OBERBUCHER, Christoph
Graz

Stetigkeit als Überdeckungseigenschaft - der Missing Link?

In Deutschland erachten viele Hochschullehrende außerhalb von MINT-Fächern einen anschaulichen Stetigkeitsbegriff als Lernvoraussetzung für den Beginn eines Studiums (Neumann et al., 2021). Die häufig verwendete anschauliche Vorstellung von Stetigkeit als *durchgezogener Graph* bzw. die Grundvorstellungen zur Stetigkeit wie *Sprungfreiheit, Vorhersagbarkeit* oder *Darstellbarkeit* (Greefrath et al., 2016, S. 141) haben (1) nur einen eingeschränkten bzw. ungenügend präzisierten Gültigkeitsbereich, sind (2) nicht bzw. nur bedingt tragfähig (vom Hofe & Blum, 2016) im Kontext der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit und können daher zu (3) Spannungen/Widersprüchen in der schulischen curricularen Spiralstruktur sowie zwischen Schul- und Hochschulmathematik (doppelte Diskontinuität) führen. Aus den genannten Gründen soll sich dieser Artikel der folgenden Frage widmen:

Inwiefern kann die Diskrepanz zwischen einem anschaulichen Stetigkeitsbegriff und der formalen $\epsilon - \delta$-Definition überwunden werden, um eine Kohärenz innerhalb der curricularen Spiralstruktur zu gewährleisten?

Auf der Grundlage einer Sachanalyse der $\epsilon - \delta$-Definition (Salle & Clüver, 2021) wurden zentrale mathematische Bestandteile/ Objekte/ Handlungen der $\epsilon - \delta$-Definition erarbeitet. Basierend auf diesen Erkenntnissen wurde eine dynamische interaktive Lernumgebung entwickelt, welche es Lernenden ermöglicht, die **$\epsilon - \delta$-Definition** ohne Vorwissen **direkt anzuwenden** (Edwards & Ward, 2004). Die Lernumgebung und die Analyse einer Fallstudie werden nachfolgend diskutiert, um aus der wechselseitigen Bezugnahme zwischen der theoriebasierten Lernumgebung und den Lernendenvorstellungen eine Weiterentwicklung/ Neugestaltung der Grundvorstellungen zum Stetigkeitsbegriff vorzuschlagen.

Methodischer Hintergrund der Studie

Im Rahmen eines Embodied Designs (Abrahamson, 2014) wurde eine technologiegestützte Lernumgebung entwickelt, um das aktive Erfahren des Stetigkeitsbegriffs und dessen Eigenschaften zu fördern (Oberbucher, *angenommen*). Gemäß $\epsilon - \delta$-Definition kann eine Funktion an einer Stelle als stetig betrachtet werden, wenn es möglich ist, den vertikalen Deltabereich so einzugrenzen, dass alle Funktionswerte innerhalb dieses Bereichs im gegebenen horizontalen Epsilonbereich liegen (siehe Abb. 1). Dabei wird im Sinne eines dynamischen Interaktionsproblems (Abrahamson, 2014) ein Epsilonbereich vorgegeben, sodass der vertikale Deltabereich derart angepasst

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

werden muss, dass die $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit erfüllt ist. Bei erfolgreicher Anwendung der Definition zeigt das System positives (grünes) Feedback. Die Stetigkeit verschiedener Funktionsgraphen muss von den Lernenden an verschiedenen Stellen untersucht werden, wobei Unstetigkeiten teilweise die Erfüllung der Definition limitieren.

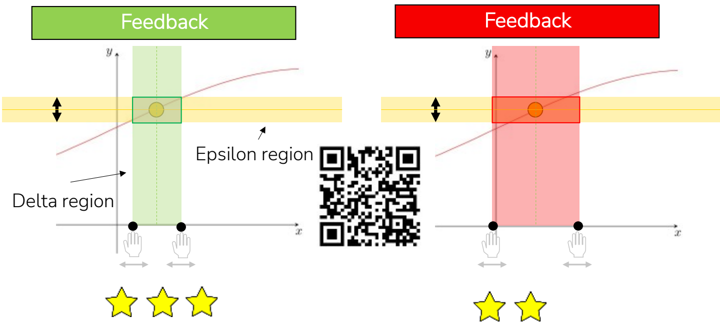

Abb. 1: Interaktionsproblem (Oberbucher, *angenommen*); QR-Code: iPad-Link

Diese Lernumgebung wurde mit sechs Schüler*innen (ohne Vorerfahrung zum Stetigkeitsbegriff), drei Studierenden und drei Professor*innen getestet (Oberbucher, angenommen), um durch multimodale Analyse Interaktionsweisen und Bezugnahmen zu formalen und präformalen Vorstellungen zum Stetigkeitsbegriff zu identifizieren. Hierbei wird die Eigenschaft als konzeptionell erfasst angenommen, wenn die zur Lösung des Interaktionsproblems notwendigen Zusammenhänge geäußert werden (Abrahamson, 2014).

Fallbeispiel zur Lernendenperspektive: Liam und das Rechteck

Die Lösung des Interaktionsproblems bietet Einblicke in die Lernendenperspektive. Im Folgenden wird *eine* konzeptionelle Erfassung der $\epsilon - \delta$-Definition eines Schülers, 'Liam' (L), in Gegenwart des Tutors (T) dargelegt.

T: Wie würdest du das als Eigenschaft beschreiben?

L: Nur die Linien, die in dem Bereich drin sind *(Abb. 2a: bewegt den Finger kreisförmig an der Delta-Epsilon-Schnittstelle.)* sind halt grün.

T: Und was meinst du mit „dem Bereich"?

L: Also in dem Intervall zum Beispiel *(Abb. 2b: bewegt die Zeigefinger in Form eines Rechtecks)*. (Tutor: Mhm.) […] Und es funktioniert so lange, bis das Intervall *(verändert die Breite des Epsilonbereichs)* manche Linien ausschließt. Also zum Beispiel, dass die [Anm.: Funktionswerte] nicht mehr dazugehören [Anm.: Epsilonbereich] *(zeigt auf dem Bildschirm auf Funktionswerte innerhalb des Deltabereichs, aber außerhalb des Epsilonbereichs)*, aber in dem Intervall *(Abb. 2c: zeigt auf die Ränder des Deltabereichs)* gehören sie halt noch dazu.

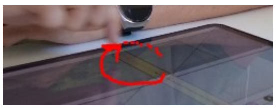

Abb. 2a

Abb. 2b

Abb. 2c

In Liams Auseinandersetzung mit der Lerngelegenheit offenbaren sich Beziehungsaspekte zwischen den „Linien“ und der rechteckigen Form – der Überdeckung von Delta- und Epsilonbereich. In Zeile 2 beschreibt er, dass „nur die Linien, die in dem Bereich drin sind“, die er durch eine kreisförmige Geste an der Delta-Epsilon-Überdeckung illustriert (Abb. 2a), „grün“ sind. Er definiert diesen Bereich als Überdeckung von Epsilon- und Deltabereich (Zeile 5), was durch die ikonische Geste (Abb. 2b: Rechteck) kenntlich gemacht wird. Folgend spricht er darüber, dass die Vorgangsweise so lange funktioniert, „bis das Intervall manche Linien ausschließt“ (Zeile 7-8), während er die Breite des Epsilonbereichs variiert. Es lässt sich schließen, dass damit Funktionswerte gemeint sind, die nicht mehr zum Epsilonbereich gehören (Zeile 9), jedoch immer noch innerhalb des Deltabereichs sind (Zeile 11, Abb. 2c). Hier wird deutlich, dass (1) für die Lösung des Interaktionsproblems die Objekte *Graph/ Funktion* („Linien“), *Epsilon-Deltabereich (zusammengefasst als Rechteck)* und deren Beziehung zueinander von Relevanz sind und (2) dieser genannte *Beziehungsaspekt* als *dynamisch* wahrgenommen wird (Zeile 6-7). Diese Episode zeigt eine mögliche Erfahrung der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit dieses Schülers. Dabei spielt das Rechteck für die Charakterisierung der $\epsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit eine bedeutende Rolle. Aus diesem Grund erscheint die Beschreibung der Stetigkeit in Form einer Überdeckungseigenschaft als sinnvoll.

Tentative Folgerung: Stetigkeit als Überdeckungseigenschaft

Die Überdeckungseigenschaft wird dabei wie folgt definiert:

Ein Rechteck wird am Schnittpunkt S seiner Diagonalen an den Funktionswert einer Funktion f „*gebunden*“. Bei der Auswahl einer beliebigen Höhe h des Rechtecks erfolgt die Anpassung der Breite b derart, dass kein Funktionswert von f über/ unter dem Rechteck liegt. Funktioniert dies für jede Höhe h, weist die Funktion f die sogenannte Überdeckungseigenschaft im Punkt S auf und wird als dort stetig bezeichnet.

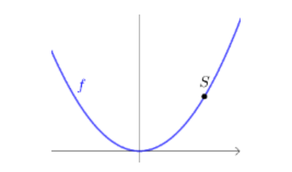	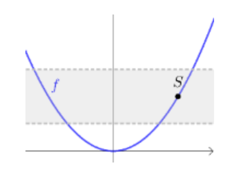	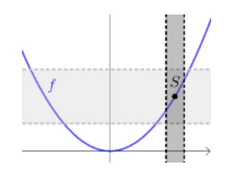	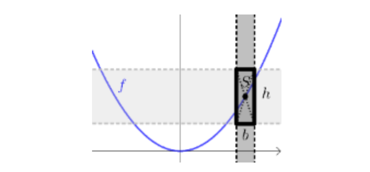
Wähle Schnittpunkt S der Diagonalen	Höhe h symmetrisch um S beliebig vorgeben	passende Breite b symmetrisch um S anpassen	zeichne Rechteck; kein Funktionswert liegt über/ unter dem Rechteck

Abb. 3: Konstruktion der Überdeckungseigenschaft

Diese anschauliche Beschreibung der Stetigkeit mit Hilfe des an den Funktionswert „gebundenen Rechtecks“ (sinngemäße Wortwahl einer Studierenden) hat mehrere Vorteile. Einerseits wird verdeutlicht, dass lediglich Werte aus dem Definitionsbereich für die Argumentation in Betracht kommen. Andererseits kann abseits von Formalismen auf enaktiver Ebene eine qualitative Aussage getroffen werden–und dies gilt auch für „exotische“ Funktionen (Greefrath et al., 2016, S. 141). Zudem gewährleistet die geometrische Deutung der $\epsilon - \delta$-Definition im Gegensatz zu den vorhandenen Grundvorstellungen die geforderte Anschlussfähigkeit (vom Hofe & Blum, 2016).

Diskussion und Ausblick

Die Vorstellung von Stetigkeit mittels Überdeckungseigenschaft soll zunächst nicht die existierenden Grundvorstellungen ersetzen, aber eine Möglichkeit aufzeigen, auf anschaulicher Ebene diese Eigenschaft zu untersuchen. Es erscheint notwendig, die existierenden Grundvorstellungen zu spezifizieren, indem vor allem der jeweilige Gültigkeitsbereich (Salle & Clüver, 2021) definiert wird und bei Bedarf auf andere Vorstellungen—wie der Überdeckungseigenschaft als möglicherweise mächtigeres Werkzeug—zu verweisen. Dahingehend können Funktionen ohne Sprung mit Hilfe der Vorstellung der Sprungfreiheit untersucht werden. Bei Vorhandensein eines Sprungs ist der Gültigkeitsbereich dieser Vorstellung jedoch erreicht und es ist nötig, eine andere Grundvorstellung zu aktivieren. Das Ziel sollte es sein, ein kohärentes Set an Grundvorstellungen zum Stetigkeitsbegriff zu entwickeln, um den Aufbau eines Grundverständnisses (Salle & Clüver, 2021) zu ermöglichen sowie die Gestaltung von Lerngelegenheiten zu informieren.

Literatur

Abrahamson, D. (2014). Building educational activities for understanding: An elaboration on the embodied-design framework and its epistemic grounds. *International Journal of Child-Computer Interaction, 2*(1), 1–16.

Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*(5), 411–424.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Springer Berlin Heidelberg.

Neumann, I., Rohenroth, D., & Heinze, A. (2021). Studieren ohne Mathe. *Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für Studienfächer außerhalb des MINT-Bereichs.* https://www.ipn.uni-kiel.de/malemint

Oberbucher, C. (*angenommen*). Doping an Embodied Design. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*(2), 553–580.

vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 225–254.