SCHÄFER, Ingolf
Bremen

Elementarisierung reflektieren — Studierende präsentieren Schüler*innen fachmathematische Inhalte auf Basis ihrer Funktionentheorie-Vorlesung

Wenn über Elementarisierung nachgedacht wird, dann häufig in der Richtung, dass Lehrkräfte fachliche Inhalte für Schüler*innen aufbereiten. Wir wollen hier aus theoretischer Perspektive der ATD-Theorie überlegen, warum man diesen Elementarisierungsprozess nutzen kann, um das Verständnis für fachliche Inhalte zu vertiefen bzw. sogar erst aufzubauen. Im weiteren Verlauf werden wir dann an einem Beispiel vorstellen, wie die Elementarisierung von Inhalten in der Funktionentheorie Studierenden geholfen hat, Konzepte aus der Vorlesung „Funktionentheorie“ besser zu verstehen.

Elementarisierung

Der Begriff „Elementarisierung“ bezeichnet in der Mathematikdidaktik mindestens schon seit Felix Klein etwas wie die Zerlegung einer komplexen mathematischen Idee in einfachere Teile, die elementar verständlich sind, dabei aber den Kern der Sache treffen (Huget, 2024). Ausgehend von Kirschs Aspekten der Elementarisierung beschreibt Huget (2024), wie man die Elementarisierung als schrittweise Didaktisierung verstehen kann. Eine anschließende didaktische Rekonstruktion erlaubt die Strukturierung der Wissenselemente und unter anderem eine Herleitung der benötigten fachwissenschaftlichen Kenntnisse für die Elementarisierung.

Obwohl eigentlich aus der Sicht der Physikdidaktik geschrieben, sind viele der in Kircher & Girwidz (2020) beschriebenen Strategien und heuristischen Verfahren zur Elementarisierung und didaktischen Rekonstruktion auch auf die Mathematikdidaktik übertragbar, obwohl natürlich der Bereich des Beweisens fehlt.

Chevallards anthropologische Theorie der Didaktik (ATD)

Wir wollen hier zunächst das Elementarisieren innerhalb eines theoretischen Rahmens genauer fassen. Die sogenannte anthropologische Theorie der Didaktik (kurz: ATD) von Chevallard (Bosch & Gascón, 2014; Chevallard et al., 2022) fasst den Mathematikunterricht als Problem der didaktischen Transpositionen auf. Dabei wird menschliches Handeln generell, also auch beim Lernen, als aufgebaut aus Praxeologien gedacht, d.h. Handlungen bestehen aus einer Praxis- und einer Logos-Komponente. Die Praxis-Komponente verbindet dabei bestimmte Aufgaben („tasks“) und Routinen

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

(„techniques“), die Logos-Komponente besteht aus Theorien („theory“) und Technologien („technological discourse“). Die Praxeologien unterscheiden sich dabei auch in der Breite ihrer Anwendbarkeit zum Beispiel zwischen punktuell, lokal oder institutionell. Artigue (2017) macht durch Beispiele aus drei Doktorarbeiten deutlich wie sich die Unterschiede im Übergang von Schul zu Hochschulmathematik, in verschiedenen Techniken, Technologien oder Anwendbarkeitsbreiten zeigen.

Für uns bedeutet Elementarisierung hier daher die Transposition von Praxeologien aus der Hochschulmathematik in die Schulmathematik, wobei die Logos-Komponente häufig durch eine implizitere, schuladäquatere ersetzt wird, während gewisse Aufgaben und Routinen aus dem Praxis-Block übernommen werden können. Eine Elementarisierung kann auch die Anwendungsbreite der Praxeologien einschränken oder ändern. Offensichtlich können dabei manche Praxeologien wegen fehlender Theorie und/oder fehlendem technologischem Diskurs auch gar nicht elementarisiert werden. Beispielsweise sind viele Beweise in der Schulanalysis ohne Stetigkeit und strengen Grenzwertbegriff nicht durchführbar. Die stattdessen gängige Praxeologie der anschaulichen Begründung hat im eigentlichen Sinn nicht nur andere Theorien und Diskurse, sondern auch andere Fragestellungen und Routinen.

Der Vorgang des Elementarisierens setzt also voraus, dass man sich insbesondere bewusst wird, welche Praxeologien nicht elementarisiert werden können und falls doch, welche Änderungen in der Logos- und Praxis-Komponente gemacht werden müssen. Diese Bewusstmachung kann aber helfen, bisher eher oberflächlich und punktuell verstandene Praxeologien in der Funktionentheorie erst theoretisch zu erfassen.

Elementarisierung im Rahmen der Funktionentheorie

An der Universität Bremen wird die Vorlesung Funktionentheorie für Lehramt und Vollfach in einem sogenannten Y-Modell durchgeführt (Hanke & Schäfer, 2018). Dabei bleiben die beiden Studierendengruppen zwei Drittel des Semesters in einem gemeinsamen Kurs, während im letzten Drittel professionsspezifisch getrennt wird. Während die Vollfachstudierenden weiter eine klassische Vorlesung durchlaufen, erstellen Lehramtsstudierende Lernumgebungen mit dynamischer Geometriesoftware, bei denen sie fachliche Themen aus der Vorlesung für Leistungskurse Mathematik aufbereiten und Schüler*innen aus den Leistungskursen in Kleingruppen mit diesen Lernumgebungen an einem Vormittag in der Universität unterrichten.

Ziel des Y-Modells ist es, dass die Studierenden durch die Arbeit an den Lernumgebungen und die Reflexion über Erstellung und Umsetzung von diesen die Vernetzung von fachlichem und fachdidaktischen Denken erleben (Schäfer & Hanke, 2023). Die Lernumgebungen behandeln dabei Themen wie konforme Abbildungen, Linearisierung, Wurzeln, sphärische Geometrie, hyperbolische Geometrie oder Konvexität.

Ein Beispiel: Konformität

Das Thema Konformität bzw. konforme Abbildungen (d.h. winkel- und orientierungstreu) kommt innerhalb der Vorlesung nur eine Bemerkung über die Eigenschaften holomorpher Funktionen vor. Vom Standpunkt der in der Vorlesung vermittelten Praxeologien beziehen sich die Aufgaben der Praxis-Komponenten mehr auf das Ableiten und den Wirtinger-Kalkül, während sich die Theorie-Blöcke eher auf die Aspekte als analytische Funktionen und den Cauchy-Integral-Satz konzentrieren.

Beim Elementarisieren herrscht innerhalb der jeweiligen Projektgruppen dann nicht selten zunächst Erstaunen darüber, dass sich Holomorphie geometrisch so auswirkt und man die Eigenschaft lokal sogar recht einfach sehen kann, wenn man z.B. die Bilder von rechteckigen Gittern unter holomorphen Funktionen betrachtet:

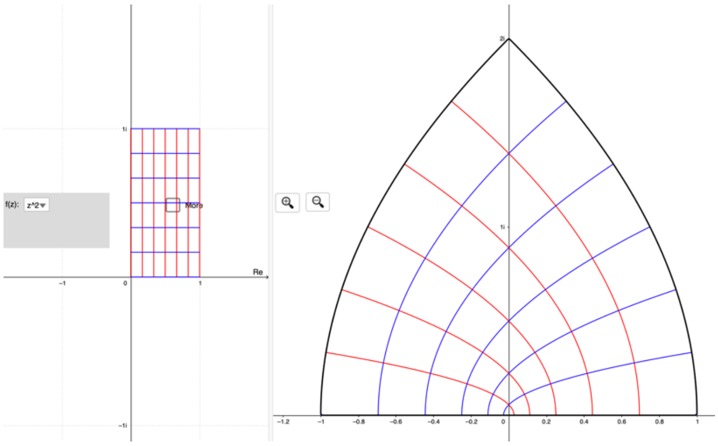

Abb. 1: Ursprüngliches Gitter und Bild des Gitters unter f(z)=z

Die eher geometrisch motivierten Praxeologien aus der Elementarisierung führen dann erst zu einem Verständnis der komplexen Ableitung als lokale Drehstreckung.

Reflexion über die Elementarisierung

Nach dem Unterrichten der Lernumgebungen schreiben die Studierenden individuelle Reflexionen über ihren Prozess. Stellvertretend für diverse ähnliche Rückmeldungen hier eine Auszug der Reflexion einer Studentin:

> „Durch die Veranstaltung habe ich ein vertieftes Verständnis über die Vorlesungsinhalte entwickeln können, da ich die Lerninhalte in ihrer Anwendung erfuhr. Außerdem habe ich [..], die Beziehung zwischen dem realen und komplexen Raum nochmal besser

verstanden und ein erweitertes Verständnis der komplexen Zahlenebene aufbauen können. Besonders aufschlussreich fand ich jedoch, die Inhalte der höheren Mathematik im schulischen Kontext zu betrachten und dessen Umsetzung auszuarbeiten."

Diskussion und Ausblick

Auch wenn hier nur ein Beispiel gezeigt wurde, scheint das Phänomen der Unterstützung fachlichen Verstehens durch Elementarisierung in den Projektgruppen häufiger aufzutreten. Ich vermute hier ein erhebliches Potenzial fachliches Verstehen anzuregen und auch eine große Chance, aus den Fachvorlesungen heraus für Lehramtsstudierende Verständnis fördernde und motivierende Aufgaben zur Elementarisierung zu erzeugen. Allerdings müssen die Fachveranstaltungen dafür dann auch Raum geben, sowohl zeitlich als auch in ihren Praxeologien, die zum Teil sehr einseitig auf den technologischen Diskurs und die Theorie fokussiert sind.

Literatur

Artigue, M. (2017). Theoretical approaches of institutional transitions : The case of ATD. In, R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of mathematics in higher education as a scientific discipline*. Conference proceedings. KHDM Report 17–05 (pp. 405–412). Universitätsbibliothek Kassel.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Hrsg.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (S. 67–83). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Chevallard, Y., Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., Gascón, J., Nicolás, P., & Ruiz-Munzón, N. (Hrsg.). (2022). *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4

Hanke, E., & Schäfer, I. (2018, April). Learning complex analysis in different branches – Project Spotlight-Y for future teachers. INDRUM 2018. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849968

Huget, J. (2024). *Die Methode der didaktisch orientierten Rekonstruktion: Systematisierung und beispielhafte Anwendung auf die Gesetze der großen Zahlen*. Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-42642-2

Kircher, E., & Girwidz, R. (2020). Elementarisierung und didaktische Rekonstruktion. In E. Kircher, R. Girwidz, & H. E. Fischer (Hrsg.), *Physikdidaktik | Grundlagen* (S. 155–197). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-59490-2_5

Schäfer, I., & Hanke, E. (2023). Reflecting from the start: curriculum design to foster continuous reflective practice in mathematics pre-service teacher education. In *CERME 13 Proceedings* (S. 4189–4196).