D'ERCHIE, Michael; SCHAAK, Lena & OBERSTEINER, Andreas
München

Lerngelegenheiten zur Ausbildung einer relationalen Sicht auf das Gleichheitszeichen - eine Analyse der syntaktischen Struktur von Gleichungen in Schulbüchern der Primarstufe

Die Fachdidaktik unterscheidet im Wesentlichen zwei Sichtweisen auf das Gleichheitszeichen (z. B. Malle et al., 1993): Die *operationale Sichtweise* interpretiert das Gleichheitszeichen als Aufforderung zum Rechnen, etwa in "5 + 3 = ___". Die *relationale Sichtweise* interpretiert das Gleichheitszeichen als Ausdruck einer Äquivalenzbeziehung zwischen zwei Ausdrücken, was bedeutet, dass beide Seiten einer Gleichung gleichwertig und austauschbar sind, z. B. in "5 + 3 = 4 + 4". Diese Sichtweise betont insbesondere die Symmetrie des Gleichheitszeichens im Sinne einer Äquivalenzrelation.

Spätestens mit dem Übergang von der Arithmetik zur Algebra in der Sekundarstufe wird die relationale Sichtweise zunehmend bedeutender, etwa beim Lösen von Gleichungen wie $2x + 3 = 5 - x$ (z. B. Knuth et al. 2006). Der (frühe) Mathematikunterricht sollte daher sicherstellen, dass Schülerinnen und Schüler das Gleichheitszeichen nicht nur operational, sondern auch relational verstehen. Studien zeigen jedoch, dass Lernende das Gleichheitszeichen oft primär als Operationszeichen wahrnehmen (z. B. Behr et al., 1980; Borromeo Ferri & Blum, 2011; Falkner et al., 1999; Knuth et al., 2006).

Verwendung des Gleichheitszeichens in Schulbüchern

Schulbücher sind eine zentrale Lehr- und Lernressource im (Mathematik-)Unterricht (Valverde et al., 2002). Lehrkräfte nutzen sie zur Vorbereitung und Durchführung ihres Unterrichts (Haggarty & Pepin, 2002). Schülerinnen und Schüler nutzen sie, um Inhalte zusammenzufassen und zu wiederholen, Hausaufgaben zu erledigen oder zur Prüfungsvorbereitung (Fuchs et al., 2014). Ihre Qualität und didaktische Gestaltung kann daher entscheidend dafür sein, wie mathematische Inhalte erfasst und verstanden werden.

Bezüglich des Gleichheitszeichens zeigen Li et al. (2008), dass chinesische Schülerinnen und Schüler das Gleichheitszeichen deutlich häufiger relational auffassen als US-amerikanische Schülerinnen und Schüler. Als mögliche Ursache werden systematische Unterschiede in den verwendeten syntaktischen Strukturen von Gleichungen in den Schulbüchern beider Länder diskutiert: In den USA wird das Gleichheitszeichen vorwiegend operational im Kontext von Rechenoperationen dargestellt (McNeil et al., 2006), während es in chinesischen Schulbüchern primär als Symbol zum Ausdruck von Gleichheit oder Äquivalenz in Vergleichsaufgaben eingeführt wird.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Die Literatur unterscheidet im Zusammenhang mit dem Verständnis des Gleichheitszeichens mindestens vier grundlegende syntaktische Strukturen von Gleichungen (z. B. Behr et al., 1980; McNeil et al., 2006; Rittle-Johnson et al., 2011; Bezeichnungen leicht modifiziert): die *operation-equals-results* Struktur (OER; z. B. 3 + 5 = 8), die *results-equals-operation* Struktur (REO; z. B. 8 = 3 + 5), die *operation-equals-operation* Struktur (OEO; z. B. 2 + 6 = 4 + 4) und die *number-equals-number* Struktur (NEN; z. B.: 7 = 7). Während vor allem die OER- und REO-Struktur eine operationale Sichtweise auf das Gleichheitszeichen nahelegen, verlangen die OEO- und die NEN-Struktur eher eine relationale Sicht. Um eine relationale Sichtweise zu entwickeln, wäre es somit wünschenswert, dass Grundschulkinder auch den beiden letztgenannten Strukturen in Schulbüchen begegnen.

Ziel der Studie

Die vorliegende Schulbuchanalyse untersucht die syntaktischen Strukturen von Gleichungen in Schulbüchern der Primarstufe, um abzuleiten, inwieweit Schulbücher im deutschsprachigen Raum Lerngelegenheiten zur Ausbildung einer relationalen Sicht auf das Gleichheitszeichen bieten. Dazu werden die folgenden Forschungsfragen adressiert:

- In welchem Umfang und wie wird das Gleichheitszeichen in Schulbüchern definiert oder erläutert?
- Welche relativen Häufigkeiten zeigen sich für die verwendeten syntaktischen Strukturen insgesamt sowie in den einzelnen Jahrgangsstufen?

Methode

Für die Analyse wurden die neuesten Ausgaben von fünf zugelassenen bayerischen Schulbuchreihen (Jahrgangsstufen 1 bis 4) untersucht: *Fredo*, *Denken und Rechnen*, *Das Zahlenbuch*, *Nussknacker* und *Zahlenzauber*. Zusatzmaterialien wie elektronisch verfügbare Aufgaben, Themen- oder Förderhefte wurden nicht berücksichtigt. Alle Schulbücher werden wie Arbeitshefte genutzt und sind somit Verbrauchsmaterialien.

Neben möglichen Definitionen oder Erklärungen zum Gleichheitszeichen wurden nur Aufgaben (keine einzelnen Teilaufgaben) kodiert, in denen das Gleichheitszeichen explizit vorkommt und die syntaktische Struktur eindeutig erkennbar ist. Aufgaben wie „Berechne: 5 + 7“ wurden somit nicht kodiert, während Aufgaben wie „Berechne: 5 + 7 = ___“ berücksichtigt wurden. Textaufgaben, bei denen eine Rechnung oder Gleichung selbstständig aufgestellt werden musste, wurden nur kodiert, wenn die erwartete syntaktische Struktur der aufzustellenden Gleichung vorgegeben war. Mehrfachkodierungen waren möglich, etwa wenn eine Aufgabe mehrere syntaktische

Strukturen enthielt. Die vorkommenden syntaktischen Strukturen wurden nach den Kategorien OER, REO, OEO oder NEN kodiert.

Ergebnisse

Insgesamt wurden 2279 Lerngelegenheiten (Definitionen, Erklärungen oder Aufgaben) identifiziert (Fredo: 412, Denken und Rechnen: 538, Das Zahlenbuch: 469, Nussknacker: 443, Zahlenzauber: 417).

In den 20 Schulbüchern finden sich 21 Erklärungen zum Gleichheitszeichen, meist die korrekte Aussprache betreffend, wie in Fredo 1 (S. 27): "So sprechen Mathematiker: 3 ist gleich 3. So schreiben Mathematiker: 3 = 3". Einige Definitionen fördern eine relationale Sichtweise, etwa "Bei einer Gleichung steht auf jeder Seite des Gleichheitszeichens der gleiche Wert." (Fredo 4, S. 14), während andere eine operationale Sichtweise betonen, z. B. "5 - 2 = 3; 5 minus 2 ist gleich 3; 3 ist das Ergebnis." (Welt der Zahl 1, S. 46).

Tabelle 1 zeigt die relativen Häufigkeiten der syntaktischen Strukturen insgesamt und nach Jahrgangsstufen. Signifikante Unterschiede zeigen sich zwischen Schulbüchern ($p < .001$) und Jahrgangsstufen ($p < .001$).

	OER	REO	OEO	NEN	Andere
Gesamt	84,3 %	6,3 %	2,4 %	8,2 %	1,8 %
Jahrgangsstufe 1	85,3 %	6,6 %	3,5 %	3,3 %	0,1 %
Jahrgangsstufe 2	87,0 %	7,1 %	2,5 %	2,9 %	1,0 %
Jahrgangsstufe 3	77,3 %	6,3 %	1,3 %	14,4 %	2,8 %
Jahrgangsstufe 4	78,2 %	4,8 %	2,3 %	15,4 %	3,0 %

Tabelle 1: Relative Häufigkeiten vorkommender syntaktischer Strukturen

Diskussion

Die Schulbuchanalyse zeigt, dass Grundschulbücher kaum Gelegenheiten bieten, das Gleichheitszeichen als Relationszeichen zu verstehen. In etwa 90 % der Fälle werden Gleichungen in der OER- oder REO-Struktur dargestellt, die beide eine operationale Sichtweise nahelegen. Diese Dominanz war zu einem gewissen Grad zu erwarten und spiegelt den Fokus der Primarstufe auf die Grundrechenarten und die Entwicklung und Automatisierung von Rechenfertigkeiten wider. Angesichts der Bedeutung einer relationalen Sichtweise des Gleichheitszeichens für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe wäre jedoch eine größere Variabilität der vorkommenden syntaktischen Strukturen in Schulbüchern der Primarstufe wünschenswert gewesen.

Zwar ist ab der dritten Jahrgangsstufe ein Anstieg der NEN-Struktur zu beobachten (v. a. bedingt durch Umrechnungsaufgaben wie 1 kg = ____ g),

dennoch bleiben syntaktische Strukturen, die eine operationale Sichtweise begünstigen, mit einem Anteil von über 80 % auch weiterhin dominant.

Ähnliche Verteilungen zeigen sich auch im internationalen Vergleich: McNeil et al. (2006) fanden in US-amerikanischen Schulbüchern in 24 % bis 70 % der Aufgaben OER-Strukturen und in 0 % bis 8 % OEO-Strukturen. Diese Ergebnisse wurden als problematisch bewertet, da sie nachweislich mit einer überwiegend operationalen Interpretation des Gleichheitszeichens durch die Schülerinnen und Schüler einhergehen.

Literatur

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How Children View the Equals Sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-16.

Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011): Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 127 – 130.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*, 232-236.

Fuchs, E., Niehaus, I., & Stoletzki, A. (2014). Das Schulbuch in der Forschung. *Analysen und Empfehlungen für die Bildungspraxis*. V & R unipress.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2013). An Investigation of Mathematics Textbooks and their Use in English, French and German Classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567-590. https://doi.org/10.1080/0141192022000005832

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297-312.

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, *26*(2), 195-217. https://doi.org/10.1080/07370000801980845

Malle, G., Wittmann, E. C., & Bürger, H. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-89561-5

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction, 24*(3), 367-385. https://doi.org/10.1207/s1532690xci2403_3

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 85-104. https://doi.org/10.1037/a0021334

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0844-0