SCHÖTTLER, Christian
Köln

## Stellenwertverständnis - typische Schwierigkeiten und Strategien von Lernenden aus der Sekundarstufe I

Der Entwicklung eines elaborierten dezimalen Stellenwertverständnisses im Bereich der natürlichen Zahlen kommt eine große Relevanz zu, zählt es doch zu den wichtigsten mathematischen Konzepten der Grundschulzeit, welche die Kinder im Mathematikunterricht verstehen müssen. Es ist eine wesentliche Voraussetzung für erfolgreiche arithmetische Lernprozesse, u. a. beim Erwerb sicherer Rechenfertigkeiten, beim Aufbau von Zahlvorstellungen und beim Verständnis von Dezimalbrüchen. Zudem stellen sichere Kenntnisse des Dezimalsystems einen zentralen Prädiktor zur Erklärung der Mathematikleistungen in der weiterführenden Schule dar (Moser Opitz, 2013). Allerdings offenbaren Studien, dass der Aufbau eines tragfähigen dezimalen Verständnisses einigen Lernenden erhebliche Schwierigkeiten bereitet; zum Teil bis weit in die Sekundarstufe (z. B. Humbach, 2008; Moser Opitz, 2013). Das Aufdecken von Schwierigkeiten wird oftmals durch den Einsatz von Routineaufgaben erschwert, wenn das fehlerfreie Ausführen von gelernten Regeln oder Verfahren, also das Abrufen von prozeduralem, syntaktischem Wissen, eventuelle inhaltliche Defizite kaschiert (Schöttler, 2019).

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik wurde das dezimale Stellenwertverständnis von Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe I, besonders in Bezug auf typische Schwierigkeiten sowie verwendete Strategien bei der Bearbeitung von Aufgaben zum Dezimalsystem, bisher wenig erforscht. Daher wurden im Rahmen der Studie Bearbeitungen von Lernenden aus den Jahrgangsstufen 5 bis 10 verschiedener Gesamtschulen analysiert. Es geht um die Rekonstruktion typischer Vorgehensweisen und Schwierigkeiten sowie welches Verständnis des Dezimalsystems dabei zugrunde liegt.

### Testkonstruktion und Durchführung der Studie

Für die Studie wurde ein Test konzipiert, der verschiedene Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses im Zahlenraum bis 10 Millionen abdeckt. Dabei wurden sowohl typische Reproduktionsaufgaben, die vorhandenes Regel- und Faktenwissen abprüfen als auch herausfordernde, unbekannte Aufgabenformate eingesetzt, bei denen Wissen angewendet und Kenntnisse auf neue Kontexte übertragen und flexibel genutzt werden müssen.

Der Test umfasst verschiedene Aufgabengruppen: Zahlen (gegeben als Zahlwort, in der Zifferndarstellung oder in der Ziffernschreibweise mit Angabe der Bündelungseinheiten (z. B. 1M 56 ZT 2 E)) in die Stellenwerttafel

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

eintragen; Vergleich von Stellenwerten; Entbündeln (z. B. von 6 Zehnern 6 Einer wegnehmen); Bündeln von Nicht-Standardzerlegungen; Zerlegen von Zahlen in ihre Stellenwerte (z. T. mit unbesetzten Stellenwerten wie 804); Zusammensetzen von Zahlen aus Stellenwerten symbolisch und ikonisch (z. T. mit unbesetzten Stellenwerten, z. B. 4000 + 300 + 20 + 2, mit variierender Reihenfolge der Stellenwerte, z. B. 6000 + 4 + 100 + 70); Zahlen unterschiedlich darstellen (z. B. 804 = 8 H und 4 E oder 7 H, 10 Z und 4 E); multiplikative Größenbeziehungen (z. B. zwischen 1000 und 100: $1000 = 10 \cdot 100$); den Zahlaufbau erläutern (z. B. Warum darf die Reihenfolge von Ziffern nicht vertauscht werden?). Um mehr über die verwendeten Strategien zu erfahren, sollen die Lernenden auch ihre Vorgehensweise erklären.

## Ausgewählte Ergebnisse

Insgesamt zeigte sich, dass bei fast allen Schülerinnen und Schülern syntaktisches Regelwissen vorhanden ist und genutzt werden kann. So stellten Aufgaben, bei denen der Name, die Position oder die Reihenfolge von Stellenwerten angegeben werden sollten oder der Umgang mit Standardzerlegungen und mit Stellenwerten, die in der üblichen Reihenfolge angegeben waren, kaum Probleme dar. Diese Fertigkeiten sind jedoch nicht unbedingt ein Indikator für ein inhaltliches Verständnis. Insbesondere bei Aufgaben, bei denen Wissen angewendet werden musste, offenbarten sich allerdings einige Schwierigkeiten. Exemplarisch werden vier Bereiche genauer betrachtet.

*Umbündeln:* Der adäquate Umgang mit Nicht-Standardzerlegungen war bei einigen Aufgaben gefordert, da dieser die Anwendung des Bündelungs- und Stellenwertprinzips erfordert und zudem Einsichten in die Übergänge und Beziehungen zwischen einzelnen Stellenwerten erfordert. Diese Art von Aufgaben bereitete vielen Lernenden große Schwierigkeiten und wurde oftmals falsch gelöst. Wenn rein auf einer symbolischen Ebene mit Nicht-Standardzerlegungen umgegangen werden sollte, wurden häufig die Stellenwerte von links nach rechts, ohne den spezifischen Bündelungswert zu berücksichtigen, aneinandergehängt (z. B. 14 H, 13 Z, 2T = 140 + 13 + 2 = 14132). Dadurch werden den Ziffern in der Zahldarstellung falsche Stellenwerte zugeordnet. Somit werden Defizite im Stellenwertverständnis deutlich, da gegen das Bündelungsprinzip und die Stellenwerteigenschaft verstoßen wird. Andere, häufig rekonstruierte Strategien waren zum einen die jeweilige Bündelungseinheit zu missachten und konsequent die Stellenwerte als Zahl und nicht als Ziffer aufzufassen (z. B. 14 H = 14) oder zum anderen in die falsche Richtung zu bündeln, bspw. 14 Hunderter als 1 Hunderter und 4 Zehner.

Zwar wurde das Umbündeln von Lernenden auch korrekt gelöst, jedoch wurde in der gegebenen Erläuterung deutlich, dass sie eine (evtl.

unverstandene) gelernte Regel genutzt haben und z. B. mechanisch bei 14 Hundertern die zweite Ziffer auf die Hunderterstelle und die erste entsprechend auf die nächstgrößere Stelle setzten. Eine inhaltliche Erklärung, die ein zugrundeliegendes Verständnis gezeigt hätte, gaben die Lernenden nicht.

Ein paar, wenige Lernende konnten die Aufgaben ansonsten gut lösen und bezogen sich in ihren Erklärungen zum Lösungsweg auf das Bündelungsprinzip (z. B. „Ich weiß, dass 10 H = 1 T. Da da 13 H steht, ist das 1 T und 3 H“). Dadurch offenbart sich ein Verständnis des Bündelungsprinzips.

*Multiplikative Beziehungen zwischen Stellenwerten:* Gemäß der Eigenschaft der Zehnerbasis steigen die Werte der einzelnen Stellen von rechts nach links um Zehnerpotenzen, sodass man den Wert benachbarter Stellenwerte durch Multiplikation mit bzw. Division durch 10 erhält. Bei benachbarten Stellenwerten konnten die meisten Lernenden den multiplikativen Zusammenhang korrekt darstellen. Allerdings zeigte sich, dass Schülerinnen und Schüler deutliche Schwierigkeiten hatten, wenn nicht benachbarte Stellenwerte betrachtet wurden; je größer der Unterschied zwischen den Stellenwerten war, desto mehr Schwierigkeiten traten auf. Als gängige Strategie wurde der nächst kleinere Stellenwert vom größeren der beiden zu vergleichenden Stellenwerte angegeben, z. B. „1 ZT ist 1000mal so groß ist ein Hunderter“. Zudem wurden Größenbeziehungen oftmals subtraktiv bestimmt („1 ZT ist 9900mal so groß wie ein Hunderter“). Damit zeigt sich, dass die betreffenden Lernenden kein gesichertes Verständnis über den Zusammenhang zwischen zwei Stellenwerten aufgebaut haben, wenn Stellenwerte nicht die Beziehung „mal 10" haben. Hier fehlen Einblicke in die Eigenschaft der Zehnerbasis.

*Zusammensetzen von Stellenwerten:* Für das Zusammensetzen von Zahlen aus Stellenwerten konnten vor allem zwei Strategien identifiziert werden: Entweder wurde der schriftliche Algorithmus genutzt oder alle Ziffern ungleich Null wurden von links nach rechts aneinandergereiht. Waren die Stellenwerte in der vertrauten Reihenfolge gegeben (z. B. 800 + 80 + 9), ergab dies eine korrekte Lösung; im Falle einer unüblichen Anordnung (z. B. 4000 + 9 + 300) führte dies zu fehlerhaften Lösungen wie 493, wenn alle Nullen ignoriert wurden, oder wenn erkannt wurde, dass ein Stellenwert nicht belegt ist zu 4093, 4903 oder 4930. Vereinzelt wurde das ‚Pluszeichen‘ weggelassen und 40009300 notiert. Diese Vorgehensweisen zeigen auch Defizite im dezimalen Verständnis und lassen sich möglicherweise auf Probleme mit der Null zurückführen, wenn die Funktion der Null als Platzhalter für nicht-besetzte Stellenwerte vermutlich noch nicht verstanden wurde und Nullen beliebig eingesetzt werden oder die „Null-ist-nichts-Vorstellung“ vorherrscht.

*Entbündeln*: Bei Aufgaben zum Entbündeln („Nimm von 6 Zehnern 6 Einer weg, welche Zahl ist es?“) konnte als Strategie oft eine Subtraktion erkannt werden, wobei die Bündelungseinheiten ignoriert wurden („6 Z − 6 E = 0“). In einzelnen Fällen wurde vom größeren Stellenwert eins abgezogen und entsprechend die Ziffer des kleineren Stellenwerts von zehn subtrahiert. Dies führte im obigen Beispiel zur korrekten Lösung 5 Zehner und 4 Einer; bei anderen Aufgaben, bei denen als kleinerer Stellenwert nicht Einer oder zwei benachbarte Stellenwerte gegeben waren, wie z. B. 3 Tausender und 2 Zehner, führte die Strategie zu falschen Lösungen (z. B. „2 Tausender und 8 Hunderter“). Es wird zwar der größere Stellenwert ‚aufgebrochen‘, aber ohne Beachtung der entsprechenden Bündelungseinheiten subtrahiert.

## Abschließende Bemerkungen

Die ersten Erkenntnisse der Studie zeigen einige interessante Tendenzen: Zwischen den Bearbeitungen der Lernenden aus den unterschiedlichen Jahrgangsstufen gab es keine signifikanten inhaltlichen Unterschiede; es war jedoch bei vielen zu beobachten, dass die Fehlerquote mit zunehmendem Zahlenraum anstieg. Während die Aufgaben im Zahlenraum bis 1000 häufiger korrekt gelöst wurden, zeigten sich größere Schwierigkeiten im Zahlenraum über Zehntausend. Diese steigenden Fehlerquoten lassen sich auf Verständnisprobleme des dezimalen Stellenwertsystems zurückführen, da die betreffenden Lernenden vermutlich noch keine Analogien zwischen verschiedenen Zahlenräumen erkannt haben. Zudem konnten Lernende Aufgaben korrekt lösen, obwohl bei der Analyse des Vorgehens Defizite im Stellenwertverständnis deutlich wurden. Stellenweise konnten Kompensationsstrategien rekonstruiert werden, die eventuell vorhandene Defizite im Verständnis verdecken können, indem syntaktisches, gelerntes Regelwissen genutzt wird.
Insgesamt wurde bei vielen Bearbeitungen von (Reproduktions-)Aufgaben deutlich, dass sich Lernende an einzelnen Objekten orientieren oder einzelne Wissenselemente äußern, ohne ein Verständnis für die strukturellen dezimalen Beziehungen zu zeigen. Daher kommen dem Einsatz von Aufgaben, die ein inhaltliches Verständnis anregen sowie der Diagnose und Förderung des dezimalen Stellenwertverständnisses, eine besondere Relevanz zu.

## Literaturverzeichnis


Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Dr. Köster.

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/ Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betreffenden Schülerinnen und Schülern* (2. Aufl.). Haupt.

Schöttler, C. (2019). *Deutung dezimaler Beziehungen – Epistemologische und partizipatorische Analysen von dyadischen Interaktionen im inklusiven Mathematikunterricht*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26771-1