

BURTSCHER, Myriam & GAIDOSCHIK, Michael
Salzburg, Brixen

Dividieren als Verteilen und Aufteilen verstehen (DIVA): Erste Erkenntnisse aus einem Entwicklungsforschungsprojekt

Empirischer Rahmen

Studien zeigen, dass das Lösen von Divisionsaufgaben einer beträchtlichen Anzahl von Schülerinnen und Schülern sowohl in der Grundschule (z. B. Mulligan, 1992) als auch darüber hinaus (z. B. Ehlert et al., 2013) erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Die Längsschnittstudie von Burtscher (2022) zu Entwicklungen von Divisionsverständnissen bei Kindern in der Grundschule unterstreicht diese Ergebnisse. Sie legt zudem nahe, dass die Schwierigkeiten vieler Kinder auch damit in Zusammenhang stehen, dass ein tragfähiges Verständnis der Division zwei Typen von Grundvorstellungen (Aufteilen und Verteilen) erfordert. Ebenso unterstreicht die Studie die Annahme, dass der Aufbau eines tragfähigen Divisionsverständnisses eng in Verbindung mit dem Unterrichtsgeschehen steht (Burtscher, 2022).

In der Studie von Burtscher wurde insbesondere den Fragen nachgegangen: Zeigen Kinder von sich aus eine Präferenz für eine der beiden Grundvorstellungen der Division, wenn sie dazu aufgefordert werden, Textaufgaben zu vorgegebenen Termen zu formulieren oder diese mit Material darzustellen? Und: Verändert sich eine allfällige Präferenz bis zum Ende der vierten Klasse? Ebenso wurde Antwort auf die Frage gesucht: Zeigt sich über die drei Schuljahre hinweg ein Bewusstsein für die Existenz der beiden unterschiedlichen Arten der Division und, wenn ja, in welcher Weise?

Zentrale Erkenntnisse der Längsschnittstudie von Burtscher (2022) waren:

- Das Formulieren einer passenden Textaufgabe zu einem vorgegebenen Divisionsterm war für viele Kinder über den gesamten Untersuchungszeitraum hinweg schwierig (S. 446).
- Einen vorgegebenen Term stellten die Kinder überwiegend im Sinne des Aufteilens dar und befanden auf Nachfrage auch nur diese Darstellung (nicht aber auch jene im Sinne des Verteilens) als stimmig (S. 448).
- Beim Formulieren einer Textaufgabe zu einem vorgegebenen Term wählten die Kinder hingegen häufiger einen Verteil-Kontext und waren dann tendenziell erfolgreicher als Kinder, die eine Textaufgabe zu einem Aufteil-Kontext zu formulieren versucht hatten (S. 449).

- Wiederholt kam es zu Überlagerungen der beiden Divisionsaspekte in dem Sinne, dass Kinder beispielsweise den Term mit Material im Sinne des Aufteilens darstellten und dazu eine (dann nicht zur Handlung passende) Textaufgabe im Sinne des Verteilens formulierten.
- Nur wenige Kinder konnten bei einzelnen Darstellungswechseln einen Term sowohl im Sinne des Verteilens als auch im Sinne des Aufteilens deuten oder anerkannten beide Deutungen als zutreffend (S. 459).

Das Entwicklungsforschungsprojekt DIVA

In Kooperation der PH Salzburg mit der Fakultät für Bildungswissenschaften der Freien Universität Bozen wurde im Frühjahr 2023 das Entwicklungsforschungsprojekt DIVA (Dividieren als Verteilen und Aufteilen verstehen) gestartet. In dem Projekt werden die Erkenntnisse aus der Studie von Burtscher (2022) aufgegriffen. Es werden auf mehrere Wochen verteilte Unterrichtsmaßnahmen entwickelt und evaluiert mit dem Ziel, bei Kindern Bewusstheit bezüglich der „Zwiegestalt“ der Division als Verteilen und Aufteilen zu erreichen. Dadurch soll insgesamt ein tragfähigeres Operationsverständnis entstehen, als es beim Großteil der von Burtscher (2022) erfassten Kinder festzustellen war.

Die grundlegende Designentscheidung von DIVA liegt darin, dass die Dualität der Division gerade *nicht* ausgeblendet wird, wozu etwa das Deutsche Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik rät („[...] sollte Kindern im Unterricht der Unterschied zwischen Aufteilen und Verteilen nicht beigebracht oder verdeutlicht werden“; DZLM o.J.). Wie Wartha und Schulz (2021, S. 136) halten wir „eine *begriffliche* Unterscheidung zwischen Situationen des Aufteilens und Verteilens“ bei der Erarbeitung der Division in der Grundschule für jedenfalls erstrebenswert. DIVA sucht einen gangbaren Weg, wie möglichst viele Kinder das jeweils Typische der beiden Aspekte verstehen und auch sprachlich angemessen auszudrücken lernen.

Im inzwischen abgeschlossenen ersten Zyklus des Projekts nahmen ab dem Sommersemester 2023 vier Klassen teil, davon drei aus Südtirol und eine aus Salzburg. Insgesamt waren 58 Kinder beteiligt. Vor Beginn der einzelnen Unterrichtsphasen wurden mit den fünf in das Projekt eingebundenen Lehrerinnen detailliert die Rahmenbedingungen festgelegt. Die Einführung der Division sollte erst erfolgen, wenn die Mehrheit der Kinder über ein solides Verständnis der Multiplikation verfügte. Auch das automatisierte Beherrschen der Kernaufgaben im Einmaleins und das sichere Ableiten der anderen Einmaleins-Aufgaben wurde als wichtige Voraussetzung für ein erfolgreiches Arbeiten an der Division mit allen Kindern angestrebt (vgl. Gaidoschik, 2014) und gemäß begleitend durchgeführten Lernstandserhebungen

weitgehend erreicht. Für alle Unterrichtseinheiten zur Division wurden detaillierte Planungen entwickelt, welche insbesondere die konkreten Aufgaben und Fragen beinhalteten, welche den Kindern gestellt werden sollten. Die Planungen wurden während der Umsetzung kontinuierlich reflektiert und, wo dies sinnvoll erschien, modifiziert. Zudem wurden einige Unterrichtssequenzen videografiert und mehrfach Einzelinterviews zum Verständnis von Multiplikation und Division mit allen Kindern durchgeführt.

Erste Erkenntnisse aus Zyklus I

Nach Abschluss des ersten Zyklus in zwei der vier Klassen im Dezember 2023 liegen erste Ergebnisse vor, die derzeit ausgewertet und dann zur Adaption des Konzepts für den zweiten Zyklus ab dem Frühjahr 2024 herangezogen werden. Schon jetzt lassen sich erste Tendenzen festhalten:

- Das bewusste Unterscheiden der zwei Typen der Division scheint für die teilnehmenden Kinder der zweiten und dritten Klasse keine grundsätzliche Überforderung darzustellen.
- Wie bei anderen Zielen im Mathematikunterricht, erreichen nicht alle Kinder ein umfassendes Verständnis. Jedoch vermittelt keines der Kinder den Eindruck prinzipieller Überforderung. Allen Kindern scheint klar bewusst zu sein, dass es zwei Arten des Dividierens gibt mit der Gemeinsamkeit, dass eine Menge/Gesamtanzahl in gleich große Portionen geteilt wird.
- Vielen Kindern gelingt es, den Unterschied zwischen Aufteilen und Verteilen auch sprachlich angemessen festzuhalten, etwa in Formulierungen wie „Hier weiß ich, wie groß immer eine Portion ist“ oder „Hier weiß ich, wie viele gleich große Portionen gebildet werden“. Viele sprachliche Äußerungen sind von einer beeindruckenden Qualität, die auch von manchen Studierenden des Primarstufenlehramts nicht erreicht wird.
- Der in DIVA angestrebte sprachzentrierte Unterricht scheint zu wirken. Die Lehrkräfte berichten, dass die intensive Auseinandersetzung mit der Bedeutung von Rechenzeichen insgesamt Fortschritte im Kommunizieren und Argumentieren der Kinder bewirkt habe. In den Analysen der zu verschiedenen Zeitpunkten mit den Kindern gemachten Interviews wird versucht werden, diesen Eindruck empirisch zu prüfen.
- Die kind- und fachgerechte Thematisierung der Zwiegestalt der Division im Unterricht stellt eine hohe Anforderung an die Lehrkräfte dar. Die Lehrkräfte geben an, dass es oft schwierig für sie gewesen sei, selbst ausreichend präzise zu sprechen und klar zu formulieren. Insbesondere das Herausarbeiten feiner sprachlicher Unterschiede (z.B. „Viererportionen“ – „vier Portionen“) habe beständig hohe Konzentration erfordert.

Auch für die Anpassung der Unterrichtsvorschläge für den zweiten Zyklus liegen bereits einige konkrete Rückmeldungen der Lehrkräfte vor. Besonders produktiv erlebt wurde das spiralförmige Vorgehen. Die eingeplanten Wiederholungen von Aufgabenstellungen in leicht variiertes Form wurden als förderlich erlebt. Insbesondere Aufgaben, bei denen zu einer gegebenen Darstellung einer Division jeweils beide Interpretationen gefunden werden sollten, sowie das Erzählen dazu passender Rechengeschichten, hätten sich als sehr fruchtbar erwiesen.

Als besonders schwierig wurde das *Teilen und Messen von und mit Längen* erlebt, welches als Vorbereitung zur Darstellung von Divisionen am Zahlenstrahl thematisiert wurde. Es habe sich dabei gezeigt, dass einige Kinder über ein noch zu wenig abgesichertes Verständnis von Längenmaßen verfügten.

Als wenig ergiebig für das Absichern von Grundvorstellungen wurde von den Lehrkräften das Deuten von Divisionen (und Multiplikationen) an rechteckigen Punktefeldern zurückgemeldet. Zwar sei den Kindern schnell klar gewesen, dass in der Regel zwei Multiplikationen und zwei Divisionen zum abgebildeten Ausschnitt passen. Allerdings sei dies von vielen Kindern als eine Art „Zuordnungsspiel“ abgetan worden („Ich zähle 4 [Reihen] und 3 [Spalten], also passt hier $4 \cdot 3$ und $3 \cdot 4$ und $12 : 4$ und $12 : 3$ “), ohne dass dabei Handlungsvorstellungen im Sinne des Aufteilens oder Verteilens aktiviert worden seien.

Insgesamt bestärken uns die ersten Ergebnisse aus dem ersten Zyklus darin, DIVA weiterzuführen. Sie liefern zudem konkrete Anhaltspunkte für ziel führend erscheinende Anpassungen.

Literatur

- Burtscher, M. (2022). *Entwicklungen von Divisionsverständnissen bei Kindern in der Grundschule. Eine qualitative Längsschnittstudie.* Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-37782-3>
- DZLM - Deutsches Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (o.J.). *Aufteilen und Verteilen.* <https://kira.dzlm.de/node/121>
- Ehlert, A., Fritz, A., Arndt, D., & Leutner, D. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2(34), 237–263. <https://doi.org/10.1007/s13138-013-0055-0>
- Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten.* Kallmeyer.
- Mulligan, J. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal*, 4(1), 24–41. <https://doi.org/10.1007/BF03217230>
- Wartha, S. & Schulz, A. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe.* Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0>