Rolf BIEHLER, Carmen MAXARA, Kassel

Eingangstest Stochastik - Vorkenntnisse von Lehramtsstudierenden

1. "Eingangstest Stochastik"

Ein "Eingangstest Stochastik" wurde zur Erfassung von Vorkenntnissen 93 Studierender (GHR) zu Beginn einer Vorlesung "Elementare Stochastik" vorgelegt. Der Test gliedert sich in zwei Teile: Ein erster Teil enthält informative Fragen zu persönlichen Daten, schulischer Erfahrung (84% der Studierenden hatten Stochastikunterricht in der Schule), Selbsteinschätzung stochastischer Kenntnisse und Fragen zu persönlichen Einstellungen zur Stochastik. In einem zweiten Teil sollten die Studierenden 22 Items zur elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie bis hin zur Binomialverteilung bearbeiten. Mit den "open response" Items im zweiten Teil wurden auch das Vorhandensein typischer Fehlvorstellungen geprüft und Auffassungen zur stochastischen Modellierung erhoben. Die Begründungen, die in über der Hälfte der Aufgaben gefordert wurden, sowie die offenen Antworten wurden kodiert und werden im Weiteren noch intensiver ausgewertet, so dass hier ein Zwischenstand unserer Auswertungen präsentiert wird.

2. Auswertung der Testitems

Schulstoff I: In insgesamt sieben Items wird nach Beispielen (mit und ohne Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse) und einer Definition von Zufallsexperimenten, Beispielen von Ereignissen sowie Beispielen und Definition einer Zufallsgröße gefragt. In den Aufgaben zu Zufallsexperimenten und Ereignissen konnten bei 50% bis 60% der Studierenden adäquate Vorstellungen gefunden werden, bei den Aufgaben zur Zufallsgröße dagegen gab es einen "Komplettausfall".

Aufgaben	Zufallsexperimente	Ereignisse	Zufallsgrößen
durchschnittliche Lösungshäufigkeit in Prozent	65,1	49,5	0,5

Schulstoff II: In diesen Bereich fallen Items aus der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik. In sechs (Teil-)Aufgaben sollen Wahrscheinlichkeiten angegeben bzw. berechnet werden. Innerhalb dieser Aufgaben können große Unterschiede bei den Lösungshäufigkeiten festgestellt werden. So lösten zum Beispiel 61% der Studierenden die Frage nach der Wahrscheinlichkeit einer "6" beim Würfelwurf nach einer schon geworfenen "6". Die folgende Frage beantworteten dagegen nur noch 35% der Studierenden richtig:

"Betrachten wir als Zufallsexperiment das Werfen zweier Münzen. Dabei kann

I: bei beiden Münzen Wappen erscheinen,

II: bei beiden Münzen Zahl erscheinen,

III: bei einer Münze Wappen und bei einer Münze Zahl erscheinen.

Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die obigen Ergebnisse an."

In einer weiteren Aufgabe ist nach der Wahrscheinlichkeit für genau einen Jungen in einer 4-Kind-Familie gefragt, die nur circa 13% angeben konnten. Die Studierenden hatten ebenfalls Probleme, in die im Test nochmal gegebene Formel der Binomialverteilung die Werte (*n, p, k*) einer Würfelaufgabe einzusetzen. In einer weiteren Aufgabe sollen die Möglichkeiten für ein sechsstelliges Passwort mit 26 möglichen Buchstaben unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung angegeben werden. Man sieht an über 25 verschiedenen vorkommenden Ergebnissen, dass zwar viel Kreativität vorhanden ist, aber nur geringe kombinatorische Fähigkeiten.

Aufgaben	Berechnung/Angabe von Ws	Einsetzen in Formel	Kombinatorik
durchschnittliche Lösungshäufigkeit in Prozent	32,9	33,3	32,3

Bekannte Fehlvorstellungen: Hier unterscheiden wir zwei Typen von Aufgaben. Drei Aufgaben mit Münz- oder Würfelfolgen möchten vorhandene Fehlvorstellungen zur Unabhängigkeit wie Ausgleichsvorstellungen (Fehlinterpretation des Gesetzes der großen Zahl) oder Vorstellungen, dass unregelmäßigere Folgen wahrscheinlicher sind, aufdecken (vgl. auch die Untersuchungen bei Scholz (1981) und Rasfeld (2004)). Bei der Frage, welche der beiden Würfelfolgen I: 555333 oder II: 531243 wahrscheinlicher ist oder ob beide gleich wahrscheinlich sind, antworteten circa 27% der Studenten mit II und knapp die Hälfte davon begründete ihre Antwort mit der "Art der Zahlenfolge". Eine weitere Frage, ob nach fünf Münzwürfen mit dem Ergebnis WWWWW eher Wappen, eher Zahl kommt oder beide Ergebnisse gleichwahrscheinlich sind, beantworteten dagegen etwa 87% richtig. Hier ließen sich nur wenige Fehlvorstellungen finden.

Der andere Typ von Aufgabe beschäftigt sich mit der Stichprobengröße und dem Gesetz der großen Zahl. Eine auch aus der Literatur bekannte Aufgabe war die "Krankenhausaufgabe" (vgl. auch Kahneman and Tversky (1972), Sedlmeier and Gigerenzer (1997) und Sedlmeier (1999)), die in folgender Version den Studierenden vorgelegt wurde:

"An einem großen Krankenhaus werden jede Woche durchschnittlich etwa 90 Kinder geboren. An einem kleinen Krankenhaus werden jede Woche durchschnittlich etwa 40 Kinder geboren. An welchem Krankenhaus ist es wahrscheinlicher, dass in einer Woche mehr als 60% der geborenen Kinder Jungen sind?"

Es folgt direkt eine Aufgabe mit gleichem mathematischem Inhalt:

"Betrachten Sie die beiden folgenden Tests, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann: Test 1 besteht aus 10 Fragen. Test 2 besteht aus 20 Fragen. Beide Tests sind bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet sind. Bei welchem der beiden Tests hat ein Prüfling größere Chancen zu bestehen, wenn er nur rät?"

Beide Items wurden von circa 20% der Studierenden richtig gelöst, wobei auffällig ist, dass insgesamt nur ca. 5% der Studierenden beide Fragen richtig beantworteten. Die Analogie des gleichen mathematischen Kontextes wurde trotz der direkten Aufeinanderfolge der Aufgaben nur von den wenigsten Studierenden erkannt. Bei der Krankenhausaufgabe antworteten etwas über 60% der Studierenden, dass die Wahrscheinlichkeiten an beiden Krankenhäusern gleich sei. Etwa die Hälfte der Studierenden, die diese Antwort gaben, argumentierte dabei, dass die Stichprobengröße auf die gefragte Wahrscheinlichkeit keinen Einfluss habe und dass das Verhältnis der Jungen- und Mädchengeburten überall gleich sei. Bei der Testaufgabe antworteten dagegen nur 45% der Studierenden, dass der Prüfling bei beiden Tests die gleichen Chancen hat zu bestehen, von denen 30% wie oben argumentierten. Dafür gaben circa 24% an, den längeren Test mit einer größeren Wahrscheinlichkeit zu bestehen. Hier wurde insgesamt mehr kontextbezogen argumentiert, z.B.:

"Bei Test 2 hat der Prüfling bessere Chancen, da er hier mehr falsche Antworten geben darf. Bei Test 1 dürfen nur vier Antworten falsch sein, bei Test 2 aber ungefähr 9."

Schule (Experimente oder Simulation zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten und Binomialverteilung):* Bei einem weiteren Item sollen Vorschläge zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines 6er-Pasches bei selbstgebastelten, ungleichmäßigen Tonwürfeln gemacht werden. Nur etwa 35% der Studierenden schlugen in unterschiedlich guten Ausführungen vor, eine Testreihe zu starten und die gesuchte Wahrscheinlichkeit experimentell zu bestimmen. Die anderen Studierenden machten keine Angaben, nannten keine konkrete Methode, behaupteten, dass es "nicht ginge" oder machten sonstige Aussagen. Bei den Studierenden ist die Idee, eine gesuchte Wahrscheinlichkeit durch Experimente zu bestimmen also größtenteils nicht vorhanden (vgl. dazu auch (Konold 1994)).

In einer Aufgabe soll in 10 Fällen darüber entschieden werden (ohne Begründung), ob eine Binomialverteilung vorliegt: Es wurden durchschnittlich 27% richtig bestimmt. In 3 weiteren Items wurde zusätzlich eine Begründung gefordert, z.B.

"Person A und Person B spielen 5 Spiele. Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der gewonnenen Spiele von A. Begründen Sie, ob in den folgenden Fällen die Zufallsgröße X binomialverteilt ist oder nicht.
A und B spielen gegeneinander Tischtennis. Aus vorigen Spielen lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass Person A gewinnt auf 0,6 schätzen. Hier passt die Binomialverteilung ganz gut.
☐ ja ☐ nein, weil…"

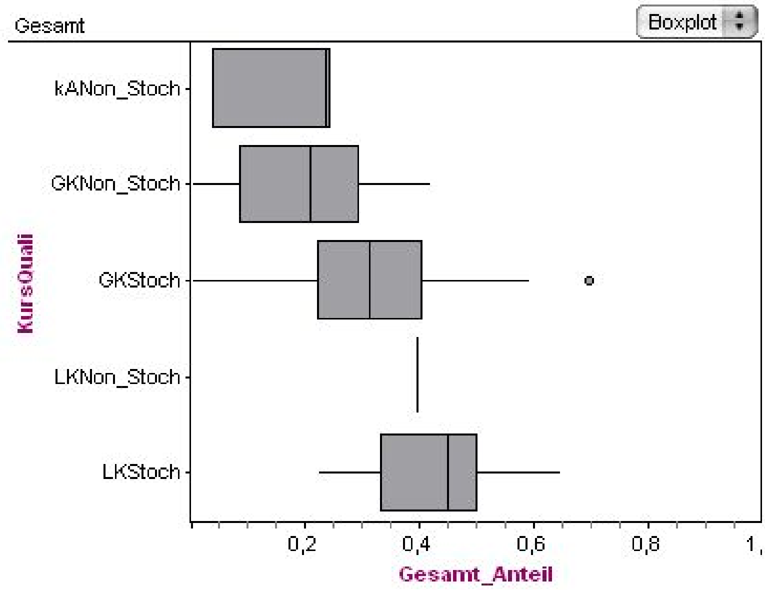
Weil die meisten Studierenden keine oder nur eine unzureichende Begründung gaben, fiel diese Aufgabenbearbeitung sehr schlecht aus (s.u.). Antworten zur Tischtennisaufgaben sahen beispielsweise folgendermaßen aus und begründeten nicht die getroffene Entscheidung:

"Weil die WSK, dass A gewinnt beinahe 50% ist."
"es sich um Zufallsexperiment handelt"
"Durch Umstände, die man vorher nicht weiß, kann Spieler B gewinnen."

Aufgaben	Simulation/Experimente	Modellvalidierung ohne Begründung	Modellvalidierung mit Begründung
durchschnittliche Lösungshäufigkeit in Prozent	30	26,8	3,9

3. Schlussbemerkung

Einen Eindruck, welchen Effekt die schulische Vorbildung hat, vermitteln die folgenden Boxplots. Dabei gibt die Variable Gesamt_Anteil den Anteil der erzielten Punkte an. Dass auch die LK-Schüler mit Stochastik zu 75% unter 50% der Punkte bleiben ist sicher auch kein befriedigender Zustand. Eine genauere Analyse der Begründungen und ein Vergleich mit dem Nachtest zur Vorlesung ist in Arbeit.



kaNon_Stoch: keine Angabe ob Grund- oder Leistungskurs, kein Stochastikunterricht
GKNon_Stoch: Grundkurs, kein Stochastikunterricht
GKStoch: Grundkurs mit Stochastikunterricht
LKNon_Stoch: Leistungskurs, kein Stochastikunterricht
LKStoch: Leistungskurs mit Stochastikunterricht

Kahneman, D. and A. Tversky (1972). Subjective probability: A judgement of representativeness. Cognitive Psychology 3, 430-454.

Konold, C. (1994). "Teaching Probability through Modeling Real Problems." The Mathematics Teacher **87**(4): 232-235.

Rasfeld, P. (2004). "Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empririschen Studie." Journal für Mathematik-Didaktik **25**(1): 33-61.

Sedlmeier, P. (1999). Improving Statistical Reasoning: Theoretical Models and Practical Implications. New Jersey, London, Mahwah:Earlbaum.

Sedlmeier, P. and G. Gigerenzer (1997). "Intuitions About Sample Size: The Empirical Law of Large Numbers." Journal of Behavioral Decision Making **10**: 33-51.