{2\pi h} \{1 - \cos(2\pi \frac{s}{L})\}.$$

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\frac{L}{2\pi h} \{1 - \cos(2\pi \frac{\sigma}{L})\}\right) d\sigma, \quad y(s) = \int_0^s \sin\left(\frac{L}{2\pi h} \{1 - \cos(2\pi \frac{\sigma}{L})\}\right) d\sigma.$$

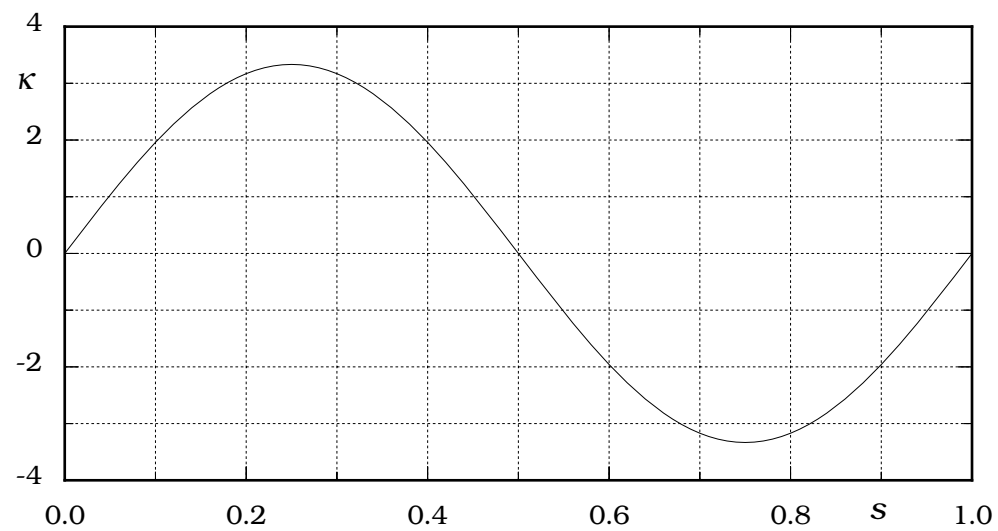
Mit den speziellen Werten

$$L=1.0 \quad h=0.3L, \quad 0 \leq s \leq L$$

ergibt sich die Kurve

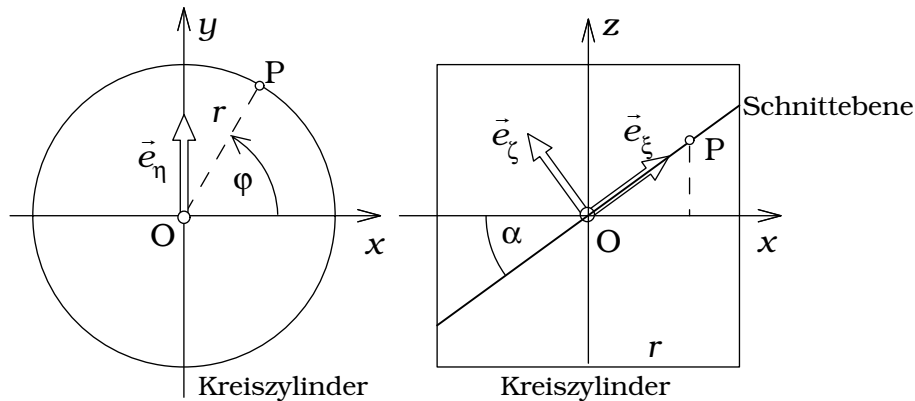


Die Krümmung als Funktion der Bogenlänge s ist im folgenden Bild dargestellt:



▼ Beispiel 9.13

Man berechne die Schnittkurve eines Kreiszyinders (Radius r , z -Achse = Zylinderachse) mit einer Ebene, die mit der xy -Ebene den Winkel α bildet und die y -Achse enthält.



Der Ortsvektor des Punktes P auf der Schnittkurve, also auf dem Zylinder und in der geneigten $\xi\eta$ -Ebene lautet:

$$\vec{OP} = r \cos \varphi \vec{e}_x + r \sin \varphi \vec{e}_y + z(\varphi) \vec{e}_z,$$

$$\frac{z(\varphi)}{x(\varphi)} = \tan \alpha, \quad \rightarrow \quad z(\varphi) = r \tan \alpha \cos \varphi,$$

$$\vec{OP} = r(\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y + \tan \alpha \cos \varphi \vec{e}_z) = r \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \tan \alpha \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

$$\vec{OP} = \xi_P \vec{e}_\xi + \eta_P \vec{e}_\eta; \quad \vec{e}_\xi = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_\eta = \vec{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\xi_P = \vec{OP} \cdot \vec{e}_\xi = r(\cos \varphi \cos \alpha + \tan \alpha \cos \varphi \sin \alpha) = r \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha},$$

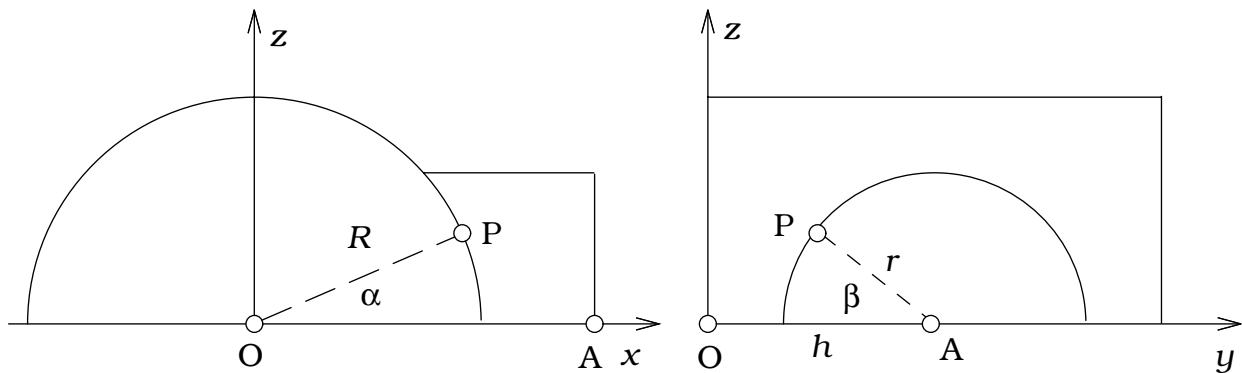
$$\eta_P = \vec{OP} \cdot \vec{e}_\eta = r \sin \varphi,$$

$$\frac{\xi_P}{r/\cos \alpha} = \cos \varphi, \quad \frac{\eta_P}{r} = \sin \varphi, \quad \rightarrow \quad \frac{\xi_P^2}{(r/\cos \alpha)^2} + \frac{\eta_P^2}{r^2} = 1.$$

Die Schnittkurve ist eine Ellipse mit den Halbachsen $(r/\cos \alpha)$ auf der ξ -Achse und r auf der η -Achse. ▲

▼ Beispiel 9.14

Man berechne die Parameterdarstellung der Schnittkurve zwischen dem Halbkreiszyylinder ($z > 0$) mit dem Radius R um die y -Achse und dem Halbkreiszyylinder ($z > 0$) mit dem Radius $r < R$ um die zur x -Achse parallele Achse $y = h$.



Der Ortsvektor des Punktes P der Schnittkurve auf dem Zylinder parallel zur y -Achse lautet:

$$\vec{OP} = R \cos \alpha \vec{e}_x + (h - r \cos \beta) \vec{e}_y + R \sin \alpha \vec{e}_z.$$

Mit der geometrischen Bedingung:

$$R \sin \alpha = r \sin \beta, \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{r}{R} \sin \beta\right), \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

ergibt sich schließlich die Parameterdarstellung der Schnittkurve mit β als Kurvenparameter:

$$\vec{OP} = \begin{bmatrix} R \cos(\arcsin(\frac{r}{R} \sin \beta)) \\ h - r \cos \beta \\ r \sin \beta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi.$$



▼ Beispiel 2.15

Man berechne die Schnittkurve zwischen einer Kugel­fläche und einem Kreis­zylinder.

Wir verwenden die Parameterdarstellungen der Kugel­fläche

$$x_1 = R \sin \alpha \cos \beta, \quad x_2 = R \sin \alpha \sin \beta, \quad x_3 = R \cos \alpha,$$

$$0 \leq \alpha < \pi, \quad 0 \leq \beta < 2\pi;$$

und der Kreis­zylinder­fläche

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = -\frac{R}{2} + r \sin \lambda, \quad x_3 = r \cos \lambda,$$

$$2r < R, \quad 0 \leq \lambda < 2\pi.$$

Für die Punkte auf der Schnittkurve, die auf der Kugel- und der Kreis­zylinder­fläche liegen, gilt dann:

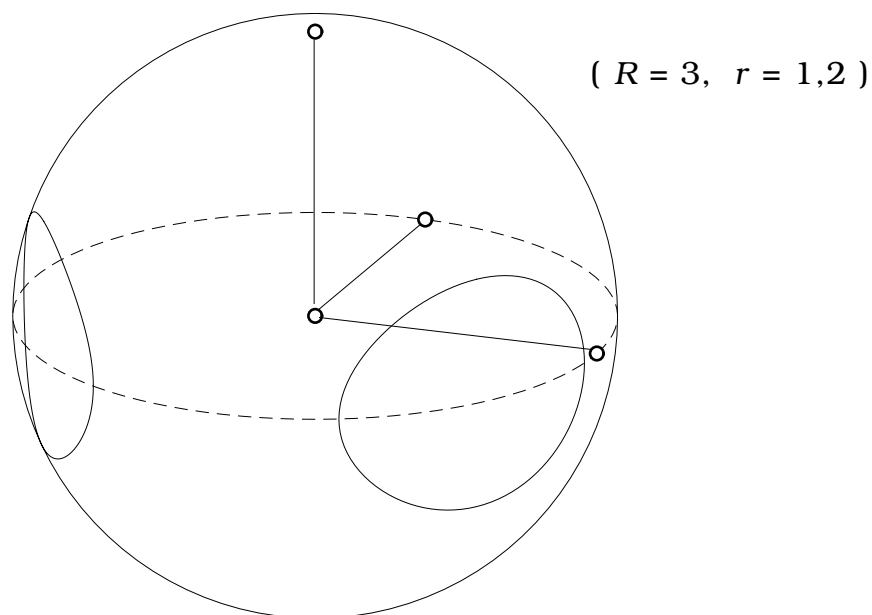
$$x_1 = R \sin \alpha \cos \beta,$$

$$-\frac{R}{2} + r \sin \lambda = R \sin \alpha \sin \beta, \quad \alpha(\lambda) = \arccos\left(\frac{r}{R} \cos \lambda\right),$$

$$r \cos \lambda = R \cos \alpha. \quad \beta(\lambda) = \arcsin\left(\frac{-R + 2r \sin \lambda}{2R \sin \alpha(\lambda)}\right).$$

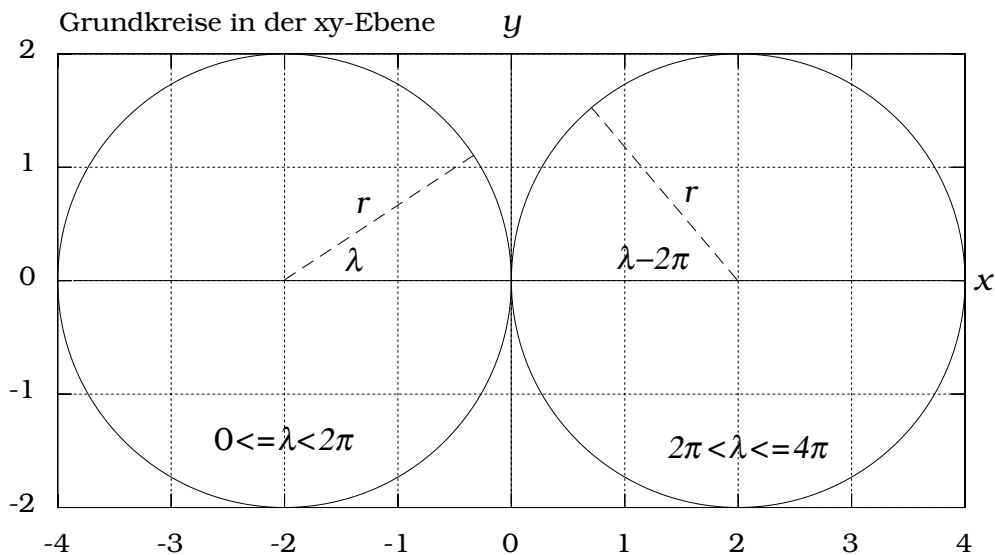
Somit lautet die Parameterdarstellung der Schnittkurve:

$$x_1(\lambda) = R \sin \alpha(\lambda) \cos \beta(\lambda), \quad x_2(\lambda) = -\frac{R}{2} + r \sin \lambda, \quad x_3(\lambda) = r \cos \lambda.$$

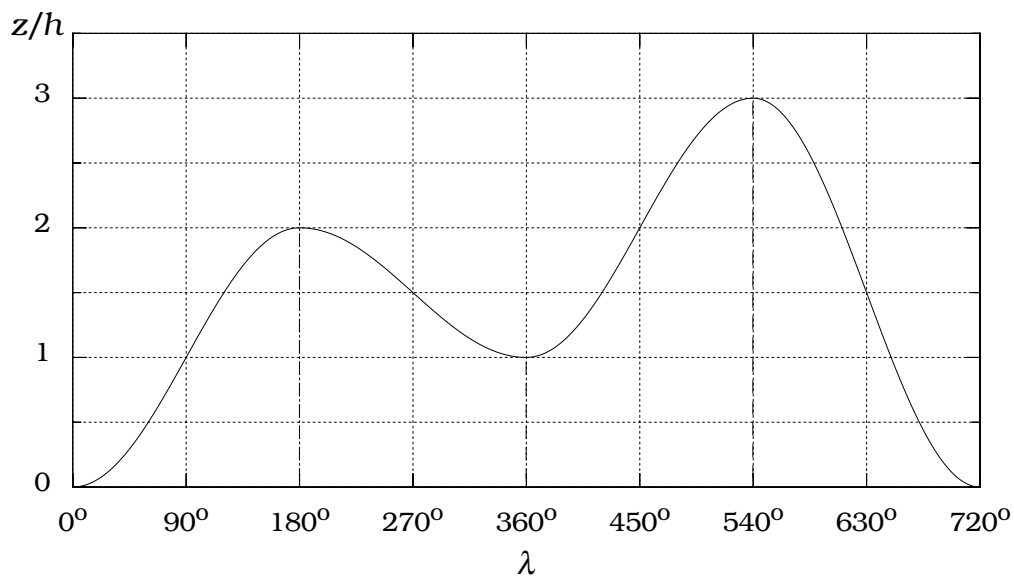


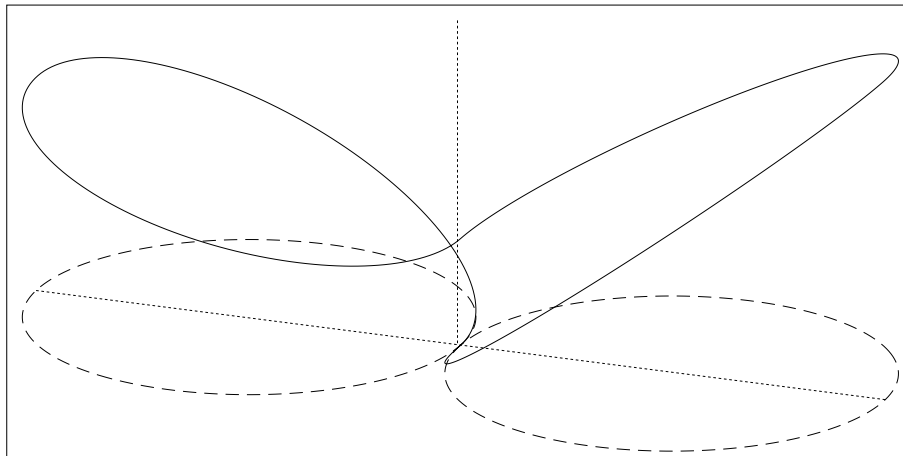
▼ Beispiel 9.16

Man bestimme die Parameterdarstellung $\{x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)\}$ einer Achterbahn über zwei Grundkreisen in der xy -Ebene, deren z -Koordinate durch vier \cos -Funktionssegmente beschrieben wird. Anschließend berechne man den Krümmungsradius der Bahn als Funktion von λ .



Höhenprofil über den Grundkreisen





Achterbahn

Wegen

$$3 + \cos(\lambda - \pi) = 3 - \cos \lambda, \quad 2 - \cos(\lambda - 2\pi) = 2 - \cos \lambda, \quad 1 + \cos(\lambda - 3\pi) = 1 - \cos \lambda$$

erhalten wir die folgenden Koordinaten der Raumkurve als Funktionen des Kurvenparameters λ sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen nach λ :

	$x(\lambda)$	$y(\lambda)$	$z(\lambda)$
$0 \leq \lambda < \pi$	$r(-1 + \cos \lambda)$	$r \sin \lambda$	$2h(1 - \cos \lambda)$
$\pi \leq \lambda < 2\pi$	$r(-1 + \cos \lambda)$	$r \sin \lambda$	$h(3 - \cos \lambda)$
$2\pi \leq \lambda < 3\pi$	$r(1 - \cos \lambda)$	$r \sin \lambda$	$2h(2 - \cos \lambda)$
$3\pi \leq \lambda < 4\pi$	$r(1 - \cos \lambda)$	$r \sin \lambda$	$3h(1 - \cos \lambda)$

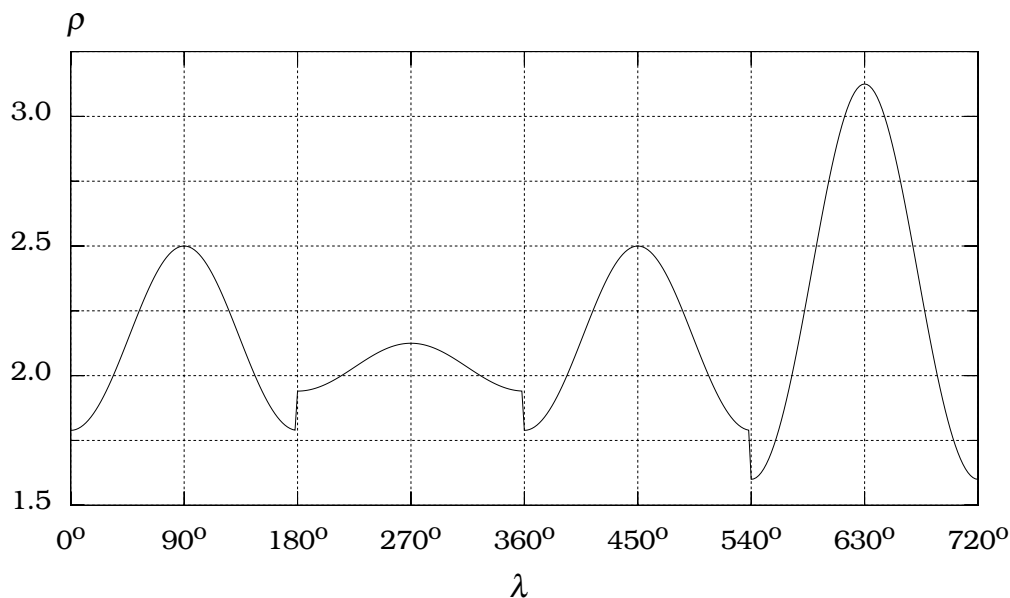
	$x'(\lambda)$	$y'(\lambda)$	$z'(\lambda)$		$x''(\lambda)$	$y''(\lambda)$	$z''(\lambda)$
$0 \leq \lambda < \pi$	$-r \sin \lambda$	$r \cos \lambda$	$2h \sin \lambda$	$0 \leq \lambda < \pi$	$-r \cos \lambda$	$-r \sin \lambda$	$2h \cos \lambda$
$\pi \leq \lambda < 2\pi$	$-r \sin \lambda$	$r \cos \lambda$	$h \sin \lambda$	$\pi \leq \lambda < 2\pi$	$-r \cos \lambda$	$-r \sin \lambda$	$h \cos \lambda$
$2\pi \leq \lambda < 3\pi$	$r \sin \lambda$	$r \cos \lambda$	$2h \sin \lambda$	$2\pi \leq \lambda < 3\pi$	$r \cos \lambda$	$-r \sin \lambda$	$2h \cos \lambda$
$3\pi \leq \lambda < 4\pi$	$r \sin \lambda$	$r \cos \lambda$	$3h \sin \lambda$	$3\pi \leq \lambda < 4\pi$	$r \cos \lambda$	$-r \sin \lambda$	$3h \cos \lambda$

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| = \{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{1/2}, \quad \vec{e}_s(\lambda) = \{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{-1/2} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

$$\text{Krümmungsradius } \rho = \left| \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \right| \left/ \left| \frac{d\vec{e}_s}{d\lambda} \right| \right|,$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{d\lambda} = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{3/2}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \frac{1}{\{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{1/2}} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{d\lambda} = \frac{1}{\{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{3/2}} \begin{bmatrix} (y'^2 + z'^2)x'' - x'y'y'' - x'z'z'' \\ -x'y'x'' + (z'^2 + x'^2)y'' - y'z'z'' \\ -x'z'x'' - y'z'y'' + (x'^2 + y'^2)z'' \end{bmatrix},$$



▼ Beispiel 9.17

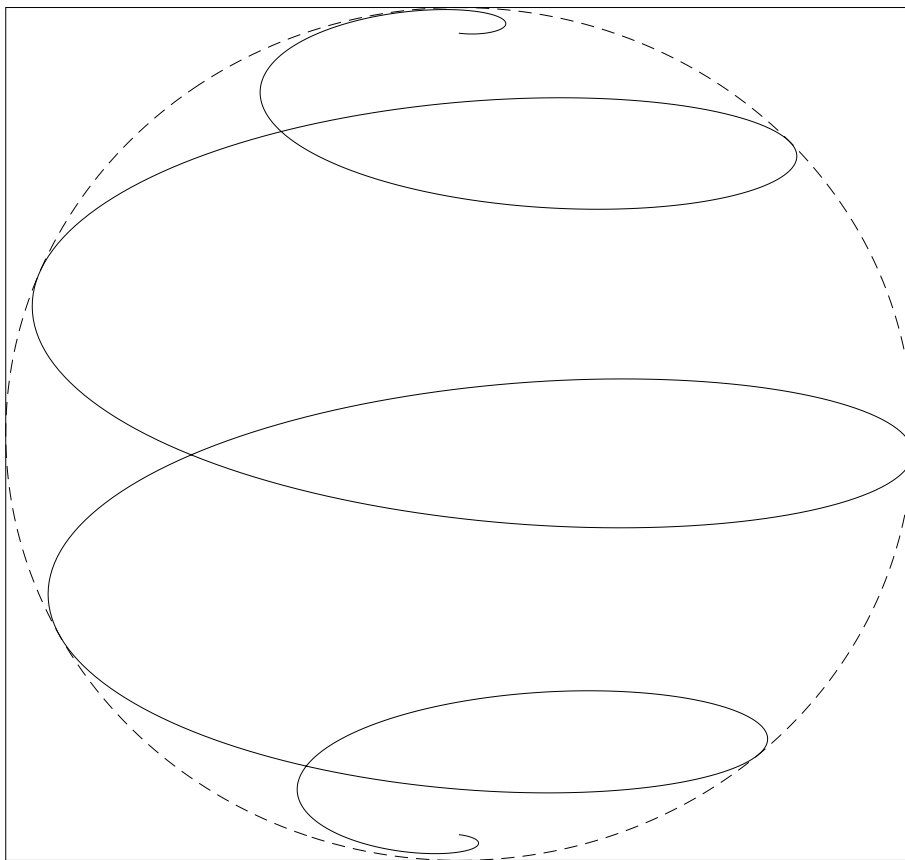
Auf einer Kugelfläche (Radius $r = 2$) soll die Parameterdarstellung einer Spirale mit der Steigung $\Delta\vartheta = \pi/4$ im Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ in Kugelkoordinaten berechnet werden und daraus der Krümmungsradius ρ als Funktion des Winkels φ , der als Kurvenparameter verwendet werden soll.

Aus den Beziehungen zwischen den kartesischen Koordinaten und den Kugelkoordinaten folgt

$$x(\varphi) = r \sin\left(\Delta\vartheta \frac{\varphi}{2\pi}\right) \cos \varphi = r \sin(\varphi/8) \cos \varphi,$$

$$y(\varphi) = r \sin\left(\Delta\vartheta \frac{\varphi}{2\pi}\right) \sin \varphi = r \sin(\varphi/8) \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 8\pi$$

$$z(\varphi) = r \cos\left(\Delta\vartheta \frac{\varphi}{2\pi}\right) = r \cos(\varphi/8).$$



Dann wird

$$x'(\varphi) = r \left\{ \frac{1}{8} \cos(\varphi/8) \cos \varphi - \sin(\varphi/8) \sin \varphi \right\},$$

$$y'(\varphi) = r \left\{ \frac{1}{8} \cos(\varphi/8) \sin \varphi + \sin(\varphi/8) \cos \varphi \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 8\pi$$

$$z'(\varphi) = -r \frac{1}{8} \sin(\varphi/8).$$

$$x''(\varphi) = r \left\{ -\frac{1}{64} \sin(\varphi/8) \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos(\varphi/8) \sin \varphi - \sin(\varphi/8) \cos \varphi \right\},$$

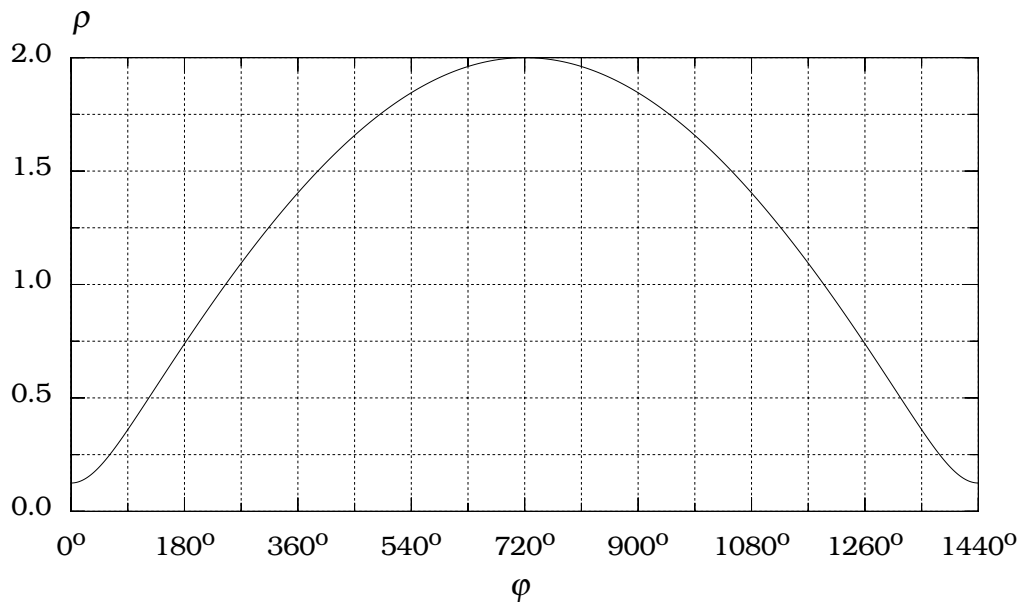
$$y''(\varphi) = r \left\{ -\frac{1}{64} \sin(\varphi/8) \sin \varphi + \frac{1}{4} \cos(\varphi/8) \cos \varphi - \sin(\varphi/8) \sin \varphi \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq 8\pi$$

$$z''(\varphi) = -r \frac{1}{64} \cos(\varphi/8).$$

Die Auswertung erfolgt nach den Formeln

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| = \{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{1/2}, \quad \vec{e}_s(\varphi) = \{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{-1/2} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

$$\frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} = \frac{1}{\{x'^2 + y'^2 + z'^2\}^{3/2}} \begin{bmatrix} (y'^2 + z'^2)x'' - x'y'y'' - x'z'z'' \\ -x'y'x'' + (z'^2 + x'^2)y'' - y'z'z'' \\ -x'z'x'' - y'z'y'' + (x'^2 + y'^2)z'' \end{bmatrix}, \quad \rho = \left| \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| \left/ \left| \frac{d\vec{e}_s}{d\varphi} \right| \right|,$$



Für die Krümmungsradien der Ellipse mit den Halbachsen a und b ergibt sich damit

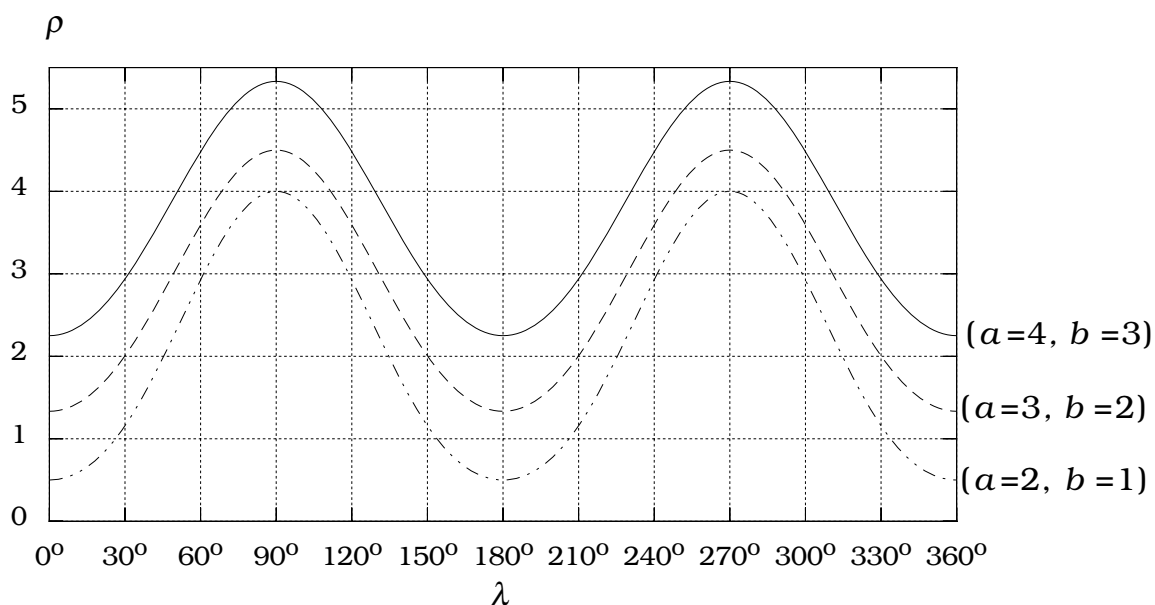
$$\rho(\lambda) = \frac{\{a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda\}^{3/2}}{ab}.$$

Für die Scheitelpunkte auf der x -Achse wird

$$\rho(0) = \rho(\pi) = \frac{b^2}{a},$$

und für die Scheitelpunkte auf der y -Achse

$$\rho(\pi/2) = \rho(3\pi/2) = \frac{a^2}{b},$$



▼ Beispiel 9.19

Man berechne für zwei Punkte auf einer Kugel­fläche (Radius R) ihren Abstand entlang des sie verbindenden Breitenkreises und entlang des von ihnen definierten Großkreises. Außerdem bestimme man die Beschreibung des Großkreises.

Wir verwenden ein von den üblichen Kugelkoordinaten abweichendes Koordinatensystem, das auf den Äquator in der xy -Ebene bezogen ist. Auf den Meridianen orientieren wir uns mit dem Winkel ϑ , auf den Breitenkreisen mit dem Winkel φ :

$$\begin{aligned} \text{Südpol: } \vartheta &= -\pi/2, \\ \text{Äquator: } \vartheta &= 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \\ \text{Nordpol: } \vartheta &= \pi/2. \end{aligned}$$

Der Ortsvektor eines Kugelflächenpunktes P lautet dann:

$$\vec{r} = R\vec{e}_P = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

Durch zwei Punkte auf der Kugelfläche ist ein Großkreis bestimmt, dessen Mittelpunkt im Kugelmittelpunkt liegt. Die beiden Ortsvektoren

$$R\vec{e}_{P_1} = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \\ \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{bmatrix}, \quad R\vec{e}_{P_2} = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{bmatrix},$$

liegen in der Kreisebene und bilden miteinander den Winkel α , wobei

$$\cos \alpha = \vec{e}_{P_1} \cdot \vec{e}_{P_2} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \\ \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{bmatrix},$$

$$\cos \alpha = \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2 + \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2,$$

$$\cos \alpha = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2$$

ist. Die Entfernung der beiden Punkte auf dem Großkreis ist

$$s_{(GK)} = R\alpha.$$

Wenn insbesondere die beiden Punkte auf einem Breitenkreis $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_0$ liegen, wird

$$\cos \alpha = \cos^2 \vartheta_0 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin^2 \vartheta_0.$$

Die Entfernung der beiden Punkte längs des Breitenkreises ist

$$s_{(BK)} = (\varphi_2 - \varphi_1) R \cos \vartheta_0.$$

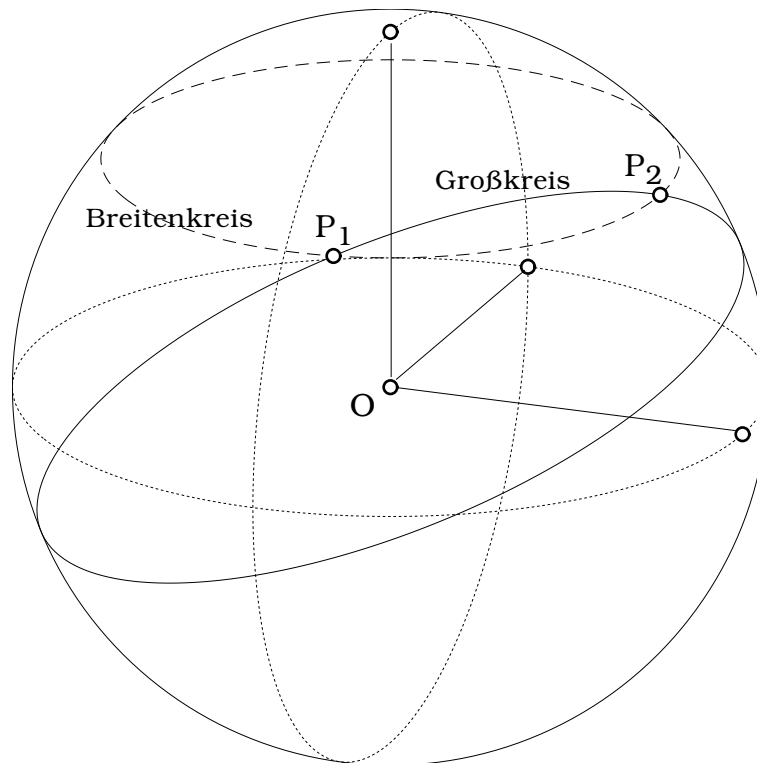
Für die speziellen Werte $\vartheta_0 = 45^\circ$, $\varphi_2 - \varphi_1 = 90^\circ$ wird

$$\alpha = \arccos(1/2) = 1.047,$$

$$s_{(GK)} = 1.047 R,$$

$$s_{(BK)} = \frac{\pi}{2} R \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.111 R.$$

Die kürzeste Verbindung von zwei Punkten auf der Kugeloberfläche liegt auf dem Großkreis, den die beiden Kugelflächenpunkte definieren. Die Großkreise sind die geodätischen Linien der Kugelfläche.



Hat die Ebene eines Großkreises den Normalenvektor

$$\vec{n}_{(GK)} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix},$$

so muss die Ortsvektoren zu den Punkten des Großkreises

$$\vec{r} = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \end{bmatrix}$$

die Orthogonalitätsbedingung

$$\vec{r} \cdot \vec{n}_{(GK)} = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = 0$$

erfüllen.

Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen den Winkeln ϑ und φ :

$$n_x \cos \vartheta \cos \varphi + n_y \cos \vartheta \sin \varphi + n_z \sin \vartheta = 0,$$

$$\tan \vartheta = -\frac{n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi}{n_z},$$

$$\vartheta(\varphi) = \arctan\left(\frac{n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi}{-n_z}\right), \quad (-\pi/2 < \vartheta < \pi/2)$$

Damit lautet die Parameterdarstellung des geneigten Großkreises mit der Kreis-ebenenormalen \vec{n} ,

$$\vec{r}_{(GK)}(\varphi) = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta(\varphi) \cos \varphi \\ \cos \vartheta(\varphi) \sin \varphi \\ \sin \vartheta(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Die Tangentenvektoren an den Großkreis lauten

$$\vec{t}(\varphi) = \frac{d\vec{r}(\varphi)}{d\varphi} = R \left\{ \begin{bmatrix} -\sin \vartheta(\varphi) \cos \varphi \\ -\sin \vartheta(\varphi) \sin \varphi \\ \cos \vartheta(\varphi) \end{bmatrix} \frac{d\vartheta(\varphi)}{d\varphi} + \cos \vartheta(\varphi) \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

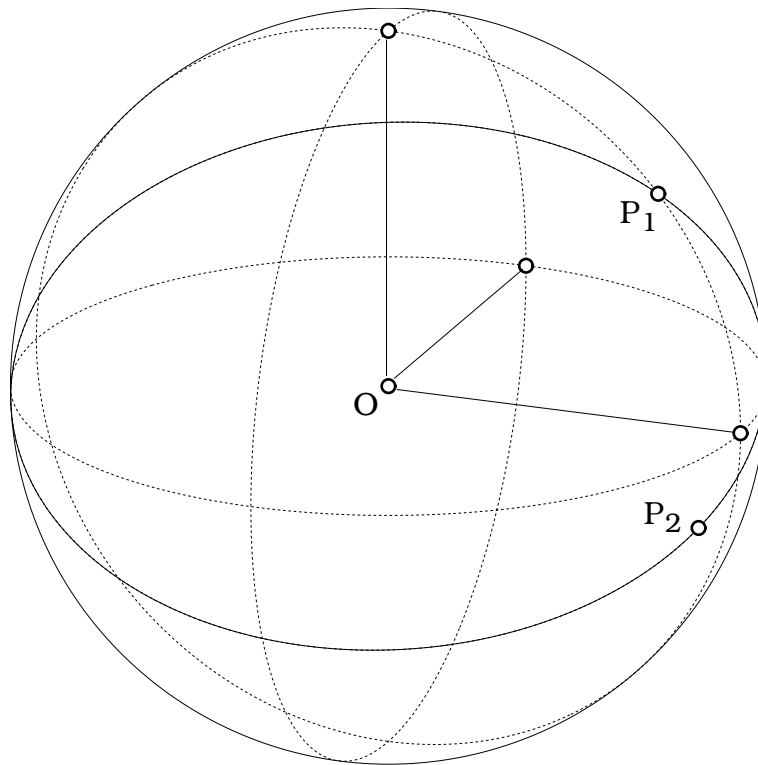
$$\vec{t}(\varphi) = R \left\{ \vec{e}_\vartheta(\vartheta(\varphi), \varphi) \frac{d\vartheta(\varphi)}{d\varphi} + \sin \vartheta(\varphi) \vec{e}_\varphi(\varphi) \right\}.$$

$$\frac{d\vartheta(\varphi)}{d\varphi} = \frac{n_z(n_x \sin \varphi - n_y \cos \varphi)}{n_z^2 + (n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi)^2}.$$

Um den Großkreis durch zwei Punkte $P_1:(\vartheta_1, \varphi_1)$ und $P_2:(\vartheta_2, \varphi_2)$ auf der Kugelfläche zu beschreiben, setzen wir

$$\vec{n} = \vec{e}_{P_1} \times \vec{e}_{P_2} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \\ \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \\ \sin \vartheta_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2 \\ \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 \\ \sin \vartheta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta_2 - \cos \vartheta_2 \sin \varphi_2 \sin \vartheta_1 \\ \cos \vartheta_2 \cos \varphi_2 \sin \vartheta_1 - \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{bmatrix}.$$

$$\vartheta(\varphi) = \arctan\left(\frac{n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi}{-n_z}\right), \quad \vec{r}_{(GK)}(\varphi) = R \begin{bmatrix} \cos \vartheta(\varphi) \cos \varphi \\ \cos \vartheta(\varphi) \sin \varphi \\ \sin \vartheta(\varphi) \end{bmatrix}.$$



Im Bild sind die Punkte

$$P_1: (\varphi = 0^\circ, \vartheta = 40^\circ), \quad P_2: (\varphi = 40^\circ, \vartheta = -30^\circ),$$

der entsprechende Großkreis, die Meridiane (gepunktet)

$$(\varphi = 0^\circ), (\varphi = 90^\circ), (\varphi = 180^\circ), (\varphi = 270^\circ)$$

und der Äquator ($\vartheta = 0^\circ$) dargestellt.



Matrizenrechnung

Eine $n \times m$ -**Matrix** $[A]$ ist ein rechteckiges Zahlenschema mit n **Zeilen** und m **Spalten**. Die Matrixelemente werden mit zwei Indizes gekennzeichnet, wobei immer

der erste Index der **Zeilenindex** und
der zweite der **Spaltenindex**

ist; das Element der Matrix $[A]$ in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte wird also mit A_{ij} bezeichnet. Ist beispielsweise $[A]$ eine 2×3 -Matrix, so lautet die Matrixdarstellung

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}.$$

Die Multiplikation einer Matrix $[A]$ mit einer Zahl λ ergibt eine Matrix $[B]$ gleicher Form:

$$[B] = \lambda[A] \Leftrightarrow B_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$$

Weiterhin gilt bei Matrizen gleicher Form

$$[C] = \lambda[A] + \mu[B] \Leftrightarrow C_{ij} = \lambda A_{ij} + \mu B_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$$

Unter dem **Transponieren** einer Matrix – notiert durch ein hochgestelltes T nach dem Matrixsymbol – verstehen wir den Austausch von Zeilen und Spalten:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 18 \\ 12 & 9 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ -4 & 9 \\ 18 & -2 \end{bmatrix}.$$

Beim Transponieren entsteht also aus einer $n \times m$ -Matrix eine $m \times n$ -Matrix:

$$[A^T] = [A]^T \Leftrightarrow A^T_{ij} = A_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m.$$

Bei einer **quadratischen Matrix** sind Zeilen- und Spaltenzahl gleich groß. Die Matrixplätze auf der Diagonalen von links oben nach rechts unten bilden die **Hauptdiagonale**; die Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen haben gleiche Indizes:

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & \dots \\ \dots & A_{22} & \dots \\ \dots & \dots & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{Hauptdiagonalelemente von } [A]$$

Die Summe der Hauptdiagonalelemente nennt man die **Spur** der Matrix:

$$\text{Spur}[A] := \sum_{i=1}^n A_{ii}.$$

Eine quadratische $n \times n$ -Matrix $[D]$ heißt **symmetrisch**, wenn

$$[D] = [D]^T, \Leftrightarrow D_{ij} = D_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

ist.

Die quadratische Matrix $[B]$ heißt **schiefsymmetrisch**, wenn

$$[B]^T = -[B], \Leftrightarrow B_{ji} = -B_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

ist. Die Hauptdiagonalelemente einer schiefsymmetrischen Matrix sind definitionsgemäß null.

Jede quadratische Matrix $[A]$ kann als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix dargestellt werden:

$$[A] = \underbrace{\frac{1}{2}([A] + [A]^T)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}([A] - [A]^T)}_{\text{schiefsymmetrisch}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 34 & -4 \\ 8 & -12 & 6 \\ 14 & -2 & -16 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 21 & 5 \\ 21 & -12 & 2 \\ 5 & 2 & -16 \end{bmatrix}}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 13 & -9 \\ -13 & 0 & 4 \\ 9 & -4 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{schiefsymmetrisch}}$$

Die **Determinante** einer quadratischen Matrix ist eine Zahl, die nach bestimmten Regeln aus den Elementen der Matrix berechnet wird.

Bei einer 2×2 -Matrix wird definiert

$$\det[A]_{2 \times 2} = \sum_{i,j=1}^2 e_{ij} A_{1i} A_{2j}.$$

Dabei hat das **Permutationssymbol** e_{ij} die Bedeutung

$$e_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{für } ij=12 \\ -1 & \text{für } ij=21 \\ 0 & \text{für } i=j \end{cases}$$

also wird

$$\det[A]_{2 \times 2} := A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Die Determinante einer 3×3 - Matrix ist definiert durch

$$\det[A]_{3 \times 3} = \sum_{i,j,k=1}^3 e_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$

Das Permutationssymbol e_{ijk} bedeutet

$$e_{ijk} := \begin{cases} +1 & \text{für } ijk=123, 231, 312 \\ -1 & \text{für } ijk=213, 321, 132 \\ 0 & \text{bei zwei oder drei gleichen Indizes} \end{cases}$$

Diese Definition besagt: e_{ijk} hat den Wert $+1$, wenn die Indexfolge ijk durch eine *gerade* Anzahl von Vertauschungen in die Reihenfolge 123 gebracht werden kann und den Wert -1 , wenn die Anzahl der erforderlichen Vertauschungen *ungerade* ist.

Die Determinante der 3×3 - Matrix $[A]$ kann also geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \det[A]_{3 \times 3} := & A_{11}A_{22}A_{33} + A_{13}A_{21}A_{32} + A_{12}A_{23}A_{31} - \\ & - A_{11}A_{23}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man beispielsweise die Matrixelemente der 1. Spalte: A_{11}, A_{21} und A_{31} mit $(+1, -1, +1)$ multipliziert, die so geänderten Matrixelemente dann mit den jeweiligen 2×2 Unterdeterminanten multipliziert und anschließend alle Produkte addiert:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det[A] = A_{11} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{21} \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{31} \det \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Vorzeichen beachten

Das Rechenschema funktioniert entsprechend, wenn man die Determinante nach einer beliebigen Zeile oder Spalte entwickelt. Man muss dabei nur das schachbrettartige Multiplikationsschema der Matrixelemente mit +1 und -1 beachten:

$$\begin{Bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det[A] = -A_{12} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{22} \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{32} \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Vorzeichen beachten

Vorzeichen beachten

Für die Berechnung der Determinanten von großen Matrizen gibt es spezielle numerische Verfahren.

Die Determinante einer quadratischen Matrix wird null, wenn eine Zeile (Spalte) eine Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) ist.

Aus den Eigenschaften der Permutationssymbole folgt, dass das Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) der Matrix zu einem Vorzeichenwechsel der Determinante führt.

Eine quadratische Matrix heißt **singulär**, wenn ihre Determinante null ist.
 Transponieren einer Matrix ändert nicht den Wert ihrer Determinante.

Die **Matrizenmultiplikation** einer $n \times p$ - Matrix $[A]$ mit einer $p \times m$ - Matrix $[B]$ liefert eine $n \times m$ - Matrix $[C]$ mit den Matrixelementen

$$[C] = [A][B] \Leftrightarrow C_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{array}$$

Die Matrizenmultiplikation lässt sich also nur ausführen, wenn die Zahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Zahl der Zeilen des zweiten Faktors ist; das Matrixelement C_{ij} ist die Produktsumme der Elemente in der i -ten Zeile von $[A]$ mit den Elementen in der j -ten Spalte von $[B]$.

Wenn man die zu multiplizierenden Matrizen wie in dem folgenden Schema für eine 2×4 - Matrix $[A]$ und eine 4×3 - Matrix $[B]$ anordnet, kann man die Multiplikation leicht ausführen: Man multipliziert die sich an einem Elementplatz kreuzenden Zeilen und Spalten der Matrizen $[A]$ und $[B]$ elementweise miteinander und addiert die Produkte

$$\begin{array}{cccc} & & & \begin{bmatrix} \dots & B_{12} & \dots \\ \dots & B_{22} & \dots \\ \dots & B_{32} & \dots \\ \dots & B_{42} & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \end{bmatrix} & & & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & C_{22} & \dots \end{bmatrix} \\ C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} + A_{24}B_{42} = \sum_{k=1}^4 A_{2k}B_{k2} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} = [B] \\ [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 38 & 26 \\ 22 & 22 & 9 \end{bmatrix} = [C] = [A][B] \end{array}$$

In der Programmiersprache **C** wird beispielsweise die Matrizenmultiplikation folgendermaßen formuliert: Zuerst werden die Speicherplätze für die Ergebnismatrix $[C]$ mit null belegt und anschließend werden die Elemente von $[C]$ zeilenweise berechnet, wobei p die Zahl der Spalten der Matrix $[A]$ und auch die Zahl der Zeilen der Matrix $[B]$ ist.

```

for (i=1; i<=n; i++)
  for (j=1; j<=m; j++)
    C[i][j]=0.0;
for (i=1; i<=n; i++)
  for (j=1; j<=m; j++)
    for (k=1; k<=p; k++)
      C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];

```

Die quadratische **Einheitsmatrix** $[1]$ hat die Matrixelemente

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

δ_{ij} nennt man auch **KRONECKERsches Deltasymbol**. Für $n = 3$ ist beispielsweise

$$[1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sind $[1]$ und $[A]$ $n \times n$ -Matrizen, so gilt

$$[A][1] = [1][A] = [A].$$

Bei quadratischen $n \times n$ -Matrizen $[A]$ und $[B]$ sind die Produkte $[A][B]$ und $[B][A]$ definiert, aber es gilt in der Regel:

$$[A][B] \neq [B][A].$$

Das Produkt quadratischer Matrizen ist *nicht* kommutativ!

Die Determinante des Produktes zweier quadratischer Matrizen ist gleich dem Produkt der Determinanten der einzelnen Matrizen:

$$\det([A][B]) = \det[A]\det[B].$$

Für das Transponieren von Matrizenprodukten gilt

$$([A][B])^T = [B]^T[A]^T.$$

Das **innere Produkt** von zwei quadratischen Matrizen $[A]$ und $[B]$ ist definiert durch

$$[A] \cdot [B] := \text{Spur}([A]^T[B]) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij}B_{ij}.$$

Eine spezielle Matrix ist die einspaltige Matrix mit n Zeilen. Wir bezeichnen sie als n -komponentigen **Vektor** und schreiben

$$\{v\} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}; \quad \{v\}^T := [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$$

Der transponierte Vektor ist also eine einzeilige Matrix.

Für das innere Produkt von zwei n -komponentigen Vektoren gilt:

$$\{u\} \cdot \{v\} = \text{Spur}(\{u\}^T\{v\}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Mit Hilfe von Vektoren und Matrizen lässt sich ein inhomogenes **lineares Gleichungssystem** für n Unbekannte x_1, x_2, \dots, x_n schreiben

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Wenn die zur Matrix $[A]$ **inverse Matrix** $[A]^{-1}$ existiert, die die Eigenschaft

$$[A]^{-1}[A] = [1]$$

besitzt, lässt sich die Lösung des linearen Gleichungssystems formal schreiben

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\}.$$

Bei einer 2×2 - Matrix ist beispielsweise

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad [A]^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}.$$

$[A]^{-1}$ existiert also, wenn $\det[A] = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \neq 0$ ist.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[A]} \begin{bmatrix} A_{22}b_1 - A_{12}b_2 \\ -A_{21}b_1 + A_{11}b_2 \end{bmatrix}.$$

Wenn die Zahl der Unbekannten nicht zu groß ist, lässt sich meistens das **Eliminationsverfahren** leicht anwenden: Man multipliziert die Gleichungen mit geeigneten Faktoren so, dass man durch Kombination der modifizierten Gleichungen nur noch eine Gleichung für eine Unbekannte behält. Das wiederholt man so lange, bis alle Unbekannten berechnet sind.

Große lineare Gleichungssysteme löst man mit Hilfe von effizienten Computerprogrammen, beispielsweise nach dem GAUSS-Verfahren.

Für Gleichungssysteme mit **symmetrischer** Koeffizientenmatrix $[K]$ ist es zweckmäßig, die L^TDL -**Zerlegung** der Matrix $[K]$ in das Produkt einer linken unteren Dreiecksmatrix $[L]^T$, einer Diagonalmatrix $[D]$ und einer oberen rechten Dreiecksmatrix $[L]$ anzuwenden, die sich schematisch zeilenweise durchführen und leicht programmieren lässt

$$[K] = [L]^T [D] [L].$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1n} \\ 0 & 1 & L_{23} & \dots & L_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & L_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{nn} \end{bmatrix}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem

$$[K]\{v\} = \{F\}$$

lautet dann

$$[L]^T \underbrace{[D][L]\{v\}}_{\{w\}} = \{F\}$$

Durch Vorwärtseinsetzen (von oben nach unten) bestimmt man zunächst den Vektor $\{w\}$, danach aus dem Gleichungssystem

$$[D][L]\underbrace{\{v\}} = \{w\}$$

den Vektor $\{u\}$ und schließlich aus dem Gleichungssystem

$$[L]\{v\} = \{u\}$$

durch Rückwärtseinsetzen (von unten nach oben) den Vektor $\{v\}$.

Die Determinante der Matrix ist gleich dem Produkt der Elemente der Diagonalmatrix $[D]$.

▼ Beispiel 10.1

Lösung eines linearen Gleichungssystems nach der Eliminationsmethode.

In dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -20, \\ 5x_1 + 2x_3 &= 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= -1, \end{aligned}$$

eliminieren wir zunächst die Unbekannte x_2 , indem wir die erste Gleichung mit +4, die zweite mit -3 multiplizieren und dann die geänderten Gleichungen addieren:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 12x_2 - 12x_3 &= -80, \\ -9x_1 - 12x_2 - 3x_3 &= 3, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad -x_1 - 15x_3 = -77.$$

Aus der zweiten Gleichung des ursprünglichen Gleichungssystems und dieser neuen Gleichung für x_1 und x_3

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_3 &= 20, \\ -x_1 - 15x_3 &= -77, \end{aligned}$$

erhalten wir nach Elimination von x_1

$$-73x_3 = -365 \quad \rightarrow \quad x_3 = 5$$

und damit

$$x_1 = 77 - 15x_3 \quad \rightarrow \quad x_1 = 2.$$

Schließlich folgt aus der ursprünglich ersten Gleichung

$$3x_2 = -20 - 2x_1 + 3x_3 = -9 \quad \rightarrow \quad x_2 = -3.$$



▼ Beispiel 10.2

Ausführliche Beschreibung der L^TDL - Zerlegung.

Für eine symmetrische 4×4 - Matrix $[K]$ gestaltet sich die systematische Generierung der Matrizen $[D]$ und $[L]$ nach dem folgenden Schema, in dem erkennbar ist, dass in jeder Gleichung nur die Ergebnisse der davor stehenden Gleichungen gebraucht werden und die Speicherplätze der $[K]$ - Matrix mit den Elementen der $[D]$ - und $[L]$ - Matrizen schrittweise überschrieben werden können.

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= K_{11} \rightarrow D_{11} \\
 D_{11}L_{12} &= K_{12} \rightarrow L_{12} \\
 D_{11}L_{13} &= K_{13} \rightarrow L_{13} \\
 D_{11}L_{14} &= K_{14} \rightarrow L_{14} \\
 D_{22} + D_{11}L_{12}^2 &= K_{22} \rightarrow D_{22} \\
 D_{22}L_{23} + D_{11}L_{12}L_{13} &= K_{23} \rightarrow L_{23} \\
 D_{22}L_{24} + D_{11}L_{12}L_{14} &= K_{24} \rightarrow L_{24} \\
 D_{33} + D_{11}L_{13}^2 + D_{22}L_{23}^2 &= K_{33} \rightarrow D_{33} \\
 D_{33}L_{34} + D_{11}L_{13}L_{14} + D_{22}L_{23}L_{24} &= K_{34} \rightarrow L_{34} \\
 D_{44} + D_{11}L_{14}^2 + D_{22}L_{24}^2 + D_{33}L_{34}^2 &= K_{44} \rightarrow D_{44}
 \end{aligned}$$

In drei Lösungsschritten $\{w\} \rightarrow \{u\} \rightarrow \{v\}$ erhalten wir dann den Lösungsvektor $\{v\}$ des ursprünglichen Gleichungssystems $[K]\{v\} = \{F\}$:

$$\begin{aligned}
 w_1 &= F_1 \rightarrow w_1 \\
 L_{12}w_1 + w_2 &= F_2 \rightarrow w_2 \\
 L_{13}w_1 + L_{23}w_2 + w_3 &= F_3 \rightarrow w_3 \\
 L_{14}w_1 + L_{24}w_2 + L_{34}w_3 + w_4 &= F_4 \rightarrow w_4 \\
 D_{11}u_1 = w_1 &\rightarrow u_1 & v_1 + L_{12}v_2 + L_{13}v_3 + L_{14}v_4 &= u_1 \rightarrow v_1 \\
 D_{22}u_2 = w_2 &\rightarrow u_2 & v_2 + L_{23}v_3 + L_{24}v_4 &= u_2 \rightarrow v_2 \\
 D_{33}u_3 = w_3 &\rightarrow u_3 & v_3 + L_{34}v_4 &= u_3 \rightarrow v_3 \\
 D_{44}u_4 = w_4 &\rightarrow u_4 & v_4 &= u_4 \rightarrow v_4
 \end{aligned}$$



Dyadische Produkte und Tensoren

Wir benutzen für die Darstellung von Vektoren im dreidimensionalen Raum eine orthonormierte Basis mit den Einheitsvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Der Vektor \vec{w} kann dann geschrieben werden:

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^3 w_i \vec{e}_i = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Das mit zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} gebildete **dyadische Produkt** ($\vec{a} \otimes \vec{b}$) vermittelt definitionsgemäß die folgende **lineare Abbildung** des Vektors \vec{u} in den Vektor \vec{v} :

$$\vec{v} = (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{u} := \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{u}) = \vec{a} \sum_{j=1}^3 b_j u_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \vec{e}_i a_i b_j u_j,$$

$$v_i = \sum_{j=1}^3 a_i b_j u_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

Wenn wir dem dyadischen Produkt die Matrixdarstellung

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$$

zuordnen und die Vektoren \vec{u} und \vec{v} als einspaltige Matrizen schreiben, erhalten wir die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\vec{u} \rightarrow \vec{v}$

$$\vec{v} = (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{u} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Für das Rechnen mit dyadischen Produkten gelten die folgenden Regeln:

(λ, μ : reelle Zahlen)

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{u} + \mu(\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{v},$$

$$\vec{a} \otimes (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = \lambda(\vec{a} \otimes \vec{b}) + \mu(\vec{a} \otimes \vec{c}),$$

$$(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \otimes \vec{c} = \lambda(\vec{a} \otimes \vec{c}) + \mu(\vec{b} \otimes \vec{c}),$$

$$\lambda(\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \otimes \vec{b}) = (\vec{a} \otimes \lambda\vec{b}),$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})(\vec{c} \otimes \vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \otimes \vec{d}) = \left(\sum_{i=1}^3 b_i c_i\right)(\vec{a} \otimes \vec{d}).$$

Das zu $(\vec{a} \otimes \vec{b})$ **transponierte** dyadische Produkt ist definiert durch

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = (\vec{b} \otimes \vec{a}).$$

Operatoren, die einen Vektor linear in einen anderen Vektor abbilden, nennt man **Tensoren zweiter Stufe**; dyadische Produkte sind also spezielle Tensoren.

Die mit den kartesischen (orthonormierten) Basisvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ gebildeten dyadischen Produkte $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ besitzen eine besonders einfache Matrixdarstellung: In Zeile i und Spalte j steht eine 1, alle übrigen Matrixelemente sind null. So gilt beispielsweise

$$(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix eines beliebigen Tensors \mathbf{T} ,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix},$$

der die lineare Abbildung

$$\vec{v} = \mathbf{T}\vec{u} \rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \rightarrow v_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} u_j$$

vermittelt,

kann zerlegt werden in die Summe von Matrizen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} = T_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + T_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + T_{33} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dieser Zerlegung entspricht die Darstellung

$$\mathbf{T} = T_{11}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) + T_{12}(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2) + \dots + T_{33}(\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j).$$

In Analogie zur Darstellung eines Vektors

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i$$

wobei die Einheitsvektoren \vec{e}_i die Basis der Darstellung bilden, nennt man die neun dyadischen Produkte $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ eine **Basis für** die Darstellung von **Tensoren zweiter Stufe**. Die Matrixelemente T_{ij} sind die Komponenten des Tensors \mathbf{T} in der dyadischen Basis $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$.

Ein spezieller Tensor ist der **Einheitstensor**

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \text{ ist;} \end{cases}$$

$$\mathbf{1} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

der Einheitstensor bildet jeden Vektor in sich ab:

$$\mathbf{1} \vec{u} = \vec{u}.$$

Das **Produkt zweier Tensoren**

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \quad \mathbf{S} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{kl} \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l,$$

ist definiert durch

$$\mathbf{U} = \mathbf{TS} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 T_{ij} S_{kl} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 T_{ij} S_{kl} \delta_{jk} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_l),$$

wobei

$$\bar{e}_j \cdot \bar{e}_k = \delta_{jk}$$

berücksichtigt wurde. Es wird also

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 U_{il} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_l) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 T_{ij} S_{jl} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_l),$$

$$U_{il} = \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{jl}.$$

Die Matrix des Tensors \mathbf{U} ist das Produkt der Matrizen der Tensoren \mathbf{T} und \mathbf{S} :

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix},$$

also beispielsweise

$$U_{23} = T_{21} S_{13} + T_{22} S_{23} + T_{23} S_{33}.$$

Für das **Transponieren eines Tensorproduktes** gilt die folgende Regel:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

Das Produkt eines Tensors \mathbf{F} mit seinem transponierten Tensor \mathbf{F}^T ist ein symmetrischer Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{FF}^T$$

denn es gilt

$$\mathbf{C}^T = (\mathbf{FF}^T)^T = (\mathbf{F}^T)^T \mathbf{F}^T = \mathbf{FF}^T = \mathbf{C}.$$

Der zum Tensor \mathbf{A} **inverse Tensor** \mathbf{A}^{-1} hat die Eigenschaft

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

Wegen

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) = \mathbf{A} \mathbf{1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

gilt auch

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}.$$

Ein **orthogonaler Tensor** \mathbf{Q} hat definitionsgemäß die Eigenschaft

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{1}.$$

Wir definieren nun das **innere (skalare) Produkt** zweier dyadischer Produkte durch die Vorschrift

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{c} \otimes \vec{d}) := (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) = \sum_{i=1}^3 a_i c_i \sum_{j=1}^3 b_j d_j.$$

Demnach wird

$$(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) = \delta_{ip} \delta_{jq}.$$

Die Tensorkomponente T_{pq} des Tensors \mathbf{T} erhalten wir durch skalare Multiplikation des Tensors \mathbf{T} mit der Dyade $(\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q)$:

$$\mathbf{T} \cdot (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \delta_{ip} \delta_{jq} = T_{pq}.$$

Man kann die Komponenten aber auch nach der Formel

$$T_{pq} = \vec{e}_p \cdot (\mathbf{T} \vec{e}_q)$$

berechnen.

Für das innere (skalare) Produkt zweier Tensoren erhalten wir nach der obigen Definition die Produktschrittsumme der Tensorkomponenten:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{pq} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_p \otimes \vec{e}_q) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 S_{pq} \delta_{ip} \delta_{jq},$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} S_{ij}.$$

Wir führen nun eine neue orthonormierte Basis $\{\vec{e}_\alpha^*\}$ für die Darstellung von Vektoren ein:

$$\vec{e}_\alpha^* = \sum_{i=1}^3 A_{\alpha i} \vec{e}_i, \quad \rightarrow \quad A_{\alpha i} = \vec{e}_\alpha^* \cdot \vec{e}_i = \cos(\vec{e}_\alpha^*, \vec{e}_i).$$

Es ist dann

$$\vec{e}_i = \sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha i} \vec{e}_\alpha^*,$$

und weil

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \quad \vec{e}_\alpha^* \cdot \vec{e}_\beta^* = \delta_{\alpha\beta}$$

ist, gilt

$$\sum_{\alpha=1}^3 A_{\alpha i} A_{\alpha j} = \delta_{ij}, \quad \sum_{i=1}^3 A_{\alpha i} A_{\beta i} = \delta_{\alpha\beta},$$

Der Vektor \vec{u} besitzt in den beiden Basis-Systemen die Darstellungen

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i = \sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha}^* \vec{e}_{\alpha}^*.$$

Zwischen den jeweiligen Vektorkomponenten bestehen die Beziehungen

$$u_{\alpha}^* = \vec{e}_{\alpha}^* \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{\alpha}^* \cdot \vec{e}_i u_i = \sum_{i=1}^3 A_{\alpha i} u_i.$$

Entsprechendes gilt für die Darstellung eines Tensors zweiter Stufe:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\beta}^* (\vec{e}_{\alpha}^* \otimes \vec{e}_{\beta}^*),$$

$$T_{\alpha\beta}^* = \mathbf{T} \cdot (\vec{e}_{\alpha}^* \otimes \vec{e}_{\beta}^*) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot (\vec{e}_{\alpha}^* \otimes \vec{e}_{\beta}^*) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{\alpha i} A_{\beta j} T_{ij}.$$

Unter der **Spur eines Tensors** versteht man die Summe der Hauptdiagonalelemente in der Matrix des Tensors oder das innere Produkt des Tensors mit dem Einheitsensor:

$$\text{Spur}(\mathbf{T}) := \sum_{i=1}^3 T_{ii} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j) \cdot \mathbf{1} &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\beta}^* (\vec{e}_{\alpha}^* \otimes \vec{e}_{\beta}^*) \cdot \mathbf{1}, \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \delta_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 T_{\alpha\beta}^* \delta_{\alpha\beta}, \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^3 T_{ii} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha}^*. \end{aligned}$$

Die Spur eines Tensors ist also unabhängig von der für die Darstellung des Tensors gewählten Basis; die Spur ist eine **Invariante** des Tensors.

Ein Tensor wird **symmetrisch** genannt, wenn

$$\mathbf{T}^T = \mathbf{T}, \quad T_{ij} = T_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

ist. Für solche Tensoren kann man immer Vektoren \vec{a} finden, für die

$$\mathbf{T} \vec{a} = \tau \vec{a}, \quad \rightarrow \quad (\mathbf{T} - \tau \mathbf{1}) \vec{a} = \vec{0}$$

wird.

Man nennt einen Vektor mit dieser Eigenschaft **Eigenvektor** des symmetrischen Tensors und τ den entsprechenden **Eigenwert**.

Das homogene Gleichungssystem

$$(\mathbf{T} - \tau \mathbf{1}) \vec{a} = \vec{0}$$

besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det(\mathbf{T} - \tau \mathbf{1}) = 0$$

wird. Diese **charakteristische Gleichung** ist eine kubische Gleichung für τ

$$\tau^3 - I_1 \tau^2 + I_2 \tau - I_3 = 0$$

mit den Koeffizienten

$$I_1 := T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{Spur}(\mathbf{T}),$$

$$I_2 := T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{23}^2 - T_{31}^2,$$

$$I_3 := T_{11}T_{22}T_{33} - T_{33}T_{12}^2 - T_{11}T_{23}^2 - T_{22}T_{31}^2 + 2T_{12}T_{23}T_{31} = \det(\mathbf{T}).$$

Die drei Lösungen der Gleichung

$$\tau^3 - I_1 \tau^2 + I_2 \tau - I_3 = 0$$

sind die Eigenwerte τ_I, τ_{II} und τ_{III} des Tensors \mathbf{T} .

Zu jedem dieser Eigenwerte besitzt das homogene Gleichungssystem

$$(\mathbf{T} - \tau \mathbf{1}) \vec{a} = \vec{0}$$

eine Lösung: den zum Eigenwert τ_H gehörenden Eigenvektor \vec{a}_H , der immer zu einem Einheitsvektor normiert werden kann.

Aus den Gleichungen für verschiedene Eigenwerte

$$\mathbf{T} \vec{a}_H = \tau_H \vec{a}_H, \quad \mathbf{T} \vec{a}_K = \tau_K \vec{a}_K,$$

folgt

$$\vec{a}_K \cdot (\mathbf{T} \vec{a}_H) = \tau_H \vec{a}_K \cdot \vec{a}_H,$$

$$\vec{a}_H \cdot (\mathbf{T} \vec{a}_K) = \tau_K \vec{a}_H \cdot \vec{a}_K.$$

Weil der Tensor \mathbf{T} symmetrisch ist, gilt

$$\vec{a}_K \cdot (\mathbf{T} \vec{a}_H) = \vec{a}_H \cdot (\mathbf{T} \vec{a}_K)$$

und wenn wir die beiden Gleichungen voneinander subtrahieren

$$(\tau_H - \tau_K) \vec{a}_H \cdot \vec{a}_K = 0, \quad \rightarrow \quad \vec{a}_H \cdot \vec{a}_K = 0 \quad \text{wenn } \tau_H \neq \tau_K \text{ ist.}$$

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind also zueinander orthogonal. Deshalb können die drei normierten Eigenvektoren als Vektorbasis benutzt werden. Man nennt diese Basis das **Hauptachsensystem** des Tensors \mathbf{T} . Wird damit eine Tensorbasis $(\vec{a}_H \otimes \vec{a}_K)$ gebildet, so lauten die Komponenten von \mathbf{T} in dieser Basis

$$T_{KH} = \vec{a}_K \cdot (\mathbf{T}\vec{a}_H) = \vec{a}_K \cdot (\tau_H \vec{a}_H) = \tau_H (\vec{a}_K \cdot \vec{a}_H) = \tau_H \delta_{KH},$$

$$\mathbf{T} = \tau_I \vec{a}_I \otimes \vec{a}_I + \tau_{II} \vec{a}_{II} \otimes \vec{a}_{II} + \tau_{III} \vec{a}_{III} \otimes \vec{a}_{III},$$

und die Matrixdarstellung im Hauptachsensystem

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \tau_I & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{III} \end{bmatrix}_{(HAS)}.$$

Die drei Koeffizienten in der charakteristischen Gleichung

$$\tau^3 - I_1 \tau^2 + I_2 \tau - I_3 = 0$$

können auch durch die Eigenwerte ausgedrückt werden:

$$I_1 = \tau_I + \tau_{II} + \tau_{III},$$

$$I_2 = \tau_I \tau_{II} + \tau_{II} \tau_{III} + \tau_{III} \tau_I,$$

$$I_3 = \tau_I \tau_{II} \tau_{III}.$$

I_1, I_2 und I_3 sind unabhängig von der zur Darstellung des Tensors benutzten Basis; sie sind die **drei Invarianten** des Tensors \mathbf{T} .

Der auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitstensor Θ_S , der Deformationstensor ϵ und der Spannungstensor σ sind Beispiele für symmetrische Tensoren zweiter Stufe in der Festkörpermechanik. Die entsprechenden Eigenwerte sind dann die Hauptträgheitsmomente, Hauptdehnungen und Hauptspannungen und die Eigenvektoren geben die Hauptträgheitsrichtungen, Hauptdehnungsrichtungen und die Hauptspannungsrichtungen an.

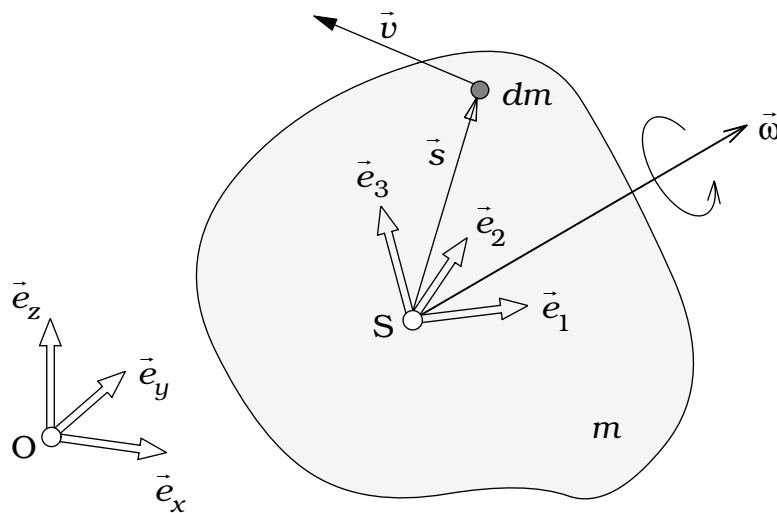
▼ Beispiel 11.1

Ein starrer Körper der Masse m und der Massendichte ρ habe momentan die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und sein Massenmittelpunkt (= Schwerpunkt) S die Geschwindigkeit \vec{v}_S . Das Massenelemente $dm = \rho dV$ mit dem körperfesten Ortsvektor

$$\vec{s} = s_1 \vec{e}_1 + s_2 \vec{e}_2 + s_3 \vec{e}_3,$$

dargestellt in der körperfesten Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, hat dann die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{s}.$$



Der auf den Schwerpunkt S bezogene momentane Drehimpulsvektor des Massenelementes dm ist definiert durch

$$d\vec{L}_S := dm \vec{s} \times \vec{v}.$$

Die Summation über alle Massenelemente liefert den auf S bezogenen **Drehimpulsvektor** des starren Körpers

$$\vec{L}_S = \int_m \vec{s} \times \vec{v} dm.$$

Aus der Definition des Schwerpunktes folgt

$$\int_m \vec{s} dm = \vec{0},$$

und damit wird

$$\int_m \vec{s} \times \vec{v} dm = \int_m \vec{s} \times (\vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{s}) dm = \underbrace{\left(\int_m \vec{s} dm \right)}_{=\vec{0}} \times \vec{v}_S + \int_m \vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) dm = \int_m \vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) dm,$$

also

$$\vec{L}_S = \int_m \vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) dm.$$

Das doppelte Kreuzprodukt im Integranden lässt sich als Produkt eines Tensors $\vartheta(\vec{s})$ mit dem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ darstellen:

$$\vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) = (\vec{s} \cdot \vec{s}) \vec{\omega} - \vec{s} (\vec{s} \cdot \vec{\omega}) = \{ (\vec{s} \cdot \vec{s}) \mathbf{1} - \vec{s} \otimes \vec{s} \} \vec{\omega},$$

$$\vartheta(\vec{s}) := \{ (\vec{s} \cdot \vec{s}) \mathbf{1} - \vec{s} \otimes \vec{s} \},$$

$$\vartheta(\vec{s}) := \left\{ \begin{bmatrix} \vec{s} \cdot \vec{s} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{s} \cdot \vec{s} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{s} \cdot \vec{s} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_1 s_1 & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_2 s_1 & s_2 s_2 & s_2 s_3 \\ s_3 s_1 & s_3 s_2 & s_3 s_3 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} s_2^2 + s_3^2 & -s_1 s_2 & -s_1 s_3 \\ -s_2 s_1 & s_3^2 + s_1^2 & -s_2 s_3 \\ -s_3 s_1 & -s_3 s_2 & s_1^2 + s_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\vec{s} \times (\vec{\omega} \times \vec{s}) = \vartheta(\vec{s}) \vec{\omega}.$$

Damit wird

$$\vec{L}_S = \int_m \vartheta(\vec{s}) dm \vec{\omega} =: \Theta_S \vec{\omega},$$

wobei

$$\Theta_S := \int_m \vartheta(\vec{s}) dm = \begin{bmatrix} \int_m (s_2^2 + s_3^2) dm & -\int_m s_1 s_2 dm & -\int_m s_1 s_3 dm \\ -\int_m s_1 s_2 dm & \int_m (s_3^2 + s_1^2) dm & -\int_m s_2 s_3 dm \\ -\int_m s_1 s_3 dm & -\int_m s_2 s_3 dm & \int_m (s_1^2 + s_2^2) dm \end{bmatrix}.$$

der symmetrische, auf den Schwerpunkt S bezogene **Trägheitstensor** des starren Körpers ist. Der Trägheitstensor

$$\Theta_S = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Theta_{Sij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

bildet den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ auf den Drehimpulsvektor \vec{L}_S ab.

Die Tensorkomponenten

$$\Theta_{S11} := \int_m (s_2^2 + s_3^2) dm, \quad \Theta_{S22} := \int_m (s_3^2 + s_1^2) dm, \quad \Theta_{S33} := \int_m (s_1^2 + s_2^2) dm$$

sind die **Trägheitsmomente** des starren Körpers um die drei \vec{e}_i -Achsen durch S und die Komponenten

$$\Theta_{S12} := -\int_m s_1 s_2 dm, \quad \Theta_{S13} := -\int_m s_1 s_3 dm, \quad \Theta_{S23} := -\int_m s_2 s_3 dm$$

die **Deviationsmomente** des starren Körpers bezogen auf die \vec{e}_i -Basis in S.

Als symmetrischer Tensor kann Θ_S in eine Hauptachsendarstellung überführt werden, in der die Deviationsmomente null sind.

Dreht sich der starre Körper um eine raum- und körperfeste Achse in Richtung \vec{e}_{DA} durch S, so ist $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_{DA}$ und die Orthogonalprojektion des Drehimpulsvektors \vec{L}_S auf die Drehachse lautet

$$L_{S(DA)} = \vec{e}_{DA} \cdot \vec{L}_S = \vec{e}_{DA} \cdot (\Theta_S \vec{\omega}) = \vec{e}_{DA} \cdot (\Theta_S \vec{e}_{DA}) \omega =: \Theta_{S(DA)} \omega$$

wobei

$$\Theta_{S(DA)} := \vec{e}_{DA} \cdot (\Theta_S \vec{e}_{DA})$$

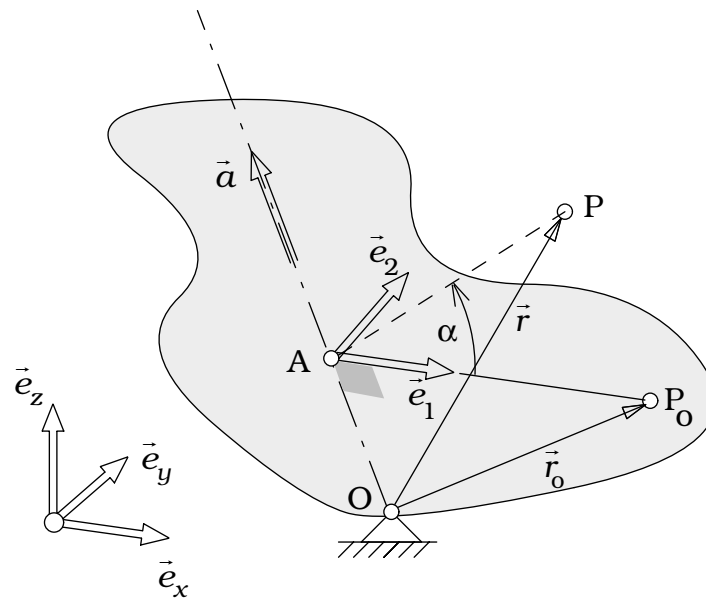
das Trägheitsmoment des starren Körpers bezogen auf die ständige Drehachse durch S ist.



▼ Beispiel 11.2

Ein starrer Körper sei im Punkt O drehbar gelagert. Bei einer Drehung um den Winkel α um eine Achse in Richtung \vec{a} bewegen sich die materiellen Punkte auf Kreisbögen um die Drehachse. Berechnet werden soll der Drehtensor $\mathbf{T}(\vec{a}, \alpha)$, der den Ortsvektor \vec{r}_0 eines materiellen Punktes in P_0 in den Ortsvektor \vec{r} des gleichen materiellen Punktes in P abbildet:

$$\vec{r} = \mathbf{T}(\vec{a}, \alpha) \vec{r}_0.$$



Den Vektor \vec{OA} erhalten wir aus der Orthogonalprojektion des Ortsvektors \vec{r}_0 auf die Drehachse:

$$\vec{OA} = (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a}.$$

Damit können wir den Vektor

$$\vec{AP}_0 = \vec{r}_0 - \vec{OA} = \vec{r}_0 - (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a} =: \rho \vec{e}_1, \quad \rho = \left| \vec{AP}_0 \right|,$$

berechnen und den Einheitsvektor

$$\vec{e}_2 = \vec{a} \times \vec{e}_1.$$

Die Kreisbogenbewegung des Punktes P_0 in den Punkt P findet in der von den Einheitsvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 im Punkt A aufgespannten Ebene statt. Es ist deshalb

$$\vec{AP} = \rho \cos \alpha \vec{e}_1 + \rho \sin \alpha \vec{e}_2 = \cos \alpha \vec{AP}_0 + \sin \alpha \vec{a} \times \vec{AP}_0.$$

Der Ortsvektor des Punktes P lautet nun

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{OA} + \vec{AP} = (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a} + \cos \alpha \{ \vec{r}_0 - (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a} \} + \sin \alpha \vec{a} \times \{ \vec{r}_0 - (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a} \}, \\ \vec{r} &= \cos \alpha \vec{r}_0 + (1 - \cos \alpha) (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a} + \sin \alpha \vec{a} \times \vec{r}_0. \end{aligned}$$

Wird der vorgegebene Richtungsvektor der Drehachse in der raumfesten Basis $\{ \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \}$ dargestellt

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z,$$

so lässt sich das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{r}_0$ mit Hilfe des schiefsymmetrischen Tensors

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

schreiben:

$$\vec{a} \times \vec{r}_0 = \mathbf{A} \vec{r}_0.$$

Mit dem dyadischen Produkt

$$\vec{a} \otimes \vec{a} := \begin{bmatrix} a_x a_x & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y a_y & a_y a_z \\ a_z a_x & a_z a_y & a_z a_z \end{bmatrix}$$

gilt

$$\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) = (\vec{a} \otimes \vec{a}) \vec{r}_0.$$

Wenn wir nun noch den Einheitsensor

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eingeführen, können wir

$$\vec{r} = \cos \alpha \vec{r}_0 + (1 - \cos \alpha) (\vec{a} \cdot \vec{r}_0) \vec{a} + \sin \alpha \vec{a} \times \vec{r}_0$$

schreiben:

$$\vec{r} = \cos \alpha \mathbf{1} \vec{r}_0 + (1 - \cos \alpha) (\vec{a} \otimes \vec{a}) \vec{r}_0 + \sin \alpha \mathbf{A} \vec{r}_0,$$

$$\vec{r} = \{ \cos \alpha \mathbf{1} + (1 - \cos \alpha) (\vec{a} \otimes \vec{a}) + \sin \alpha \mathbf{A} \} \vec{r}_0,$$

$$\vec{r} = \mathbf{T}(\vec{a}, \alpha) \vec{r}_0,$$

$$\mathbf{T}(\vec{a}, \alpha) := \cos \alpha \mathbf{1} + (1 - \cos \alpha) (\vec{a} \otimes \vec{a}) + \sin \alpha \mathbf{A}.$$

In der raumfesten Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ erhalten wir die Darstellung

$$\mathbf{T}(\vec{a}, \alpha) = \cos \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos \alpha) \begin{bmatrix} a_x a_x & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & a_y a_y & a_y a_z \\ a_z a_x & a_z a_y & a_z a_z \end{bmatrix} + \sin \alpha \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Weil

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(a_y^2 + a_z^2) & a_x a_y & a_x a_z \\ a_y a_x & -(a_z^2 + a_x^2) & a_y a_z \\ a_z a_x & a_z a_y & -(a_x^2 + a_y^2) \end{bmatrix}$$

und

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$$

ist, wird

$$\vec{a} \otimes \vec{a} = \mathbf{A}^2 + \mathbf{1}$$

und deshalb

$$\mathbf{T}(\vec{a}, \alpha) = \mathbf{1} + (1 - \cos \alpha) \mathbf{A}^2 + \sin \alpha \mathbf{A}.$$

Der zum Drehtensor $\mathbf{T}(\vec{a}, \alpha)$ inverse Tensor muss eine Drehung mit dem Winkel $-\alpha$ um die Achse in Richtung \vec{a} beschreiben:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{1} + (1 - \cos \alpha) \mathbf{A}^2 - \sin \alpha \mathbf{A} = \mathbf{T}^T.$$

Weil $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ ist, ist $\mathbf{T}(\vec{a}, \alpha)$ ein orthogonaler Tensor. ▲

▼ Beispiel 11.3

Zum Tensor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \tau & 2 & 3 \\ 2 & 0 - \tau & 4 \\ 3 & 4 & 5 - \tau \end{bmatrix} = -\tau^3 + 6\tau^2 + 24\tau + 12 = 0.$$

Die drei Eigenwerte sind die Nullstellen dieses charakteristischen Polynoms:

$$\tau_I = -0.598474, \quad \tau_{II} = -2.262772, \quad \tau_{III} = 8.861247.$$

Es ist

$$\tau_I + \tau_{II} + \tau_{III} = 6.00000 = \text{Spur}(\mathbf{T}).$$

Die Eigenvektoren werden aus dem homogenen Gleichungssystem

$$(\mathbf{T} - \tau_H \mathbf{1}) \vec{a}_H = \vec{0}, \quad \begin{bmatrix} 1 - \tau_H & 2 & 3 \\ 2 & 0 - \tau_H & 4 \\ 3 & 4 & 5 - \tau_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{H1} \\ a_{H2} \\ a_{H3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

berechnet, dessen Determinante definitionsgemäß null ist. Wegen der deshalb bestehenden linearen Abhängigkeit der Gleichungen dürfen wir beispielsweise $a_{H1} = 1$ setzen und können für die restlichen Komponenten zwei beliebige Gleichungen des homogenen Systems verwenden. Wir wählen die zweite und dritte Gleichung und erhalten das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\tau_H a_{H2} + 4a_{H3} &= -2, \\ 4a_{H2} + (5 - \tau_H)a_{H3} &= -3, \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$a_{H2} = \frac{2 + 2\tau_H}{\tau_H^2 - 5\tau_H - 16}, \quad a_{H3} = \frac{8 + 3\tau_H}{\tau_H^2 - 5\tau_H - 16}.$$

Die noch nicht normierten Eigenvektoren lauten nun

$$\vec{a}_I = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.0634851 \\ -0.4905015 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_{II} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5.8192644 \\ 2.7919171 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_{III} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.0827336 \\ 1.8985924 \end{bmatrix}.$$

Zu Einheitsvektoren normiert und einer rechtshändigen Basis angeordnet wird

$$\vec{a}_I = \begin{bmatrix} 0.896357 \\ -0.056905 \\ -0.439665 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_{II} = \begin{bmatrix} -0.153107 \\ 0.890973 \\ -0.427463 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_{III} = \begin{bmatrix} 0.416054 \\ 0.450476 \\ 0.7899177 \end{bmatrix}.$$

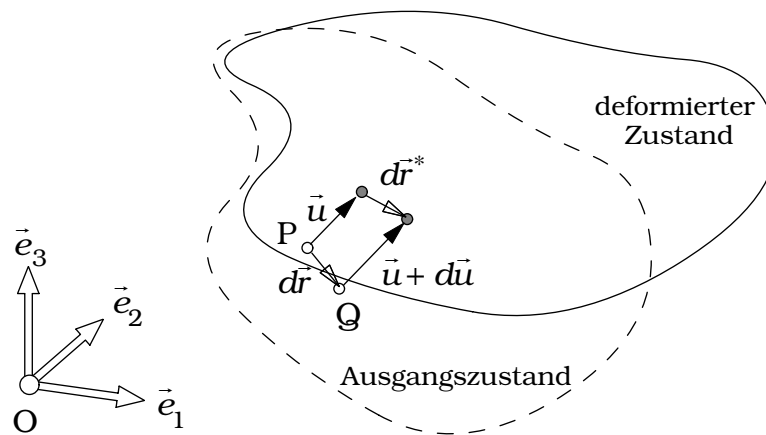
Im diesem Hauptachsensystem lautet die Darstellung des Tensors

$$\mathbf{T} = -0.598474 \vec{a}_I \otimes \vec{a}_I - 2.262772 \vec{a}_{II} \otimes \vec{a}_{II} + 8.861247 \vec{a}_{III} \otimes \vec{a}_{III}.$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -0.598474 & 0 & 0 \\ 0 & -2.262772 & 0 \\ 0 & 0 & 8.861247 \end{bmatrix}_{(HAS)}.$$



▼ Beispiel 11.4



Das ortsabhängige Verschiebungsvektorfeld eines deformierbaren Körpers

$$\vec{u} = u_1(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_2 + u_3(x_1, x_2, x_3)\vec{e}_3$$

unterscheidet sich in den infinitesimal benachbarten Körperpunkten

$$P:(x_1, x_2, x_3) \text{ und } Q:(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$$

um den Vektor

$$d\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} dx_3.$$

Mit dem Vektor

$$d\vec{r} = dx_1\vec{e}_1 + dx_2\vec{e}_2 + dx_3\vec{e}_3 = \vec{PQ}$$

und dem **Gradiententensor des Verschiebungsvektorfeldes**

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \otimes \vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} \otimes \vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \otimes \vec{e}_3,$$

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

können wir schreiben

$$d\vec{u} = \mathbf{G} d\vec{r}.$$

Die Körperpunkte P und Q haben im deformierten Zustand die Ortsvektoren

$$(\vec{OP})_{Def} = \vec{OP} + \vec{u}, \quad (\vec{OQ})_{Def} = (\vec{OP} + d\vec{r}) + (\vec{u} + d\vec{u}),$$

und den Verbindungsvektor

$$d\vec{r}^* := (\vec{OQ})_{Def} - (\vec{OP})_{Def} = d\vec{r} + d\vec{u} = (\mathbf{1} + \mathbf{G})d\vec{r}.$$

Der Abstand der Punkte P und Q ändert sich von $ds = \sqrt{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}$ vor der Verschiebung in $ds^* = \sqrt{d\vec{r}^* \cdot d\vec{r}^*}$ nach der Verschiebung.

Weil

$$d\vec{r}^* \cdot d\vec{r}^* = d\vec{r} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{G}^T)(\mathbf{1} + \mathbf{G})d\vec{r} = d\vec{r} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{G} + \mathbf{G}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T)d\vec{r}$$

ist, wird mit dem Einheitsvektor \vec{e} in Richtung von $d\vec{r}$

$$d\vec{r} = \vec{e} ds$$

und

$$d\vec{r}^* \cdot d\vec{r}^* = \vec{e} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{G} + \mathbf{G}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T)\vec{e} (ds)^2$$

$$(ds^*)^2 = \{1 + \vec{e} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\vec{e} + \vec{e} \cdot (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)\vec{e}\} (ds)^2$$

$$ds^* = \sqrt{1 + \vec{e} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\vec{e} + \vec{e} \cdot (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)\vec{e}} ds.$$

Man spricht von einem **infinitesimalen Deformationszustand** des Körpers, wenn für *alle* neun Ableitungen der Verschiebungsvektorkomponenten

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1, \quad i, j = 1, 2, 3$$

gilt. Mit der Näherungsformel

$$\sqrt{1 + \lambda} \approx 1 + \frac{\lambda}{2} \quad \text{wenn } |\lambda| \ll 1 \text{ ist,}$$

können wir dann schreiben

$$ds^* = \sqrt{1 + \vec{e} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\vec{e} + \vec{e} \cdot (\mathbf{G}\mathbf{G}^T)\vec{e}} ds \approx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \vec{e} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\vec{e} \right\} ds.$$

Als **Dehnung** des materiellen Linienelementes $\vec{PQ} = \vec{e} ds$ definiert man

$$\varepsilon_{(\vec{e})} := \frac{ds^* - ds}{ds} = \frac{ds^*}{ds} - 1,$$

$$\varepsilon_{(\vec{e})} := \frac{1}{2} \vec{e} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) \vec{e}.$$

Wir definieren den symmetrischen **Deformationstensor**

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2} (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

und erhalten für die Dehnung eines Linienelementes im materiellen Punkt P in Richtung \vec{e} die Formel

$$\varepsilon_{(\vec{e})} := \vec{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{e}.$$

Die Tensorkomponenten

$$\varepsilon_{11} = \vec{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{e}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \vec{e}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{e}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = \vec{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{e}_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

sind demnach die Dehnungen von Linienelementen in P in die Richtungen der Basisvektoren \vec{e}_i .

Aus den in P beginnenden speziellen Linienelementen $\vec{e}_1 ds$ und $\vec{e}_2 ds$ im Ausgangszustand werden im deformierten Zustand die Linienelemente

$$\vec{e}_1^* ds_1^* = (\mathbf{1} + \mathbf{G}) \vec{e}_1 ds, \quad \vec{e}_2^* ds_2^* = (\mathbf{1} + \mathbf{G}) \vec{e}_2 ds$$

wobei

$$ds_1^* = (1 + \varepsilon_{11}) ds, \quad ds_2^* = (1 + \varepsilon_{22}) ds$$

ist. Im Ausgangszustand waren die beiden Linienelemente zueinander orthogonal und im deformierten Zustand bilden sie den Winkel

$$\alpha_{12} = \frac{\pi}{2} - \gamma_{12},$$

und es gilt

$$\cos(\alpha_{12}) = \sin(\gamma_{12}) = \bar{e}_1^* \cdot \bar{e}_2^* = \frac{\bar{e}_1 \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{G}^T)(\mathbf{1} + \mathbf{G})\bar{e}_2}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})},$$

$$\sin(\gamma_{12}) = \frac{\bar{e}_1 \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T + \mathbf{G}^T \mathbf{G})\bar{e}_2}{(1 + \varepsilon_{11})(1 + \varepsilon_{22})}.$$

Im Rahmen der oben schon getroffenen Annahme infinitesimaler Verschiebungsgradienten wird aus dieser Formel

$$\sin(\gamma_{12}) \approx \gamma_{12} \approx \bar{e}_1 \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T)\bar{e}_2 = 2 \bar{e}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \bar{e}_2 = 2 \varepsilon_{12}.$$

Die Deformationstensorkomponenten mit ungleichen Indizes beschreiben also die halben Änderungen der ursprünglichen rechten Winkel zwischen materiellen Linienelementen in den Koordinatenrichtungen im Punkt P. ▲

▼ Beispiel 11.5

Die im Inneren eines deformierbaren Körpers in einer gedachten Schnittfläche übertragenen Wechselwirkungskräfte sind stetig über die Fläche verteilt und werden mit einer vektoriellen Flächenkraftdichte beschrieben, die man **Spannung** nennt und in der Maßeinheit: 1 Pascal := 1 *Newton* / m² misst. Auf ein Flächenelement dA mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor \bar{n} wirkt dann die Kraft

$$d\vec{F} = \vec{\sigma}_n dA.$$

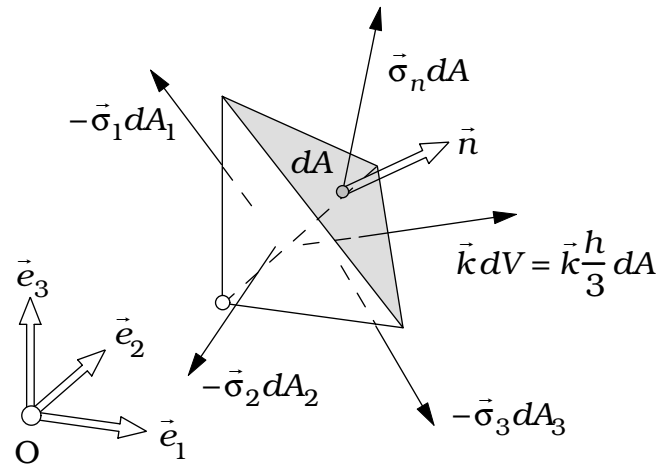
In einem kartesischen Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 mit den Basisvektoren \bar{e}_1, \bar{e}_2 und \bar{e}_3 bezeichnen wir die Spannungsvektoren in Schnittflächen senkrecht zu den Koordinatenrichtungen mit

$$\vec{\sigma}_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \bar{e}_j \quad \text{wenn } \bar{n} = \bar{e}_i \text{ ist; } (i=1,2,3)$$

Die jeweils drei Komponenten dieser drei Spannungsvektoren haben folgende Bedeutung: σ_{ij} ist die in einem Schnitt $x_i = \text{const}$ in x_j -Richtung wirkende Spannung; Spannungsvektorkomponenten mit gleichen Indizes sind **Normalspannungen** - (Spannungen senkrecht zur Schnittfläche, Zug- oder Druckspannungen), und Spannungsvektorkomponenten mit unterschiedlichen Indizes sind **Schubspannungen** - (Spannungen in der Schnittfläche) .

Wir denken uns aus einem belasteten Körper einen infinitesimalen Tetraeder so

herausgeschnitten, dass drei Kanten parallel zu den Koordinatenachsen orientiert sind.



Auf den Tetraeder wirken die folgenden Kräfte:

Auf der Dreiecksfläche dA mit dem Normaleneinheitsvektor \vec{n} die Kraft $\vec{\sigma}_n dA$,
auf den Dreiecksflächen mit den Normaleneinheitsvektoren $-\vec{e}_i$ (negative Schnittufer!) die Kräfte $-\vec{\sigma}_i dA_i$
und im Tetraeder die Volumenkraft $\vec{k} dV$.

Die Kräftegleichgewichtsbedingung

$$\vec{\sigma}_n dA - \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i dA_i + \vec{k} dV = \vec{0}$$

kann mit der geometrischen Beziehung (\rightarrow Beispiel 1.2)

$$dA_i = n_i dA \quad \text{wenn} \quad \vec{n} = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{e}_i \quad \text{ist,}$$

geschrieben werden

$$(\vec{\sigma}_n - \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i n_i) dA + \vec{k} dV = \vec{0}.$$

Wenn h die Höhe des Tetraeders über der Grundfläche dA ist, so wird

$$dV = \frac{h}{3} dA,$$

und

$$(\vec{\sigma}_n - \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i n_i) + \vec{k} \frac{h}{3} = \vec{0}.$$

Lassen wir nun die Höhe h des Tetraeders gegen null gehen, so erhalten die Darstellung des Spannungsvektors in einer beliebigen Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor \vec{n}

$$\vec{\sigma}_n = \sum_{i=1}^3 \vec{\sigma}_i n_i = \sum_{i=1}^3 n_i \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \vec{e}_j.$$

Wir führen nun den **Spannungstensor** σ ein:

$$\sigma := \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \otimes \vec{\sigma}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Dann können wir schreiben

$$\vec{\sigma}_n = \sigma^T \vec{n}.$$

Der transponierte Spannungstensor bildet den Schnittnormaleneinheitsvektor \vec{n} auf den Spannungsvektor $\vec{\sigma}_n$ im Schnittflächenelement ab.

Die in einem Schnittflächenelement wirkende Normalspannung erhalten wir, wenn wir den Spannungsvektor auf die Schnittnormale projizieren:

$$\sigma_{nn} = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot (\sigma^T \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 n_i \sigma_{ij} n_j = \sigma^T \vec{n} \cdot \vec{n}.$$

Den Schubspannungsvektor $\vec{\tau}$ im Schnittflächenelement berechnen wir, indem wir vom Spannungsvektor $\vec{\sigma}_n$ den Normalspannungsvektor subtrahieren:

$$\vec{\tau} = \vec{\sigma}_n - \sigma_{nn} \vec{n}.$$

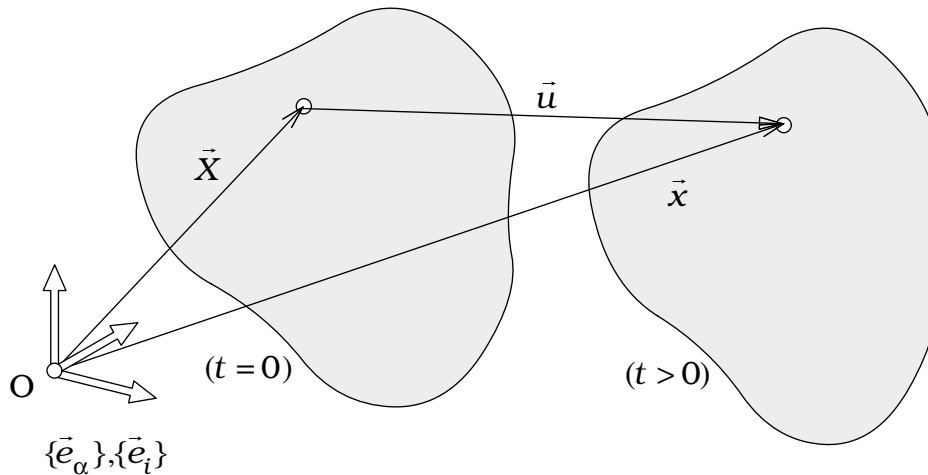


▼ Beispiel 11.6

In der **Bezugskonfiguration** eines materiellen Körpers beschreiben wir die Lage der materiellen Punkte mit Ortsvektoren \dot{X} , die in einer kartesischen Basis $\{\dot{e}_\alpha\}$ die Darstellung

$$\dot{X} = X_\alpha \dot{e}_\alpha$$

besitzen. (Wir halten uns in diesem Beispiel an die Summationsvereinbarung: Über doppelte Indizes in einem Produktterm ist von 1 bis 3 zu summieren.) Infolge der Bewegung des Körpers verändert sich die Lage der materiellen Punkte im Raum.



Der materielle Punkt mit dem Ortsvektor \bar{X} in der Bezugskonfiguration besitzt dann in der momentanen Konfiguration zum Zeitpunkt t den Ortsvektor \bar{x} , der in der kartesischen Basis $\{\bar{e}_i\}$ die Darstellung

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i$$

besitzt. Die Koordinaten x_i sind stetige Funktionen der Koordinaten X_α und der Zeit t :

$$x_i = x_i(X_\alpha; t) \quad (i, \alpha = 1, 2, 3).$$

Wir verwenden für die in der Bezugskonfiguration definierten Koordinaten griechische Indizes und für die Koordinaten in der momentanen Konfiguration lateinische Indizes.

Aus der anschaulichen Bedeutung der Funktionen $x_i(X_\alpha; t)$ folgt, dass die Umkehrfunktionen $X_\alpha(x_i; t)$ existieren.

Das momentane Geschwindigkeitsvektorfeld der materiellen Punkte

$$\dot{\bar{x}}(\bar{X}; t) = \frac{\partial x_i(X_\alpha; t)}{\partial t} \bar{e}_i$$

kann mit Hilfe der Abbildungsfunktionen $\bar{X} \rightarrow \bar{x}$ in den momentanen Koordinaten dargestellt werden:

$$\bar{v}(\bar{x}; t) = v_i(x_j(t); t) \bar{e}_i = \dot{\bar{x}}(\bar{X}; t) \Big|_{\bar{X}=\bar{X}(\bar{x}; t)}.$$

Entsprechend gilt für das Beschleunigungsvektorfeld der materiellen Punkte

$$\ddot{\bar{x}}(\bar{X}; t) = \frac{\partial^2 x_i(X_\alpha; t)}{\partial t^2} \bar{e}_i$$

$$\bar{a}(\bar{x}; t) = a_i(x_j(t); t) \bar{e}_i = \ddot{\bar{x}}(\bar{X}; t) \Big|_{\bar{X}=\bar{X}(\bar{x}; t)}.$$

Das Beschleunigungsvektorfeld $\vec{a}(\vec{x};t)$ kann aus dem Geschwindigkeitsvektorfeld $\vec{v}(\vec{x};t)$ auch direkt berechnet werden:

$$\vec{a}(\vec{x};t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{lokale B.}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} v_i}_{\text{konvektive B.}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}.$$

Dabei haben wir den Gradientenoperator

$$\text{grad} := \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

eingeführt.

Aus der Differenz der Ortsvektorfelder ergibt sich das Verschiebungsvektorfeld

$$\vec{u} = \vec{x} - \vec{X} = u_\alpha(\vec{X};t) \vec{e}_\alpha = u_i(\vec{x};t) \vec{e}_i.$$

Aus dem materiellen Linienelement $d\vec{X}$ im Punkt \vec{X} entsteht infolge der Bewegung des Körpers das Linienelement $d\vec{x}$ im Punkt \vec{x} . Es gilt

$$d\vec{x} = dx_i \vec{e}_i = \frac{\partial x_i(\vec{X};t)}{\partial X_\alpha} \vec{e}_i dX_\alpha =: x_{i,\alpha} \vec{e}_i dX_\alpha.$$

Wir definieren den **Deformationsgradiententensor**

$$\mathbf{F} := x_{i,\alpha} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_\alpha$$

und schreiben dann

$$d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}.$$

Der Deformationsgradiententensor \mathbf{F} bildet das materielle Linienelement $d\vec{X}$ in der Bezugskonfiguration auf das entsprechende Linienelement $d\vec{x}$ in der momentanen Konfiguration ab.

Es existiert immer die Umkehrabbildung

$$d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}, \quad \mathbf{F}^{-1} = X_{\alpha,i} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_i.$$

Drei materielle Linienelemente $d\vec{X}_{(1)}, d\vec{X}_{(2)}, d\vec{X}_{(3)}$ spannen in der Bezugskonfiguration das Volumenelement

$$dV_{(o)} = (d\vec{X}_{(1)} \times d\vec{X}_{(2)}) \cdot d\vec{X}_{(3)} = e_{\alpha\beta\gamma} dX_{(1)\alpha} dX_{(2)\beta} dX_{(3)\gamma}$$

auf.

In dieser Formel ist

$$e_{\alpha\beta\gamma} := \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha\beta\gamma = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{für } \alpha\beta\gamma = 213, 321, 132 \\ 0 & \text{bei anderen Indizes} \end{cases}$$

das Permutationssymbol. Aus $dV_{(0)}$ entsteht in der momentanen Konfiguration das Volumenelement

$$dV_{(t)} = (d\vec{x}_{(1)} \times d\vec{x}_{(2)}) \cdot d\vec{x}_{(3)} = e_{ijk} dx_{(1)i} dx_{(2)j} dx_{(3)k}.$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten kann geschrieben werden

$$dV_{(t)} = e_{ijk} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} dX_{(1)\alpha} dX_{(2)\beta} dX_{(3)\gamma}.$$

Für die Determinante des Deformationsgradienten gilt

$$J := \det(\mathbf{F}) = e_{ijk} F_{i1} F_{j2} F_{k3} = e_{\alpha\beta\gamma} F_{1\alpha} F_{2\beta} F_{3\gamma},$$

$$e_{ijk} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} = J e_{\alpha\beta\gamma}, \quad e_{\alpha\beta\gamma} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} = J e_{ijk},$$

Damit wird

$$dV_{(t)} = J dV_{(0)}.$$

Die beiden materiellen Linienelemente $d\vec{X}_{(1)}, d\vec{X}_{(2)}$ spannen in der Bezugskonfiguration das Flächenelement $dA_{(0)}$ mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_{(0)}$ auf:

$$dA_{(0)} \vec{n}_{(0)} = d\vec{X}_{(1)} \times d\vec{X}_{(2)}.$$

Daraus entsteht in der momentanen Konfiguration das Flächenelement

$$dA_{(t)} \vec{n}_{(t)} = d\vec{x}_{(1)} \times d\vec{x}_{(2)}.$$

$$dA_{(t)} \vec{n}_{(t)} = e_{ijk} dx_{j(1)} dx_{k(2)} = e_{ijk} F_{j\beta} F_{k\gamma} dX_{\beta(1)} dX_{\gamma(2)}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$F_{i\alpha} dA_{(t)} \vec{n}_{(t)} = e_{ijk} F_{i\alpha} F_{j\beta} F_{k\gamma} dX_{\beta(1)} dX_{\gamma(2)} = J e_{\alpha\beta\gamma} dX_{\beta(1)} dX_{\gamma(2)} = J dA_{(0)} n_{(0)\alpha},$$

$$\mathbf{F}^T dA_{(t)} \vec{n}_{(t)} = J dA_{(0)} \vec{n}_{(0)}, \quad dA_{(t)} \vec{n}_{(t)} = J (\mathbf{F}^T)^{-1} \vec{n}_{(0)} dA_{(0)}.$$

Mit

$$\mathbf{F} = x_{i,\alpha} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_\alpha, \quad \mathbf{F}^{-1} = X_{\beta,j} \vec{e}_\beta \otimes \vec{e}_j,$$

$$\mathbf{F}^T = x_{i,\alpha} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_i, \quad (\mathbf{F}^T)^{-1} = X_{\beta,j} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\beta,$$

definieren wir

$$(\mathbf{F}^T)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^T =: \mathbf{F}^{-T}.$$

Weil $\vec{n}_{(t)}$ und $\vec{n}_{(0)}$ Einheitsvektoren sind, erhalten wir

$$(dA_{(t)})^2 = J^2 (\mathbf{F}^{-T} \vec{n}_{(0)}) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \vec{n}_{(0)}) (dA_{(0)})^2,$$

$$dA_{(t)} = J \sqrt{\vec{n}_{(0)} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \vec{n}_{(0)}} dA_{(0)},$$

wobei

$$\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} = (X_{\alpha,i} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_i)(X_{\beta,j} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\beta) = X_{\alpha,i} X_{\beta,j} \delta_{ij} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta = X_{\alpha,i} X_{\beta,i} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta,$$

$$\vec{n}_{(0)} \cdot (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) \vec{n}_{(0)} = X_{\alpha,i} X_{\beta,i} n_{(0)\alpha} n_{(0)\beta}$$

ist.

Die einander zugeordneten materiellen Linienelemente $d\vec{X}$ und $d\vec{x} = \mathbf{F}d\vec{X}$ haben die Längen $ds_{(0)}$ und $ds_{(t)}$. Es gilt

$$(ds_{(0)})^2 = dX_\alpha dX_\alpha = \delta_{\alpha\beta} dX_\alpha dX_\beta, \quad (ds_{(t)})^2 = dx_i dx_i = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} dX_\alpha dX_\beta$$

Mit dem (rechten) **CAUCHY-GREEN-Tensor**

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F},$$

$$C_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta := (x_{i,\alpha} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_i)(x_{j,\beta} \vec{e}_j \otimes \vec{e}_\beta) = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta,$$

können wir dann schreiben

$$(ds_{(t)})^2 = d\vec{X} \cdot (\mathbf{C} d\vec{X}).$$

Die Differenz der Abstandsquadrate infinitesimal benachbarter materieller Punkte in der momentanen Konfiguration und der Bezugskonfiguration

$$(ds_{(t)})^2 - (ds_{(0)})^2 = d\vec{X} \cdot (\mathbf{C} d\vec{X}) - d\vec{X} \cdot d\vec{X},$$

kann mit dem **GREEN-LAGRANGEschen Deformationstensor**

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}),$$

$$G_{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta = \frac{1}{2} (x_{i,\alpha} x_{i,\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta,$$

geschrieben werden

$$(ds_{(t)})^2 - (ds_{(0)})^2 = 2d\vec{X} \cdot (\mathbf{G} d\vec{X}).$$

Wir führen nun das Verschiebungsvektorfeld $\vec{u}(\vec{X};t)$ ein:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X};t) = (\delta_{i\beta} X_\beta + u_i) \vec{e}_i = (X_\alpha + u_\alpha) \vec{e}_\alpha,$$

$$F_{i\alpha} = x_{i,\alpha} = \delta_{i\alpha} + u_{i,\alpha},$$

$$C_{\alpha\beta} = (\delta_{i\alpha} + u_{i,\alpha})(\delta_{i\beta} + u_{i,\beta}) = \delta_{\alpha\beta} + u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{i,\alpha}u_{i,\beta},$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{i,\alpha}u_{i,\beta}).$$

Mit

$$d\vec{X} = \mathbf{F}^{-1} d\vec{x},$$

$$(ds_{(0)})^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\vec{x}$$

erhalten wir für die Differenz der Abstandsquadrate materieller Punkte die alternative Darstellung

$$(ds_{(t)})^2 - (ds_{(0)})^2 = d\vec{x} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) d\vec{x}.$$

Wir definieren den **ALMANSI'schen Deformationstensor**

$$\mathbf{A} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}),$$

$$A_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - X_{\alpha,i} X_{\alpha,j}) \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j,$$

und können dann schreiben

$$(ds_{(t)})^2 - (ds_{(0)})^2 = 2d\vec{x} \cdot \mathbf{A} d\vec{x}.$$

Weil

$$\vec{X} = \vec{x} - \vec{u}$$

ist, wird

$$X_{\alpha,i} = \delta_{\alpha i} - u_{\alpha,i},$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}).$$

Aus der Gleichung

$$2d\vec{x} \cdot \mathbf{A} d\vec{x} = 2d\vec{X} \cdot \mathbf{G} d\vec{X}$$

folgt wegen $d\vec{x} = \mathbf{F} d\vec{X}$ die Beziehung zwischen den Deformationstensoren \mathbf{G} und \mathbf{A} :

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F}.$$

Mit Hilfe des CAUCHY-GREEN-Tensors \mathbf{C} kann man anschauliche Deformationsmaße berechnen.

Als **Streckung** λ eines materiellen Linienelementes bezeichnet man das Verhältnis seiner Längen in der momentanen Konfiguration und der Bezugskonfiguration:

$$\lambda := \frac{ds_{(t)}}{ds_{(0)}}.$$

Wir führen die Einheitsvektoren $\vec{e}_{(0)}$ und $\vec{e}_{(t)}$ in die Richtungen entsprechender Linienelemente ein,

$$d\vec{X} = ds_{(0)}\vec{e}_{(0)}, \quad d\vec{x} = ds_{(t)}\vec{e}_{(t)},$$

und erhalten

$$(ds_{(t)})^2 = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} d\vec{X} = (ds_{(0)})^2 \vec{e}_{(0)} \cdot \mathbf{C} \vec{e}_{(0)}$$

$$\lambda = \sqrt{\vec{e}_{(0)} \cdot \mathbf{C} \vec{e}_{(0)}}.$$

Aus den beiden gleich langen materiellen Linienelementen

$$d\vec{X}_{(a)} = ds_{(0)}\vec{e}_{(0)(a)}, \quad d\vec{X}_{(b)} = ds_{(0)}\vec{e}_{(0)(b)},$$

entstehen die Linienelemente

$$d\vec{x}_{(a)} = ds_{(t)(a)}\vec{e}_{(t)(a)} = \mathbf{F}d\vec{X}_{(a)}, \quad d\vec{x}_{(b)} = ds_{(t)(b)}\vec{e}_{(t)(b)} = \mathbf{F}d\vec{X}_{(b)}.$$

Für den Winkel $\theta_{(a)(b)}$ zwischen den beiden Linienelementen in der momentanen Konfiguration gilt dann

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{(a)(b)}) &= \vec{e}_{(t)(a)} \cdot \vec{e}_{(t)(b)} = \frac{\mathbf{F}ds_{(0)}\vec{e}_{(0)(a)}}{ds_{(t)(a)}} \cdot \frac{\mathbf{F}ds_{(0)}\vec{e}_{(0)(b)}}{ds_{(t)(b)}}, \\ \cos(\theta_{(a)(b)}) &= \frac{\vec{e}_{(0)(a)} \cdot \mathbf{C} \vec{e}_{(0)(b)}}{\lambda_{(a)}\lambda_{(b)}}. \end{aligned}$$



▼ Beispiel 11.7

Ist $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ ein symmetrischer Tensor, so lautet seine Hauptachsendarstellung

$$\mathbf{C} = C_I \vec{e}_I \otimes \vec{e}_I + C_{II} \vec{e}_{II} \otimes \vec{e}_{II} + C_{III} \vec{e}_{III} \otimes \vec{e}_{III},$$

wobei C_I , C_{II} und C_{III} die Eigenwerte des Tensors sind und \vec{e}_I , \vec{e}_{II} , \vec{e}_{III} die entsprechenden zueinander orthogonalen Einheitsvektoren in Hauptachsenrichtung. Wenn *alle drei Eigenwerte positiv* sind, können wir den Tensor $\sqrt{\mathbf{C}}$ definieren:

$$\sqrt{\mathbf{C}} := \sqrt{C_I} \vec{e}_I \otimes \vec{e}_I + \sqrt{C_{II}} \vec{e}_{II} \otimes \vec{e}_{II} + \sqrt{C_{III}} \vec{e}_{III} \otimes \vec{e}_{III}.$$

Wird mit einem beliebigen Tensor \mathbf{F} zunächst der symmetrische Tensor

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$$

gebildet und dann der symmetrische Tensor

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}}, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}.$$

eingeführt, so folgt daraus

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{C_I}} \vec{e}_I \otimes \vec{e}_I + \frac{1}{\sqrt{C_{II}}} \vec{e}_{II} \otimes \vec{e}_{II} + \frac{1}{\sqrt{C_{III}}} \vec{e}_{III} \otimes \vec{e}_{III}.$$

Nun definieren wir den Tensor

$$\mathbf{R} := \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{R}^T := \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T.$$

Dann wird

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} := (\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^T \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{1},$$

also ist \mathbf{R} ein orthogonaler Tensor, und wir erhalten die **Polarzerlegung** des Tensors \mathbf{F}

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

in das Produkt eines orthogonalen Tensors \mathbf{R} mit einem symmetrischen Tensors \mathbf{U} .

Diese Zerlegung spielt in der Analyse des Deformationszustandes eines festen Körpers eine zentrale Rolle: Der Tensor \mathbf{R} beschreibt dann eine lokale starre Drehung, der Tensor \mathbf{U} die lokalen Längenänderungen materieller Linienelemente. ▲