

WITTMANN, Gerald & LENZ, Katja
Freiburg, Schwäbisch Gmünd

Konzeptuelles Stellenwertverständnis am Ende der Grundschulzeit – Fehlermuster und ihre Konsistenz

Das Verständnis mehrstelliger Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem ist eine zentrale Voraussetzung sowohl für das Rechnen mit natürlichen Zahlen als auch für das Lernen von Dezimalzahlen (z. B. Verschaffel et al., 2007). Trotz dieser Bedeutung bleibt das Stellenwertverständnis ein relativ vages Konzept. Konsens ist, dass es das Verständnis der Zifferndarstellung einer Zahl im dezimalen Stellenwertsystem umfasst, einschließlich ihrer Grundlagen (insbesondere Bündeln und Entbündeln) und ihrer Bedeutung.

Nach Herzog et al. (2019) und Van de Walle et al. (2023) lassen sich zwei Aspekte des Stellenwertverständnisses unterscheiden: Ein *prozedurales Stellenwertverständnis* umfasst das Lesen und Schreiben von Zahlen sowie den Transfer zwischen Zahlwörtern und der Zifferndarstellung in beiden Richtungen („Transcoding“, Herzog et al., 2022). Empirische Studien hierzu nehmen u.a. die Inversion der Zahlwortbildung im Deutschen und einigen anderen Sprachen in den Blick. Ein *konzeptuelles Stellenwertverständnis* bezieht sich in erster Linie auf die Beziehung zwischen den Stellenwerten, insbesondere auf das Verständnis des Bündelns und Entbündelns. Anknüpfend an die drei Darstellungsmodi nach Bruner et al. (1967) können Zahlen enaktiv (z.B. mit Dienes-Material), ikonisch (z.B. Aufgabenformat 1 in Abb. 1) und symbolisch (z.B. in einer Stellenwerttafel) dargestellt werden. Ein konzeptuelles Stellenwertverständnis zeigt sich dann in der Fähigkeit, flexibel sowohl zwischen verschiedenen symbolischen Darstellungen als auch zwischen symbolischen und ikonischen bzw. enaktiven Darstellungen wechseln zu können. Diese Darstellungswechsel gelten nicht nur als zentral für den Erwerb eines konzeptuellen Stellenwertverständnisses (Resnick, 1989; Treffers, 2001; Van de Walle et al., 2023), sondern bilden auch die Grundlage von Tests (z.B. Humbach, 2008). Von besonderer Bedeutung sind hierbei nicht-kanonische Darstellungen, d.h. Zahldarstellungen wie „1 Hunderter 26 Zehner“, bei denen Anzahlen größer als 9 nicht vollständig gebündelt sind (Resnick, 1989; Ross, 1989) oder/und Darstellungen bei denen die Reihenfolge der Bündelungseinheiten von der üblichen Schreibweise der Stellenwerte in der Reihenfolge THZE abweicht (Jensen et al., 2024).

Ziel dieser Studie

Während sich frühe Studien zum Stellenwertverständnis auf den Hunderter- oder Tausenderraum beziehen (Resnick, 1989; Ross, 1989), wird im Folgenden der Zehntausenderraum in den Blick genommen, da erst in größeren

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Zahlenräumen das Prinzip des fortgesetzten Bündelns zum Tragen kommt. Es wird untersucht, (1) ob es bei Aufgaben mit nicht-kanonischen Darstellungen typische Fehler gibt, d.h. Fehler, die unter allen Testpersonen häufig auftreten und die ein Muster erkennen lassen, (2) wie oft diese Fehler in der Stichprobe auftreten, (3) wie konsistent einzelne Schülerinnen und Schüler die typischen Fehler begehen, mit anderen Worten, ob systematische Fehler vorliegen.

Untersuchungsdesign

Die Erhebung fand am Ende der 4. Jahrgangsstufe in Baden-Württemberg statt. Sie war vom Regierungspräsidium Freiburg genehmigt; Schüler*innen und Eltern erteilten ihr Einverständnis. Die Stichprobe umfasste $N = 306$ Schüler*innen aus 34 Klassen. Ihr Alter lag zwischen 8;11 Jahre und 12;5 Jahre, 54,7% waren weiblich.



Aufgabenformat	Beispielaufgabe								
1 Darstellungswchsel ikonische Darstellung → Zifferndarstellung	<p>Manche Kinder stellen die Zahl 423 so dar:</p>  <p>Welche Zahl ist hier dargestellt? Schreibe die Zahl.</p> 								
2 Darstellungswchsel Stellenwerttafel → Zifferndarstellung	<p>Schreibe als Zahl:</p> <table border="1" data-bbox="703 1290 932 1391"> <tr> <td>T</td> <td>H</td> <td>Z</td> <td>E</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>6</td> <td>13</td> <td>4</td> </tr> </table>	T	H	Z	E	2	6	13	4
T	H	Z	E						
2	6	13	4						
3 Darstellungswchsel Stellenwerte → Zifferndarstellung	<p>Schreibe als Zahl: 3 Tausender, 25 Hunderter, 1 Zehner, 7 Einer</p>								

Abb. 1: Aufgabenformate mit jeweils einer Beispielaufgabe

Die Erhebung wurde als Paper-and-pencil-Befragung ohne Zeitbegrenzung durchgeführt. Das Stellenwertverständnis wurde mithilfe eines eindimensionalen Messmodells operationalisiert (Wittmann & Lenz, 2025), wobei drei Aufgabenformate als Indikatoren dienten. Diese umfassten jeweils einen Darstellungswchsel von einer ikonischen bzw. symbolischen Darstellung hin zur Zifferndarstellung (Abb. 1) Hierbei kamen nicht-kanonische Zahl-darstellungen zum Einsatz, wobei die Bündelanzahlen größer als 9 an unterschiedlichen Stellenwerten auftraten und systematisch variierten. Alle Schüler*innen bearbeiteten dieselben Aufgaben in derselben Reihenfolge.

Die Lösungen wurden zunächst dichotom kodiert (richtig/falsch), und anschließend die falschen Lösungen für jede Aufgabe nach Häufigkeiten sortiert. Falsche Ergebnisse, die bei mehr als 2% der Schüler*innen auftraten, wurden im Hinblick auf den dahinter liegenden Lösungsweg analysiert und entsprechende Fehlermuster beschrieben.

Erste Ergebnisse

Es konnten aufgabenübergreifend zwei Fehlermuster herausgearbeitet werden, die häufig auftreten.

Das *Aneinanderreihen aller Ziffern* kann bei allen nicht-kanonischen Darstellungen auftreten; das Ergebnis hat dann eine Stelle zu viel.

Beispiel: 8 Tausender, 4 Hunderter, 13 Zehner, 4 Einer → 84134

Das „*Bündeln*“ *nach rechts* kann bei nicht-kanonischen Darstellungen auftreten, wenn die Anzahl der Zehner- oder Hunderterbündel größer als 9 ist.

Beispiel: 8 Tausender, 4 Hunderter, 13 Zehner, 4 Einer → 8417

Bei manchen Aufgaben (z.B. „Schreibe als Zahl: 1 Hunderter 26 Zehner“) können beide Fehlermuster auch zum selben Ergebnis führen und sind dann nicht zu unterscheiden.

Ungefähr ein Sechstel der Schüler*innen bearbeitete alle Aufgaben fehlerfrei, während andererseits fast ein Drittel keine einzige richtige Lösung erzielte. Zwar traten bei allen Aufgaben, bei denen dies möglich ist, immer beide Fehlermuster auf, allerdings in unterschiedlicher Häufigkeit. Die Fehlermuster zeigten sich mit Einschränkungen auch als systematische Fehler.

Diskussion der Ergebnisse

Die Befunde bestätigen, dass bei einem erheblichen Teil der Schüler*innen am Ende der Grundschulzeit das Stellenwertverständnis unzureichend ausgebildet ist (Herzog et al., 2019; Humbach, 2008; Moser Opitz, 2013).

Während eines der beiden Fehlermuster, das *Aneinanderreihen aller Ziffern*, aus der Literatur bekannt ist (Herzog et al., 2019; Jensen et al., 2024; Resnick, 1989; Ross, 1989), wurde das „*Bündeln*“ *nach rechts* bisher noch nicht als Muster beschrieben; allerdings lassen sich einzelne Beispiele für falsche Lösungen in der Literatur durchaus so interpretieren (z.B. bei Herzog et al., 2019; Jensen et al., 2024).

Im Hinblick auf mögliche Fehlerursachen, bedeutet das *Aneinanderreihen aller Ziffern*, dass die Schüler*innen nicht bündeln, sondern so vorgehen, wie es bei kanonischen Darstellungen erfolgreich ist. Beim „*Bündeln*“ *nach rechts* wissen die betreffenden Schüler*innen offenbar, dass sie bündeln

müssen, führen es aber in einer falschen Weise aus – bildlich gesprochen nach rechts statt nach links. Dies legt nahe, dass ihnen der Sinn oder die Bedeutung des Bündelns nicht bewusst ist.

In Bezug auf eine Person sind die typischen Fehler nur bedingt konsistent. Dabei ist allerdings zu beachten, dass stets die beiden Fehlermuster in Reinform kodiert wurden. Dies bedeutet eine Unterschätzung der Häufigkeit der beiden Fehlermuster, da sie nicht erfasst wurden, wenn sie z.B. zusammen mit einem Flüchtigkeitsfehler vorlagen.

Literatur

- Bruner, J. S., Olver, R. R. & Greenfield, P. M. (1967). *Studies in cognitive growth*. John Wiley & Sons.
- Herzog, M. & Fritz, A. (2022). Place Value Understanding Explains Individual Differences in Writing Numbers in Second and Third Graders But Goes Beyond. *Frontiers in Education*, 6:642153. <https://doi.org/10.3389/educ.2021.642153>
- Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2019). Development of a sustainable place value understanding. In A. Fritz, V. Haase & P. Räsänen (Hrsg.), *The international handbook of mathematical learning difficulties* (S. 561–580). Springer.
- Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Köster.
- Jensen, S., Gasteiger, H. & Bruns, J. (2024). Place Value and Regrouping as Helpful Constructs to Diagnose Difficulties in Understanding the Place Value System. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 45(11). <https://doi.org/10.1007/s13138-024-00234-8>
- Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (2. Aufl.). Haupt.
- Resnick, L. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, 44(2), 162–169. <https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.2.162>
- Ross, S. H. (1989). Wholes, and place value: a developmental view. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47–51.
- Treffers, A. (2001). Numbers and numbers relationships. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children Learn Mathematics: A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for Calculation with Whole Numbers in Primary School* (S. 101–120). Freudenthal Institute.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. & Bay-Williams, J. M. (2023). *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally* (11. Aufl.). Pearson.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Bd. 1, S. 557–628). NCTM.
- Wittmann, G. & Lenz, K. (2025). Assessing students' conceptual place value understanding at the end of primary school. Paper presented at CERME 14, Bozen/Bolzano.