

GLEISSBERG, Sandra & EICHLER, Klaus-Peter
Schwäbisch Gmünd, Bodø (Norwegen)

Grundaufgabengleichungen der Multiplikation - einprägen, behalten und wieder vergessen?

Ziele bei der Behandlung der Multiplikation sind erstens das inhaltliche Verstehen der Operation als Begriff, zweitens die Befähigung zum Bestimmen der Werte beliebiger Produkte und drittens die gedächtnismäßige Aneignung aller so genannten Grundaufgabengleichungen der Multiplikation, also der Gleichungen mit zwei Faktoren kleiner oder gleich 10. Diese Ziele sind anerkannt und werden doch Jahr für Jahr von vielen Kindern nicht erreicht. Nachfolgend sollen mögliche Ursachen dafür diskutiert werden, dass Kinder die Grundaufgabengleichungen unzureichend gedächtnismäßig aneignen.

Gedächtnismäßige Aneignung der Grundaufgabengleichungen

Die Bedeutung des gedächtnismäßigen Beherrschens der Grundaufgabengleichungen der Multiplikation resultiert aus ihrer Werkzeugfunktion zum Lösen anderer Aufgaben (Kling & Bay-Williams, 2015). Es genügt oft nicht, den Wert von Produkten wie $6 \cdot 8$ auf Fertigniveau durch Rückgriff auf andere Aufgaben, hier etwa durch das Verdoppeln von $3 \cdot 8$ oder die Nachbaraufgabe $5 \cdot 8$ zu bestimmen, sondern es ist notwendig, Grundaufgabengleichungen wie $6 \cdot 8 = 48$ reproduzieren zu können. Ist das nicht möglich, sinkt die Performance deutlich: Wer den Bruch $\frac{48}{56}$ sieht und die Fakten $56 = 7 \cdot 8$ und $48 = 6 \cdot 8$ abrufen kann, vermag ihn sofort zu kürzen. Andernfalls wird der Bruch 3mal nacheinander mit der Zahl 2 gekürzt und gerätselt, was die Hälfte von 56 ist. Trotz der offensichtlichen Bedeutung der gedächtnismäßigen Aneignung aller Grundaufgabengleichungen werden diesbezüglich regelmäßig zuweilen dramatische Defizite registriert (Gleißberg, Eichler & Seibold, 2024; Hornbach, 2024). Es ist deshalb notwendig, Ursachen dieser ungenügenden Leistungen zu finden.

Ein geeignetes Arbeiten mit Aufgaben ist das Hauptmittel zur geistigen Aktivierung der Kinder und damit zur Realisierung der Ziele des Unterrichts. Im Sinne von Fanghänel (2000) und auch Sullivan, Clarke & Clarke (2013) sind Aufgaben Aufforderungen zum Handeln, die das Kind mit seinem Wissen und Können bewältigen oder als unbewältigbar erfassen kann. Folglich sind die eingesetzten Aufgaben und die Art ihrer Bearbeitung durch die Kinder näher zu betrachten. Vorliegende Studien (van den Ham & Heinze, 2018) zeigen, dass das Aufgabenangebot des eingesetzten Lehrwerkes maßgeblich die Ergebnisse des Unterrichts beeinflusst. Die Bedeutung des Lehrwerkes wird dadurch verstärkt, dass in der Grundschule eine große Anzahl an

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Lehrpersonen (in Baden-Württemberg etwa 60%) ohne Ausbildung im Fach Mathematik den Mathematikunterricht erteilt. Nachfolgend soll deshalb untersucht werden, inwieweit das Aufgabenangebot der Lehrwerke die unbefriedigende gedächtnismäßige Aneignung der Grundaufgabengleichungen verursacht oder zumindest begünstigt.

Methode

Damit Kenntnisse dauerhaft und resistent eingepägt werden, ist es erstens notwendig, den Sinn des Einzuprägenden, hier konkret das Wesen der Gleichung als Begriff (Gleißberg, 2024) zu erfassen. Es ist zweitens unverzichtbar, die Kenntnisse im Prozess des Erarbeitens und Einprägens zu vernetzen. Drittens sind Kinder zur Rekonstruktion vergessener Kenntnisse zu befähigen. Wir analysierten, inwieweit das Aufgabenangebot der Lehrwerke zu Tätigkeiten herausfordert, mit denen diese Ziele erreicht werden. Deshalb analysierten wir die Lehrwerke hinsichtlich folgender Kriterien:

1. Inwieweit werden Kinder angeregt, Terme der Gestalt $a \cdot b$ als Begriffe durch intermodalen Transfer (Bruner, 1964, S. 2) zu festigen?
2. Inwieweit fordern die Aufgaben des Lehrwerkes Kinder heraus, Beziehungen zwischen einzelnen Gleichungen herzustellen und zu nutzen?
3. Inwieweit tragen die Aufgaben des Lehrwerkes dazu bei, Kinder zur Rekonstruktion vergessener Grundaufgabengleichungen zu befähigen.

Zur Beantwortung der Frage 1 klassifizierten wir die Aufgaben der Lehrwerke entsprechend des Frameworks nach Gleißberg & Eichler (2019). Aufgaben werden ausgehend davon, dass Terme Begriffe sind und mit Blick auf die geforderten intermodalen Transfers nach Bruner (1964, S. 2) klassifiziert.

Zur Beantwortung der Frage 2 erfassten wir jene Aufgaben, die der Systematisierung von Termen dienen. Insbesondere untersuchten wir, inwieweit Kinder aktiv zum Herstellen von Zusammenhängen herausgefordert werden.

Zur Beantwortung der Frage 3 analysierten wir, inwieweit Aufgaben der Lehrwerke Kinder zum Bestimmen von Termwerten auf Wegen herausfordern, auf denen Kenntnisse etwa durch Nutzen distributiver Beziehungen oder von Beziehungen zwischen Aufgaben rekonstruiert werden können. Zudem untersuchten wir, inwieweit dieses Rekonstruieren trainiert wird.

Befunde

Unsere Analyse von vier Lehrwerken [Welt der Zahl; Denken und Rechnen; Nussknacker; Fredo] der Klasse 2 für Baden-Württemberg zeigt, dass sinnstiftende Aufgaben zum Festigen von Termen als Begriff mit [329 von 2621 Aufgaben; 280 von 3221 Aufgaben; 321 von 3794 Aufgaben; 168 von 2314

Aufgaben] eine nur geringe Rolle spielen. Unter diesen relativ wenigen Aufgaben dominieren mit [131 Aufgaben; 147 Aufgaben, 139 Aufgaben; 55 Aufgaben] jene zur Identifizierung ausgehend von der ikonischen Ebene.

Das beabsichtigte Identifizieren von Termen kann anders, als von Autor*innen der Lehrwerke beabsichtigt, auch ohne inhaltliches Verständnis des Begriffes „Produkt“ erfolgen: Kinder wissen, dass zwei Zahlen eines Produkts gesucht sind und identifizieren zwei Kardinalzahlen. Zu drei Schalen mit je 5 Äpfeln wird so der Term $3 \cdot 5$ nicht deshalb notiert, weil es „drei Fünfer“ sind, sondern weil die Zahlen 3 und 5 isoliert identifiziert werden.

Im Rahmen des Klassenunterrichts können derart mechanische Arbeitsweisen nur über das Verbalisieren erfasst und korrigiert werden. Aufgaben zur Realisierung des Terms durch ein Bild oder eine Handlung sind wesentlich effizienter, sind aber in den Lehrwerken mit [130 Aufgaben; 46 Aufgaben; 68 Aufgaben; 24 Aufgaben] vergleichsweise deutlich weniger enthalten.

Bezüglich der Frage 2 enthalten alle von uns untersuchten Lehrwerke Aufgaben, in denen Zusammenhänge zwischen Aufgaben eine Rolle spielen. Oft werden, wie in Abbildung 1 zu sehen, zueinander in Zusammenhang stehende Aufgaben untereinander notiert. Diese Anordnung ist von Lehrbuchautor*innen zweifellos gut gemeint, sichert aber nicht das Erfassen der Zusammenhänge zwischen diesen Aufgaben, weil diese auch völlig isoliert voneinander lösbar sind. Nichts hindert Kinder daran, die abgebildeten Aufgaben „zeilenweise“ von links nach rechts zu lösen oder untereinanderstehende Aufgaben ohne bewusstes Nutzen des Zusammenhangs zu bearbeiten.

| | | |
|---------------|---------------|---------------|
| $5 \cdot 6 =$ | $5 \cdot 3 =$ | $5 \cdot 8 =$ |
| $6 \cdot 6 =$ | $6 \cdot 3 =$ | $6 \cdot 8 =$ |

Abb. 1: Aufgabe ohne Anregung zum Vernetzen von Gleichungen

Sinnvoller ist es, wie in Abbildung 2, Kinder selbst zum Konstruieren von Zusammenhängen zwischen Gleichungen aufzufordern. Zu einer vorgegebenen Gleichung sind mit dieser in Zusammenhang stehende Gleichungen zu bilden. Solche Aufgaben treten in Lehrwerken der Klasse 2 derzeit nicht auf.

Jonas hat vergessen, wie viel $6 \cdot 8$ ist.
Schreibe Gleichungen auf, mit denen er sich wieder daran erinnern kann.
Welche anderen Gleichungen kann er dann auch lösen?

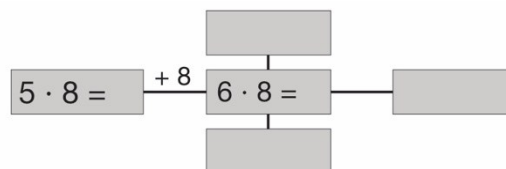


Abb. 2: Aufgabe mit Anregung zum Vernetzen von Gleichungen

Die Antwort auf Frage 3 lautet, dass das Aufgabenangebot aller untersuchten Lehrwerke nicht geeignet ist, Fertigkeiten im Berechnen von Termwerten unter Nutzung distributiver Beziehungen zu entwickeln. Die Gleichungen

werden in den Lehrwerken „Folge für Folge“ erarbeitet und gefestigt. Kinder merken sich rasch und kurzzeitig alle jeweils relevanten Produkte und lösen die Aufgaben, ohne zu rechnen. Werden später Gleichungen vergessen, haben Kinder außer wiederholtem Addieren keine andere Möglichkeit zur Rekonstruktion. Produktiver wäre es, permanent Aufgaben mit einem Faktor größer als 10 zu fordern. Deren Lösen erfordert das Nutzen distributiver Beziehungen, weil die entsprechenden Gleichungen kein Gedächtnisbesitz sind und ein fortgesetztes Addieren von mehr als zehn Summanden ineffizient ist. Solche Aufgaben treten nur in einem der analysierten Lehrwerke (Denken und Rechnen, 27mal) und außer $21 \cdot 6$ nur mit den Faktoren 11 und 12 auf.

Fazit

Wir sehen bei allen vier untersuchten Lehrwerken hinsichtlich jeder der drei untersuchten Fragen beträchtliche Möglichkeiten und Notwendigkeiten zur Verbesserung. Angesichts des großen Einflusses des Lehrwerkes auf die Unterrichtsgestaltung ist die Frage nach einer stärkeren fachdidaktischen Prüfung des Aufgabenangebotes von Lehrwerken bei deren Zulassung geboten.

Literatur

- Bruner, J. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), S. 1–15. <https://doi.org/10.1037/h0044160>
- Fanghänel, G. (2000). Arbeit mit Aufgaben – ein wesentliches Mittel zur Gestaltung modernen Mathematikunterrichts. In L. Engelmann (Hrsg.). *Mathematikunterricht gestalten*. 23–40. PAETEC.
- Gleißberg, S., & Eichler, K.-P. (2019). The offer of tasks to work on multiplication in grades 2 and 3. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Utrecht, Netherlands. <https://hal.science/hal-02400941>
- Gleißberg, S. (2024). Aufgabenangebot von Lehrwerken der Klassen 2 und 3 zur Entwicklung des Operationsverständnisses der Multiplikation. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. WTM.
- Gleißberg, S., Eichler, K.-P., & Seibold, M. (2025). Mastering the basic facts of multiplication and division till the end of grade 3 – selected results of a longitudinal study. (akzeptierter Beitrag zur CERME14)
- Hornbach, J. (2024). *Zur Beherrschung der Multiplikation am Ende der Klasse 4 - Analyse und Bilanz* [Masterarbeit]. Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd.
- Kling, G., & Bay-Williams, J. (2015). Three steps to mastering multiplication facts. *Teaching children mathematics*, 21(9), 548–558.
- Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer. <https://doi.org/s://doi.org/10.1007/978-1-4614-4681-1>
- van den Ham, A.-K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies In Educational Evaluation*, 59, S.133–140. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.07.005>