OBERSTEINER, Andreas; HECK RIBEIRAS, Patricia & WITTMANN, Gerald
München, Freiburg, Freiburg

Bieten Schulbücher Anlässe für Conceptual Change beim Lernen von Brüchen?

Der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen stellt für viele Schülerinnen und Schüler eine große Herausforderung dar (z. B. Eichelmann et al., 2012). Ein wesentlicher Grund für diese Herausforderung ist die Tatsache, dass manche der für natürliche Zahlen gültigen Eigenschaften in den rationalen Zahlen ihre Allgemeingültigkeit verlieren. Die Conceptual Change Theorie (z. B. Vosniadou & Verschaffel, 2004) beschreibt solche Umbruchstellen und schlägt auch Ansätze für gezielte Unterstützung vor. Beispielsweise sollten Lernende explizit auf die Notwendigkeit eines Conceptual Change hingewiesen und mit den Grenzen ihrer bisherigen Konzepte konfrontiert werden. Die vorliegende Studie geht der Frage nach, inwiefern Schulbücher solche Lerngelegenheiten enthalten und damit Lernanlässe für Conceptual Change anbieten.

1. Conceptual Change beim Lernen von Brüchen

Dass beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Bruchzahlen ein Conceptual Change notwendig ist, ergibt sich aus den unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Zahlbereiche (z. B. Prediger, 2004). In der Literatur sind insbesondere vier Aspekte gut belegt. (1) Hinsichtlich der *symbolischen Repräsentation* besteht der Unterschied darin, dass diese bei natürlichen Zahlen eindeutig ist, bei Bruchzahlen dagegen unendlich viele äquivalente Darstellungen möglich sind. (2) Der *Größenvergleich* ist bei natürlichen Zahlen ziffernweise möglich, bei Bruchzahlen dagegen müssen die Relationen zwischen Zähler und Nenner beachtet werden. (3) Die *Operationen* unterscheiden sich sowohl in ihren Auswirkungen auf die Operanden (z. B. Multiplikation kann nicht bzw. kann verkleinern) als auch den notwendigen Konzeptualisierungen (Multiplikation als wiederholte Addition sinnvoll bzw. nicht sinnvoll). (4) Schließlich unterscheiden sich die beiden Zahlbereiche im Aspekt des *Dichtliegens*: Während es in den natürlichen Zahlen Vorgänger und Nachfolger gibt, liegen zwischen zwei Bruchzahlen stets unendlich viele weitere. Lernende haben gerade bezüglich dieser vier Aspekte häufig Schwierigkeiten, und typische Fehler können auf nicht vollständig vollzogene Vorstellungsumbrüche zurückgeführt werden (Obersteiner et al., 2019; Eichelmann et al., 2012).

Zur Unterstützung eines erfolgreichen Conceptual Change sollten Schülerin-

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

nen und Schüler gezielt auf die Notwendigkeit eines Konzeptwechsels hingewiesen werden. Dies kann beispielsweise durch explizite Hinweise in Lernmaterialien erfolgen (z. B. Tippett, 2010). Auch Aufgabenstellungen, bei deren Bearbeitung Lernende selbst auf die Notwendigkeit eines Konzeptwechsels stoßen, können Conceptual Change anregen.

Eine Herausforderung für den Unterricht ergibt sich dadurch, dass zwischen Brüchen und natürlichen Zahlen nicht nur wesentliche Unterschiede, sondern auch bedeutende Gemeinsamkeiten bestehen. So ist eine wichtige Eigenschaft beider Zahlbereiche, dass die Zahlen ihrer Größe nach am Zahlenstrahl dargestellt werden können. Auch einige Rechenoperationen weisen Ähnlichkeiten auf (z. B. Addition natürlicher Zahlen und Addition gleichnamiger Brüche).

Sowohl Lehrende als auch Lernende müssen also sorgfältig unterscheiden, ob die bereits aus den natürlichen Zahlen bekannten Konzepte weiterhin tragfähig sind oder nicht. Angesichts der bekannten typischen Schwierigkeiten liegt die Vermutung nahe, dass Schülerinnen und Schüler im Unterricht vorwiegend die Gemeinsamkeiten zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen wahrnehmen und weniger die Unterschiede. Eine bedeutende Rolle spielen dabei die in Schulbüchern bereitgestellten Lerngelegenheiten. Beispielsweise gibt es Hinweise darauf, dass typische Fehler mit Bruchzahlen allein durch die Häufigkeit der in Schulbüchern vorhandenen Aufgabentypen erklärt werden können (Braithwaite et al., 2017).

2. Ziele der Studie

Die vorliegende Studie geht deshalb der Frage nach, inwieweit Schulbücher – als zentrales Medium im Mathematikunterricht – Lerngelegenheiten bieten, die Conceptual Change bei Schülerinnen und Schülern unterstützen. Konkret wird untersucht, in welchem Umfang explizite oder implizite Lerngelegenheiten vorhanden sind, welche Gemeinsamkeiten oder aber Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und den Bruchzahlen ansprechen.

3. Methode

In die Analyse wurden drei Schulbuchreihen der Jahrgangsstufen 5 bis 7 einbezogen, die in Baden-Württemberg häufig genutzt werden (Schnittpunkt, Mathe live und Lambacher Schweizer). Für die Kategorisierung der Lerngelegenheiten wurde ein Kodierschema entwickelt (für Details s. Heck Ribeiras et al., 2022). In den Schulbüchern wurden alle Aufgaben, Beispiele, Merksätze etc. in die Kodierung einbezogen. Die jeweils kleinste Einheit (z. B. eine Teilaufgabe) bildete die Kodiereinheit. Zunächst wurde kodiert, ob überhaupt eine potenzielle Lerngelegenheit bezüglich der Gemeinsamkeiten oder Unterschiede von natürlichen Zahlen und Bruchzahlen vorlag.

Falls ja, so wurde kodiert, welcher Art die Lerngelegenheit war (*expliziter Hinweis/implizite Lerngelegenheit*), auf welches Ziel sich die Lerngelegenheit bezog (*Gemeinsamkeit/Unterschied* der Zahlbereiche) und welche der vier oben genannten Aspekte sie ansprach (*symbolische Repräsentation, Größenvergleich, Operationen, Dichtliegen*).

Ein Beispiel für einen expliziten Hinweis auf Gemeinsamkeiten im Aspekt der Operationen ist der Merksatz "Beim Runden von Dezimalzahlen gelten dieselben Regeln wie für das Runden von natürlichen Zahlen“ (Backhaus et al., S. 106). Es wird also explizit auf die Anwendbarkeit derselben Regel für Dezimalzahlen und natürliche Zahlen hingewiesen. Ein Beispiel für eine implizite Lerngelegenheit bezüglich Unterschiede im Aspekt symbolische Repräsentation ist eine Aufgabe, bei der Brüche (einige davon äquivalent) am Zahlenstrahl eingezeichnet werden sollten. Schülerinnen und Schülern könnten bei regulärer Bearbeitung erfahren, dass mehrere Brüche an der gleichen Stelle liegen und deshalb gleich groß sind. Diese Erfahrung wird aber nicht explizit formuliert.

Eine unabhängige zweite Kodierung eines Teils des Materials ergab eine hohe Interkoderrelabilität (Cohens Kappa für alle vier kodierten Dimensionen > 0,77).

4. Ergebnisse

Insgesamt wurden 11439 Elemente in den Schulbüchern kodiert. Davon lag in 9555 eine potenzielle Lerngelegenheit mit Blick auf Gemeinsamkeiten oder Unterschiede beider Zahlbereiche vor. Von diesen wiederum lagen in lediglich 23 Fällen explizite Hinweise vor, die sich allesamt auf *Gemeinsamkeiten* zwischen den Zahlbereichen bezogen. Kein einziger dieser expliziten Hinweise bezog sich auf *Unterschiede* zwischen den Zahlbereichen. Von den 9532 impliziten Lerngelegenheiten bezogen sich dagegen 73% auf Unterschiede und 27% auf Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Zahlbereichen.

Sowohl implizite als auch explizite Hinweise kamen am häufigsten im Inhaltsaspekt der Operationen vor, gefolgt von Größenvergleich und symbolischer Repräsentation. Bezüglich des Dichtliegens gab es nur sehr wenige implizite Lerngelegenheiten, die sich naturgemäß auf Unterschiede zwischen den Zahlbereichen bezogen.

5. Diskussion

Folgt man der Conceptual Change Theorie, so sollten vor allem explizite Hinweise auf Unterschiede zwischen den natürlichen und den Bruchzahlen für Schülerinnen und Schüler hilfreich sein, um typischen und gut dokumentierten Lernschwierigkeiten bei Brüchen vorzubeugen oder zu begegnen.

Vor diesem Hintergrund erscheinen die hier berichteten Ergebnisse problematisch. In den untersuchten Schulbüchern gab es keine einzige Stelle mit einem expliziten Hinweis auf Unterschiede zwischen den Bruchzahlen und den natürlichen Zahlen. Lediglich implizit fanden sich etwa Aufgabenstellungen, bei denen Schülerinnen und Schüler beim regulären Bearbeiten auf Unterschiede stoßen könnten. Ob dies regelmäßig der Fall ist, ist angesichts der dokumentierten Herausforderungen im Themenbereich Brüche anzuzweifeln.

Schulbuchanalysen sind nur eine distale Annäherung an das tatsächliche Unterrichtsgeschehen. Weitere Untersuchungen, etwa Unterrichtsbeobachtungen, könnten hilfreiche Erkenntnisse zu den im Unterricht tatsächlich realisierten Lerngelegenheiten liefern.

Literatur

Backhaus, M., Bernhard, I., Böttner, J., Fechner, G., Malzacher, W., Olpp, A., Stöckle, C., Straub, T. & Wellstein, H. (2015). *Schnittpunkt 6. Mathematik – Differenzierende Ausgabe. Baden-Württemberg.* Ernst Klett Verlag.

Braithwaite, D. W., Pyke, A. A. & Siegler, R. S. (2017). A computational model of fraction arithmetic. *Psychological Review, 124*(5), 603–625. https://doi.org/10.1037/rev0000072

Eichelmann, A., Narciss, S., Schnaubert, L. & Melis, E. (2012). Typische Fehler bei der Addition und Subtraktion von Brüchen – Ein Review zu empirischen Fehleranalysen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*, 29– 57. https://doi.org/10.1007/s13138-011-0031-5

Heck Ribeiras, P., Obersteiner, A., & Wittmann, G. (2022). In welcher Weise unterstützen Schulbücher Vorstellungsumbrüche beim Lernen von Bruchzahlen? – Eine Schulbuchanalyse. *mathematica didactica, 45*. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2022.1595

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M. & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In A. Norton & M. W. Alibali (Hrsg.), *Constructing number. Merging perspectives from psychology and mathematics education* (S. 135–162). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00491-0_7

Prediger, S. (2004). Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? *Mathematik lehren, 123*, 10–13.

Tippett, C. D. (2010). Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education, 8*, 951– 970. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9203-x

Vosniadou, S. & Verschaffel, L. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. *Learning and Instruction, 14*, 445–548. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.014