Katrin ROLKA, Dortmund

„Bei kleineren Zahlen kann alles kommen“ – Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zum Gesetz der großen Zahlen

In der Stochastik spielen Daten und Zufall eine wichtige Rolle, womit durchaus eine gewisse Unsicherheit verbunden ist. Herget (1997) formuliert überspitzt: „„[…] fast sieht es so aus, als wäre nur eines wirklich ganz sicher: In der Stochastik ist nichts wirklich sicher!“ (S. 8). Demgegenüber charakterisiert Hefendehl-Hebeker (2003) Stochastik als „Modellierung zufallsabhängiger Phänomene in der Sprache der Mathematik“ (S. 22). Diese beiden Positionen lassen sich durch folgende Frage verbinden: *Wie kann man den Zufall in den Griff bekommen?* Diese Frage geht auf Büchter et al. (2005) zurück und war leitend für die Entwicklung einer Lernumgebung im Rahmen des Projektes KOSIMA.[1] Die hier vorgestellten Ergebnisse sind Teil einer größeren Studie, in der die Erprobung der Lernumgebung im Mittelpunkt stand. Insbesondere ging es dabei um die Frage, wie sich stochastische Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern entwickeln.

1. Theoretischer Hintergrund

In Anlehnung an Büchter et al. (2005) sind mit Vorstellungen „individuelle Gedanken, „Bilder“, Meinungen oder Verständnisse über mathematische Inhalte oder bestimmte mathematische Situationen“ (S. 2) gemeint. Diese weit gefasste Beschreibung beinhaltet sowohl vorunterrichtliche als auch fachlich tragfähige Vorstellungen. Das Interesse an stochastischen Vorstellungen besteht bereits seit mehr als 30 Jahren. Fischbein (1975) unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen „primären“ und „sekundären Intuitionen“. Primäre Intuitionen bezeichnen die Vorstellungen, die sich bei Schülerinnen und Schülern ohne systematische Instruktion entwickeln. Diese werden vielfach nicht reflektiert und sind dementsprechend teilweise fachlich nicht tragfähig. Lange bevor Schülerinnen und Schüler eine systematische Reflexion im Unterricht erleben, haben sie bereits vielfältige Erfahrungen mit Zufallsphänomenen im Alltag gesammelt (Büchter et al., 2005). Die sekundären Intuitionen umfassen die fachlich tragfähigen und erwünschten Vorstellungen, die durch Instruktion bei den Schülerinnen und Schülern entstehen sollen.

---

[1] KOSIMA ist ein langfristig angelegtes Forschungs- und Entwicklungsprojekt für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I unter der Leitung von Bärbel Barzel, Stephan Hußmann, Timo Leuders und Susanne Prediger (vgl. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/kosima/).

Es ist vielfach beobachtet worden, dass sich vorunterrichtliche und tragfähige Vorstellungen konträr gegenüberstehen (Duit & von Rhöneck, 1996; Prediger, 2005). Im Sinne konstruktivistischer Annahmen, dass sich Lernen immer auf der Basis bereits vorhandener kognitiver Strukturen vollzieht, kommt den vorunterrichtlichen Vorstellungen eine besondere Rolle zu. Es gilt, diese aufzugreifen und daran anzuknüpfen, so dass sie um fachlich tragfähige Vorstellungen erweitert und bereichert werden können.

In der Stochastik ist eine oftmals berichtete Vorstellung im „Gesetz der kleinen Zahlen“ zu finden (Tversky & Kahneman, 1973). Das empirische Gesetz der großen Zahlen besagt, dass sich die relativen Häufigkeiten von Ereignissen bei langen Versuchsreihen um feste Werte stabilisieren. Demgegenüber steht der Wunsch, auch Einzelereignisse vorhersagen zu können (Konold, 1989). Auf kurze Sicht kann jedoch im Sinne des Gesetzes der großen Zahlen keine Aussage gemacht werden, während auf lange Sicht die Aussagekraft dieses Gesetzes zum Ausdruck kommt. Hefendehl-Hebeker (2003) formuliert diesen Gegensatz treffend:

> „Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Auf lange Sicht hat er jedoch in gewissem Sinn Methode. Diese Einschätzung zu präzisieren gehört zu den Aufgaben einer Einführung in die Stochastik.“ (S. 13)

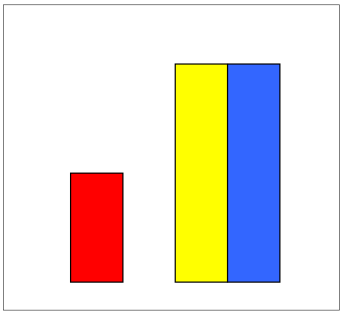
Mit der Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht kann demnach die eingangs gestellte Frage beantwortet werden: Auf lange Sicht ist es möglich, den Zufall in den Griff zu bekommen.

2. Studie

Ziel der Lernumgebung ist es, Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufen 5 bzw. 6 die Möglichkeit zu geben, systematische Erfahrungen mit den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls zu sammeln (Hußmann & Prediger, im Druck). Die hier vorgestellten Ergebnisse stammen aus videodokumentierten Einzelinterviews, die ca. 12 Wochen nach Ende der Erprobung der Lernumgebung durchgeführt wurden. Dabei wurden den Schülerinnen und Schülern Aufgaben zur mündlichen Bearbeitung vorgelegt, von denen hier eine exemplarisch vorgestellt wird (vgl. Abb. 1).

Da ein 20er-Farbwürfel Bestandteil des Spiels war und im Rahmen der Lernumgebung ebenfalls Diagramme wie in Abb. 1 eingesetzt wurden, sind die Schülerinnen und Schüler mit der Art der Aufgabenstellung vertraut.

Bei diesem Standort-Bild wurde **5** Mal mit einem 20er Farbwürfel gewürfelt. Welche Farbverteilung hatte wohl der Würfel? Entscheide dich für einen oder mehrere der angegebenen Würfel und kreuze an.



Würfel 1: ☐ Ja ☐ Nein

🔴	🟢	🟡	🔵
4x	0x	8x	8x

Würfel 2: ☐ Ja ☐ Nein

🔴	🟢	🟡	🔵
3x	5x	8x	4x

Würfel 3: ☐ Ja ☐ Nein

🔴	🟢	🟡	🔵
0x	1x	9x	10x

Abb. 1: Beispielaufgabe

Würfel 1 zeigt die Farbverteilung, die mit großer Wahrscheinlichkeit bei einer hohen Anzahl von Würfen gemäß der theoretischen Wahrscheinlichkeit zu dem abgebildeten Diagramm führt. Während Würfel 3 unmittelbar ausgeschlossen werden kann, ist die Entscheidung bei Würfel 2 nicht ganz offensichtlich. Allerdings kann auch dieser Würfel aufgrund der niedrigen Wurfzahl zu dem dargestellten Diagramm geführt haben.

3. Ergebnisse

Von den 12 durchgeführten Einzelinterviews kann aus Platzgründen lediglich ein kleiner Interviewausschnitt präsentiert werden:

I: Du kannst mir ja mal sagen, was du denkst, welcher Würfel es war oder vielleicht waren es auch mehrere.

S: Mhm, also ich denk, die ähm, die Nummer Eins, also hier die [zeigt auf Würfel 1].

I: Mhm, warum?

S: Weil das ziemlich gut passen würde, […]. Bei den anderen da wäre das unlogisch, […] also kann ich nicht genau sagen. Weil bei kleineren Zahlen haben wir ja, haben wir gelernt, dass bei kleineren Zahlen, da ist dann, also kann alles kommen, da kann dann auch, wenn nur ein Gelber ist, dann kann da nur ein Gelber kommen zum Beispiel, da, aber bei größeren Zahlen, wenn ich jetzt irgendwie fünfzig habe, von denen nehmen würde, dann wäre auf jeden Fall Rot, ach ähm Blau und Gelb wäre, also würde dann am meisten gewählt werden, aber also bei so wenigen, fünf, kann eigentlich jede Zahl vorkommen.

Die Ausführungen des Schülers in dem kurzen Transkriptausschnitt verdeutlichen, dass er stark um die sprachliche Formulierung seiner Ideen ringt. Die Aussage „bei kleineren Zahlen kann alles kommen“ wird zunächst ergänzt durch den kontrastierenden Verweis auf 50 als größere Zahl. Schließlich gelingt es ihm auch zu äußern, dass eine Unterscheidung zwischen einer kleinen und einer großen Anzahl von Durchführungen notwendig ist, um eine Aussage über den zugrunde liegenden Würfel machen zu können – wenngleich er in diesem Ausschnitt 50 als große Zahl bezeichnet.

4. Fazit

Der Beitrag sensibilisiert für Schwierigkeiten bei der Durchdringung des Gesetzes der großen Zahlen. Dabei stellt die Unterscheidung zwischen kurzer und langer Sicht auf verschiedenen Ebenen eine Herausforderung für Schülerinnen und Schüler dar. Auf der inhaltlichen Ebene betrifft dies die Tendenz, die Ergebnisse langer Versuchsreihen auch auf kurze übertragen zu wollen (Konold, 1989), auf der sprachlichen Ebene die Ausformulierung der Ideen. Unterstützend wirken dabei vielfältige Erfahrungen, die Schülerinnen und Schüler in systematischer Weise mit Zufallsphänomenen sammeln und reflektieren.

Literatur

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Den Zufall im Griff? – Stochastische Vorstellungen fördern. *Praxis der Mathematik in der Schule 47*(4), 1-7.

Duit, R. & von Rhöneck, C. (1996) (Hrsg.). *Lernen in den Naturwissenschaften.* Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel: Dordrecht & Boston.

Hefendehl-Hebeker, L. (2003). *Didaktik der Stochastik I – Wahrscheinlichkeits-rechnung.* Vorlesungsausarbeitung: Duisburg.

Herget, W. (1997). Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall…. *mathematik lehren 85*, 4-8.

Hußmann, S. & Prediger, S. (im Druck). Je größer die Wurfzahl, desto sicherer die Wette. Wettkönig spielen – Den Zufall auf lange Sicht verstehen. *Praxis der Mathematik in der Schule*.

Konold, C. (1989) Informal conceptions on probability. Cognition and Instruction 6(1), 59-98.

Prediger, S. (2005). Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen. Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik. *mathematica didactica 28*(2), 23-47.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, 76, 105-110.