Stefan GÖTZ, Wien

Ein Versuch zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden an der Universität Wien

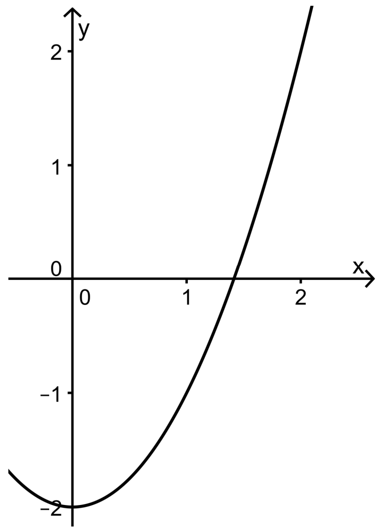
1. Motivation

Grundlegende Konzepte der Analysis stehen oft am Beginn der fachlichen Ausbildung von Lehramtsstudierenden der Mathematik. Dabei wird ihre Schulrelevanz von Seiten der Studierenden kaum gesehen und von Seiten der Lehrenden auch nicht betont. Folglich werden diese Konzepte weder als fundamentale Ideen der Mathematik wahrgenommen noch werden sie in den Grundvorstellungsvorrat aufgenommen. Eine Sinnstiftung dieser im Studium prominent platzierten Ausbildungsteile passiert auf diese Weise nicht. Als Konsequenz reihen Studierende des Unterrichtsfaches Mathematik die Fachwissenschaft an die vorletzte Stelle in einer Relevanzbewertung der Wissensbereiche ihrer Ausbildung (Etzlstorfer 2010, S. 105).

Im Wintersemester 2012/13 ist nun der Versuch unternommen worden, eine Schulmathematik-Lehrveranstaltung zur Differential- und Integralrechnung (zweistündige optionale Vorlesung plus einstündige Übungen, Leitung: S. G.) anzubieten, die eine Analysis-Lehrveranstaltung (zweistündige Pflichtvorlesung plus zweistündige Übungen, der zweite Teil des dreiteiligen Analysis-Zyklus, Leitung: Roland Steinbauer) begleitet. Sie soll dieses Defizit lindern, indem dort (die oft versteckten) Verknüpfungen, aber auch Differenzen explizit gemacht werden. Eine Verknüpfung ist beispielsweise die Definition des Grenzwertes a einer reellen Folge a_n, die in einem Schulbuch genauso lautet wie in einem universitären Lehrbuch: $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \text{sodass}\ |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > n_0$. Ganz im Gegensatz dazu steht die Definition der Sinusfunktion, unter der in der Schule üblicherweise das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse im rechtwinkeligen Dreieck für einen bestimmten Winkel α verstanden wird, in der in Rede stehenden Analysis-Vorlesung dagegen der Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion. Es wird also der zweite Teil der sog. doppelten Diskontinuität schon früh im Studium (Mindeststudiendauer neun Semester) in Angriff genommen: „[…] Tritt er [der junge Student, Anm. S. G.] aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muß er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, […].“ (Klein 1908, S. 1 f.).

Zur organisatorischen Verknüpfung der zwei Lehrveranstaltungen hielt R. S. eine Übungsgruppe zur Schulmathematik und S. G. eine zur Analysis.

2. Drei Spannungsfelder



Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis. Zum Beispiel garantiert erst die Vollständigkeit der reellen Zahlen die Gültigkeit des Nullstellensatzes. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, mit $f(x) = x^2 - 2$, hat auf dem Intervall $I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 2\}$ keine Nullstelle, obwohl $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$ gilt. In nebenstehendem Graphen sieht man das nicht.

Ein weiteres Spannungsfeld besteht zwischen den normativen Stoffbildern der Lehrenden und den individuellen Sinnkonstruktionen der Lernenden, z. B. bei der Stetigkeit einer reellen Funktion: ε-δ-Definition versus der Graph hat keine Sprünge.

Schließlich ist der Systematik eine gewisse Kalküllastigkeit inhärent, die oft auf Kosten der Heuristik geht und eine Sinnstiftung verhindert. Dann können Fragen wie „Was ist hier passiert?" bei Rechnungen wie beispielsweise $\int \sin 2x \, dx = \int \sin z \cdot \frac{1}{2} \, dz = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$, wenn $2x$ durch z substituiert wird, bzw. $\int \sin 2x \, dx = \int 2 \sin x \cos x \, dx = \int 2z \cos x \frac{dz}{\cos x} = \sin^2 x + c'$, wenn $z = \sin x$ gesetzt wird, auftreten (Götz et al. 2013, S. 54).

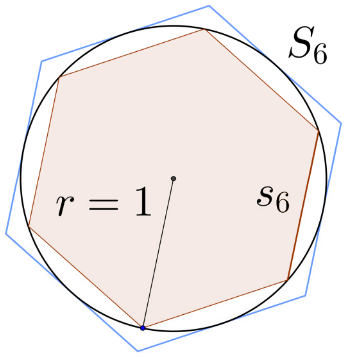
3. Folgen und Reihen

Drei Grundvorstellungen werden zu diesem Thema postuliert:

- Eine monoton wachsende/fallende und nach oben/unten beschränkte reelle Folge ist konvergent.
- Der in der Schulanalysis wichtigste Grenzwert ist $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$.
- Die geometrische Reihe ist – unter gewissen Voraussetzungen – berechenbar.

Die zweite Grundvorstellung kann mit der ersten begründet werden: $a_n = q^n$ ist streng monoton fallend für $0 < q < 1$ und durch Null nach unten beschränkt, also insgesamt konvergent. Die Iteration $a_{n+1} = a_n \cdot q$ liefert den Grenzwert $a = 0$.

Eine innermathematische Anwendung ist die Approximation des Umfanges des Einheitskreises nach Archimedes. Schuppar 1999, S. 35 und S. 40, entnehmen wir Rekursionsformeln für die Seitenlängen s_n der dem Einheitskreis eingeschriebenen (Umfänge $u_n < 2\pi$) und S_n der umschriebenen regelmäßigen n-Ecke (Umfänge $U_n > 2\pi$): $s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ und $S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$. Geometrisch anschaulich scheint es evident zu sein, dass mit wachsendem n die (Umfänge der) n-Ecke sich dem (Umfang des) Kreis(es) annähern. Numerisch ist das nicht unbedingt so: es kann zur Subtraktionskatastrophe kommen, vgl. Schuppar 1999, S. 35 f.



Erst eine analytische Untersuchung schafft Gewissheit: wegen $s_n > 0$ für alle $n > 2$ und $s_{2n} < s_n$ ebenfalls für alle $n > 2$ ist die Folge $\langle s_n \rangle$ konvergent (erste Grundvorstellung). Ihr Grenzwert s ergibt sich aus der Rekursion $s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ zu $s = 0$. Damit ist die Differenz der Seitenlängen $S_n - s_n = s_n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right)$ eine Nullfolge und die Differenz der Umfänge ebenso: $U_n - u_n = n \cdot S_n - n \cdot s_n = n \cdot (S_n - s_n) = \underbrace{n \cdot s_n}_{=u_n < 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right)$. Also ist $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} U_n = 2\pi$.

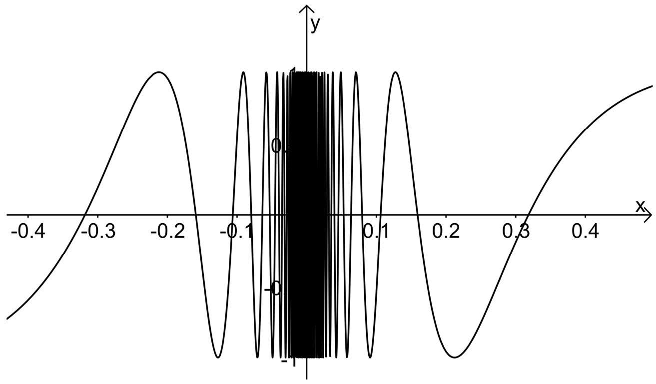
In der Schule wird die Zahl π aufgrund der Ähnlichkeit aller Kreise zueinander als das konstante Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises definiert. In der Analysis-Vorlesung ist die Zahl π das Doppelte der Nullstelle der Kosinus-Funktion im Intervall [0,2]. Erst die Berechnung der Bogenlänge eines (Viertel-)Kreises gemäß $\int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ zeigt den Zusammenhang, sie kann viel zeitnäher in der Schulmathematik passieren.

Die dritte Grundvorstellung (welche auf der zweiten aufbaut) exaktifiziert das Rechnen mit unendlich vielen Dezimalstellen, wie es in der Unterstufe bei der Umrechnung von rationalen Zahlen in Dezimaldarstellung in die Bruchdarstellung vorkommen kann.

Die Konvergenz der Summendarstellung $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ der Euler'schen Zahl e kann ebenfalls mit der geometrischen Reihe begründet werden: wegen $n! > 2^n$ für $n \geq 4$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Die erste Grundvorstellung erledigt den Rest, sie spielt auch bei der Folgendarstellung $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ von e eine wichtige Rolle.

4. (Un-)Stetigkeit reeller Funktionen

Die Folgenstetigkeit setzt das Konzept „Grenzwert von Folgen“ auf Bildern von Folgengliedern fort: Wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to a$ gilt, dann heißt f stetig an der Stelle a. In der Analysis-Vorlesung ist diese Definition ein Theorem. Sie eignet sich gut, um Unstetigkeitsstellen nachzuweisen. Zwei Grundvorstellungen dazu: Sprungstellen und Oszillationsstellen. Die reelle Funktion $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ z. B. ist an der Stelle Null nicht stetig: Für die Nullfolge $y_n = \frac{1}{(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}$ ist $|g(y_n)| = \left|\sin(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



5. Resonanz der Studierenden

„[Die] Verbindung zwischen Analysis und Schulmathe wird sichtbar. (sehr interessant!)“ und „Mir hat sich oft das eine oder andere, das wir in der Analysis VO durchgenommen hatten, besser erschlossen, als wir es wiederholt und dann auch aus einem anderen Blickwinkel betrachtet haben. […]“ sind positive Rückmeldungen zur Schulmathematik-Vorlesung gewesen. Auf der anderen Seite ist „[Bei] Manchen Themen nicht klar, warum die Analysis in der Schule gebraucht wird. Habe ich persönlich in der Schule noch nie gehört und finde es auch nicht notwendig, dies zu erläutern.“ ebenfalls ebendort zu konstatieren gewesen.

Insgesamt ergibt sich noch ein diffuses Bild, das wohl erst durch weitere Durchführungen von Parallelveranstaltungen geschärft werden kann.

Literatur

Etzlstorfer, S. (2010): $a^2 + b^2 = c^2$ – ¿Qué significa eso? Vergleich der Fachdidaktiken in Mathematik und Romanistik an der Universität Wien. Universität Wien: Diplomarbeit.

Götz, S., Reichel, H.-C. (Hrsg.) (2013): Mathematik 8. Von R. Müller und G. Hanisch. Wien: öbv.

Klein, F. (1908): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis. Leipzig: B. G. Teubner.

Schuppar, B. (1999): Elementare Numerische Mathematik. Eine problemorientierte Einführung für Lehrer und Studierende. Braunschweig/Wiesbaden: vieweg.