Johanna HEITZER, RWTH Aachen

Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot im heutigen Analysisunterricht?

Lazare Carnot, Vater von Sadi und Kriegsminister unter Napoleon, schrieb Ende des 18. Jahrhunderts seine *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung*. Darin akzeptiert er eine unvollkommene Form der Gleichheit, um zu einem unfallfreien Umgang mit „dem Unendlichen und dem Nichts in der Mitte“ zu gelangen. Hier soll an einem enaktiv, ikonisch und dann auch symbolisch erfahrbaren Beispiel der Frage nachgegangen werden, ob Carnots Herangehensweise eine Hilfe für die schulische Differentialrechnung „auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs“ (KMK Bildungsstandards Mathematik SekII, 2012, S.22) bieten kann.

1. Einstieg in die Theorie der Änderungsraten

Pustet man einen Luftballon auf, so wird man diesem pro Atemzug etwa die gleiche Volumenzufuhr ΔV erteilen. Der Radius des Luftballons wird dann von Zug zu Zug nicht linear, sondern (von der Elastizitätsänderung der Ballonhaut und der damit abnehmenden Luftkompression abgesehen) nur mit der dritten Wurzel des Volumens wachsen. In welcher Weise müsste man die Luftportionen vergrößern, damit der Radius linear wüchse?

Oder stetiger: Als die Erde noch eine Scheibe mit Käseglockenhaube war, hatte Gott es leicht mit der Sintflut. Für einen gleichförmig steigenden Wasserspiegel brauchte er es auch nur gleichförmig regnen zu lassen. Jetzt, wo die Erde eine Kugel ist, hätte er es schwerer: Mit steigendem Wasserspiegel wüchsen der Radius und damit (quadratisch) die Oberfläche der Kugel. Um trotzdem gleichförmig steigenden Wasserspiegel zu erreichen, müsste er es immer heftiger regnen lassen. Nach welcher Gesetzmäßigkeit?

2. Heutige und gestrige Lehrplanvorgaben

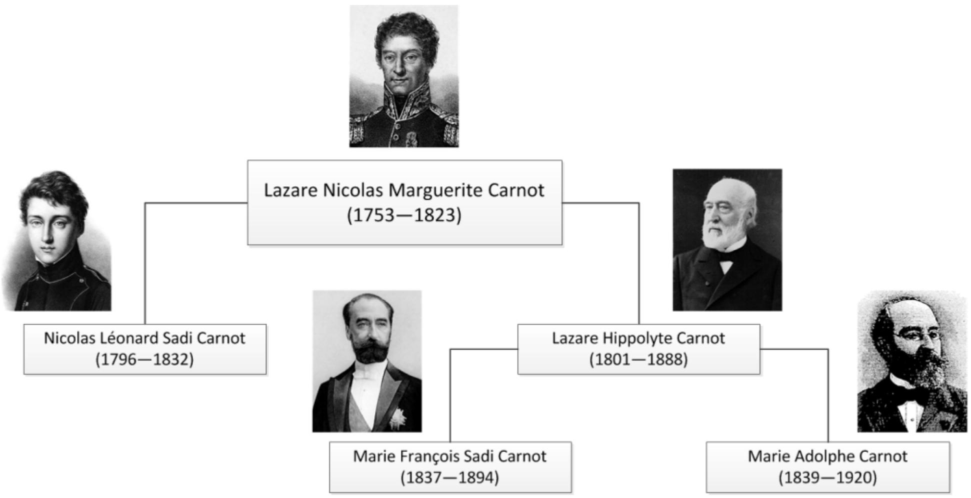
In den KMK Bildungsstandards (s.o.) steht: „Die Schülerinnen und Schüler können Grenzwerte auf der Basis eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen.“ Da lange vor Cauchys exakter Fassung des Grenzwertbegriffs erfolgreich differenziert und integriert wurde, kann man das historisch konsequent nennen. Bezüglich des Unterrichts ist die Entscheidung auf dem Hintergrund einer etwa 200 Jahre alten, wechselreichen Geschichte zu sehen.

Das Für und Wider einer Infinitesimalrechnung in der Schule wurde um 1900 mit Argumenten diskutiert, die bis heute Gültigkeit haben (vgl.

Zeimetz 2009). Eine der Sorgen war, die Lehre verkäme mangels echter Durchdringbarkeit zu einer reinen Kalkülvermittlung. Tatsächlich erfolgte die Darstellung in Schulbüchern ab 1925 (nach Krüger 2012) entweder sorgsam auf geometrische Anschauung gestützt mit viel „graphischem Differenzieren" oder kalkülhaft in Form von Regeln zum „unfallfreien" Umgang mit Differentialen. Dazwischen muss man sich bis heute ebenso entscheiden, wie zwischen Tangentensteigungen (speziell aber vertraut) und Änderungsraten (allgemeiner anwendbar, aber reichlich neu) als Zugang.

Ich persönlich messe dem Kalkülhaften durchaus einen didaktischen Wert bei und befürworte Änderungsraten. Allerdings nur, sofern – gar nicht einfach – deren jeweilige konkrete Bedeutung tatsächlich durchdrungen wird.

3. Ein interessantes Stück Wissenschaftsgeschichte



Etwa mittig zwischen der Begründung der Infinitesimalrechnung und den heutigen Lehrplanvorgaben lebte ein erwähnenswerter Teil der französischen Familie Carnot. Die Carnots waren ebenso einflussreich wie begabt und zumeist sowohl politisch als auch natur- bzw. ingenieurswissenschaftlich interessiert. Nach Marie Adolphe ist ein Mineral benannt (Carnotit), Marie Francois war französicher Staatspräsident (bis er von einem Anarchisten erstochen wurde), ihr gemeinsamer Onkel Sadi Nicolas gilt als Begründer der Thermodynamik. Er fand (vor seinem frühen Choleratod) den Wirkungsgrad der idealen Wärmekraftmaschine, was einen souveränen Umgang mit den Veränderunsbeziehungen diverser kovarianter Größen erfordert. Sadi hatte an der von seinem Vater Lazare mitbegründeten Ècole Polytechnique u.a. bei Poisson und Ampère studiert.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823) war Militärstratege und Kriegsminister unter Napoleon. Um die Jahrhundertwende wandte er sich verstärkt der Mathematik zu; lange Zeit sprach man z.B. vom „Kosinussatz von Carnot“ (*Geometrie der Lage*, 1803). Grundlage dieses Beitrags ist sein o.g. Beitrag zur Infinitesimalrechnung, in dem er auf didaktisch interessante Weise zum Umgang mit Leibniz‘ und Newtons Kalkül anleitet.

4. Infinitesimalrechnung nach Lazare Carnot …

Carnots Theorie lautet in sehr groben Zügen: Zur Lösung mathematisch erfasster Probleme führe man neben „vom Ausdruck der Aufgabe selbst gegebenen“ **Hauptgrößen** so genannte **Hilfsgrößen** ein, die den Vergleich der Hauptgrößen erleichtern und Grenzen haben, „von denen sie sich nur um unendlich kleine Größen unterscheiden“. Man erhält dann „**unvollkommene Gleichungen**“, auf deren Seiten zwar nicht exakt, aber „**im letztem Verhältnis**“ gleiche Ausdrücke stehen. Im letzten Verhältnis gleich (Schreibweise hier: $\overset{\text{ilV}}{=}$) sind Ausdrücke, deren Quotient „der Einheit beliebig nahe kommt“. Dann gelten folgende Sätze:

Eine unvollkommene Gleichung wird durch Ergänzen/Abziehen einer unendlich kleinen Größe entweder richtig oder bleibt unvollkommen (wird aber nicht falsch). Gleichungen, die nur Hauptgrößen enthalten, können nicht unvollkommen sein (sondern nur richtig oder falsch). Eliminiert man aus einer unvollkommenen Gleichung durch Ergänzen/Abziehen unendlich kleiner Größen alle Hilfsgrößen, so ist die resultierende Gleichung richtig.

5. … am Beispiel der Volumenänderungsrate

Hauptgrößen im Ballon-Sintflut-Beispiel sind: der Kugelradius r, das Kugelvolumen V und die vom aktuellen Kugelradius abhängige Änderungsrate V' der Volumenzufuhr, die zu linearer Radiusänderung führt. Da das Krumme schon unverändert schwer zu begreifen ist, gehen wir vor der Veränderungsbetrachtung zu Eckigem über: einem Würfel mit Kantenlänge x, V und V' wie gehabt. Als Hilfsgrößen führen wir eine um beliebig wenig vergrößerte Kantenlänge $\tilde{x}$ und das zugehörige Volumen $\tilde{V}$ ein. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tilde{V} - V = \tilde{x}^3 - x^3 &= [x + (\tilde{x} - x)]^3 - x^3 \\ &= x^3 + 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) + 3x \cdot (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{x} - x)^3 - x^3 \\ &= 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) + 3x \cdot (\tilde{x} - x)^2 + (\tilde{x} - x)^3\end{aligned}$$

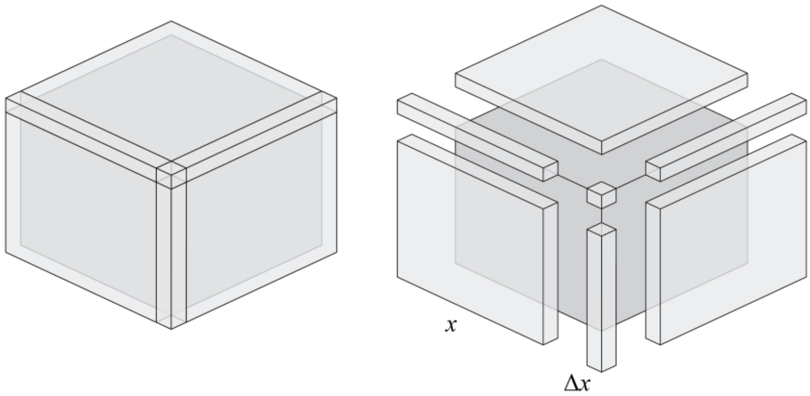
und damit $\quad \tilde{V} - V \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \cdot (\tilde{x} - x) \quad$, ergo $\quad V' \overset{\text{ilV}}{=} \frac{\tilde{V}-V}{\tilde{x}-x} \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2$.

Im vorletzten Schritt wurden (Näherung!) die Potenzen des beliebig Kleinen weggelassen, weshalb nur noch Gleichheit im letzten Verhältnis vorliegt. Dann aber gelingt durch zweierlei ilV-Gleichheit die Elimination der Hilfsgrößen und $V' = 3x^2$ gilt exakt. In etwas vertrauterer Schreibweise:

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3$$
$$= 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

und damit $\Delta V \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2 \Delta x$, ergo $V' \overset{\text{ilV}}{=} \frac{\Delta V}{\Delta x} \overset{\text{ilV}}{=} 3x^2$.

Das wiederum kann man kann man anhand folgender Würfelzerlegung begreifen: Ist Δx relativ zu x hinreichend klein, kann man die „Stäbchen“ und den „Würfelwinzling“ vergessen. Die Volumenänderung entspricht allein den drei quadratischen „Scheiben“, folglich gilt $\Delta V = 3x^2\,\Delta x$.



6. Fazit in Bezug auf den heutigen Analysisunterricht

Natürlich ist besonders Carnots erster Satz über unvollkommene Gleichungen ausgesprochen windig. Aber ist er windiger als das, was Lernenden heute als „h-Methode“ begegnet? Immerhin weist Carnots Sprache einen Weg, sich (in von Neumanns Sinn) an die Dinge zu gewöhnen, die man nicht restlos versteht. Sie bringt zugleich eine pragmatische Anwenderhaltung und ein Staunen über das Wunder der Analysis zum Ausdruck: „Dass und wie es funktioniert ist wichtig, nicht warum. Aber kontrolliertes Pfuschen führt zu exakten Ergebnissen!“

Literatur

Carnot, L.N.M. (1800): Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung, übersetzt von I.K.F. Hauff. Frankfurt am Main: Jägersche Buchhandlung.

Hochstrat, L. (2012): Die Familie Carnot und ihre Beiträge zur Mathematik. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung. RWTH Aachen.

Jahnke, H.N. (1990): Die algebraische Analysis im Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts. In: Der Mathematikunterricht 36(3), 61-74.

Krüger, K. (2012): 100 Jahre Analysisunterricht am Gymnasium – ein Rückblick auf die Meraner Reform. Saarbrücken: Vortrag auf der DMV-Tagung.

Zeimetz, A. (2009): Als die Differential- und Integralrechnung verboten wurde. Soest: Vortrag auf der Herbsttagung des Arbeitskreises MU&I der GDM.