Statistische Besonderheiten von Finanzmarktdaten[1]

von Walter Krämer
Fachbereich Statistik, Universität Dortmund
D-44221 Dortmund

Zusammenfassung

Finanzmarktdaten wie Zinsen, Aktien- oder Wechselkurse und andere spekulative Preise setzen sich durch verschiedene Besonderheiten von sonstigen ökonomischen Zeitreihendaten ab. Dieser Artikel untersucht die Konsequenzen dieser Besonderheiten für die rationale Bewertung von Finanzinstrumenten und für verschiedene, in finanzwirtschaftlichen Anwendungen angewandte statistische Schätzungen und Tests.

---

[1] Gefördert durch die DFG über die Schwerpunktprogramme "Empirische Kapitalmarktforschung" und "Effiziente Gestaltung von Finanzmärkten und Finanzinstitutionen", über die Dortmunder Graduiertenkollegs "Angewandte Statistik" und "Allokationstheorie,Wirtschaftspolitik und kollektive Entscheidungen", sowie über den Sonderforschungsbereich 475: Komplexitätsreduktion in Multivariaten Datenstrukturen. Ich danke meinen Doktoranden und Mitarbeitern Ingolf Dittmann, Christian Kleiber, Ralf Runde, Olaf Schoffer und Philipp Sibbertsen für vielfältige Unterstützung.

1. Einleitung

Was unterscheidet die Zeitreihen der Aktienkurse von Daimler-Benz von einer Zeitreihe eines Pegelstands am Rhein? Oder den DM-Dollar-Wechselkurs von den Preisen für Benzin? Oder den Libor von dem Außenhandelsdefizit von Bangladesh?

Wenn im folgenden von Finanzmarktdaten die Rede ist, sind damit vor allem solche Zeitreihen – Zinsen, Aktien- oder Wechselkurse und so fort - gemeint. Insofern greift der Titel dieses Aufsatzes etwas zu weit, denn Querschnittsdaten zu Branchen oder Firmen, wie sie etwa zur Überprüfung des CAPM verwendet werden, oder nominale und ordinale Finanzmarktdaten wie etwa Kreditwürdigkeitsbewertungen (AAA, AA+ usw), die es, wenn auch in abgeminderter Bedeutung, auch noch gibt, bleiben im weiteren außer Betracht, genauso wie die in jüngster Zeit vermehrt beachteten höchstfrequenten, sekündlich oder minütlich erhobenen Handelsdaten, für die inzwischen auch schon eine Vielfalt eigens entworfener Modelle und Methoden vorgeschlagen worden sind (siehe Dunis und Zhou 1998 oder Engle 2000 für eine Übersicht). Vielmehr stehen "Finanzmarktdaten" im weiteren vor allem für äquidistant (täglich, wöchentlich, monatlich) gemessene Zeitreihen, und es wird diskutiert, wie sich solche in finanzwirtschaftlichen Kontexten gemessene Zeitreihen von analogen Zeitreihen aus anderen Wirtschaftssphären unterscheiden.

Der Schwerpunkt der Betrachtung liegt dabei auf den statistischen wie sachlichen Konsequenzen von möglichen Abweichungen von gewissen Standardannahmen wie Stationarität und Normalität, die man üblicherweise in dergleichen Zeitreihenkontexten trifft. Welche Folgen haben unendliche Varianzen für finanzwirtschaftliche Effizienzmarkttests? Welche Aussagen zu Kursprognosen oder zur Optionsbewertung erlauben Phänomene wie langes Gedächtnis, Integration und Kointegration? Wie modelliert man statistisch die Klumpenbildung von absolut großen Kursausschlägen, welche Implikationen für höhere Momente oder Autokorrelationen sind darin enthalten, was sagt uns das bezüglich effizienter Märkte usw.

Dabei zeigt es sich, daß Standard-Schätz- und Testverfahren auf dergleichen Besonderheiten oft "allergisch" reagieren: Signifikanztests ändern ihre Macht und Nullverteilung, Schätzverfahren werden verzerrt oder inkonsistent, Konfidenzintervalle halten ihr Niveau nicht ein, empirische Autokorrelationen konvergieren nicht. In dem Umfang also, wie dergleichen statistische Methoden zum Handwerkszeug der empirisch arbeitenden Kapitalmarktforschung zählen, haben solche Einsichten auch einen Einfluß auf die korrekte Einschätzung des Marktgeschehens selbst. Und verschiedene statistische Erkenntnisse, wie etwa Kointegration von Aktienkursen oder langes Gedächtnis bei höheren Momenten von Renditen, münden auch in konkrete Handlungsempfehlungen für die Akteure am Finanzmarkt ein.

Die weitere Diskussion ist dabei so gegliedert, daß zunächst die für die Ausgangsdaten selber wichtigen Phänomene beleuchtet werden. Schwerpunkte sind hier die Themen Integration und Kointegration. Dann folgt eine statistische Betrachtung von sukzessiven ersten Differenzen dieser Ausgangsdaten (Renditen oder Wachstumsraten) mit Schwerpunkt auf den Themen "schwere Ränder", "langes Gedächtnis" und "Volatilität", wobei sich zeigt, daß die seit langem bekannte Klumpenbildung und Nichtnormalität von Kapitalmarktrenditen sogar noch weitreichendere Folgen hat, als bisher bereits bekannt.

2. Integration und Kointegration

Sei x_t eine zu äquidistanten Zeitpunkten erhobene Finanzzeitreihe (Goldpreis, Aktien- oder Wechselkurs, Rendite eines festverzinslichen Wertpapiers). In aller Regel ist x_t nicht als stationäre Folge modellierbar; vielmehr folgt x_t oft einem I(1)-Prozeß mit (möglicherweise) positiver Drift:

(1) $x_t = \delta + x_{t-1} + u_t \qquad (\delta \geq 0,\ t = 1,...T).$

Dabei ist u_t ein stationärer Prozeß mit endlicher und positiver Spektraldichte an der Stelle 0 (im weiteren kurz $u_t \sim I(0)$); die Positivität der Spektraldichte garantiert, daß durch Kumulieren (= Integrieren) von

(2) $\Delta x_t := x_t - x_{t-1} = \delta + u_t$

nicht wieder ein stationärer Prozess entsteht. Die Endlichkeit der Spektraldichte garantiert, daß u_t kein Prozeß mit langem Gedächtnis, und damit x_t kein I(1)-Prozeß mehr ist.

Ist u_t weißes Rauschen, folgt x_t einem Random Walk. Ist u_t ein allgemeiner stationärer ARMA-Prozeß, so ist x_t ein ARIMA-Prozeß, d.h. ein ARMA-Prozeß, dessen charakteristisches Polynom eine Nullstelle bei 1 besitzt. Deshalb heißen Tests der I(1)-Eigenschaft von Zeitreihen auch Einheitswurzeltests.

In der Praxis ist x_t zur Erzeugung eines I(1)-Prozesses oft noch zu logarithmieren. Ob oder ob nicht das nötig ist, bestimmt meist der Sachzusammenhang. So ist es aus der Sache klar, daß bei (prospektiv oder retrograd bereinigten) Aktienkursen nicht x_t selbst, sondern allenfalls $y_t = \ln(x_t)$ als I(1)-Prozeß modellierbar ist (sogar als Random Walk, denn in einem effizienten Markt sind die Renditen $\ln(x_t/x_{t-1}) = y_t - y_{t-1}$ seriell nicht korreliert). Zur Illustration zeigt Abb. 1 den retrograd bereinigten täglichen Aktienkurs von BMW vom 4. 1. 1980 bis 30. 4. 1998 und Abb. 2 den logarithmierten Aktienkurs - schon vom bloßen Hinsehen ist klar, daß nicht der Kurs selbst, sondern allenfalls der logarithmierte Kurs einem Random Walk (mit Drift) zu folgen scheint.

Auch bei Wechselkursen gibt es theoretische Gründe (siehe unten), falls überhaupt, nicht die Kurse selbst, sondern die logarithmierten Kurse als I(1)-Prozesse abzubilden.

Ist die Entscheidung zwischen x_t und $\ln(x_t)$ aber nicht so klar, treten eine Reihe von bislang vernachlässigten Problemen auf, die bei der Anwendung der weiter unten beschriebenen Einheitswurzeltests auf fehlspezifizierte Reihen entstehen (Granger und Hallmann 1991, Franses und Koop 1998). So weisen Krämer/Davies (2000) nach, daß fälschlich logarithmierte Zeitreihen sogar noch

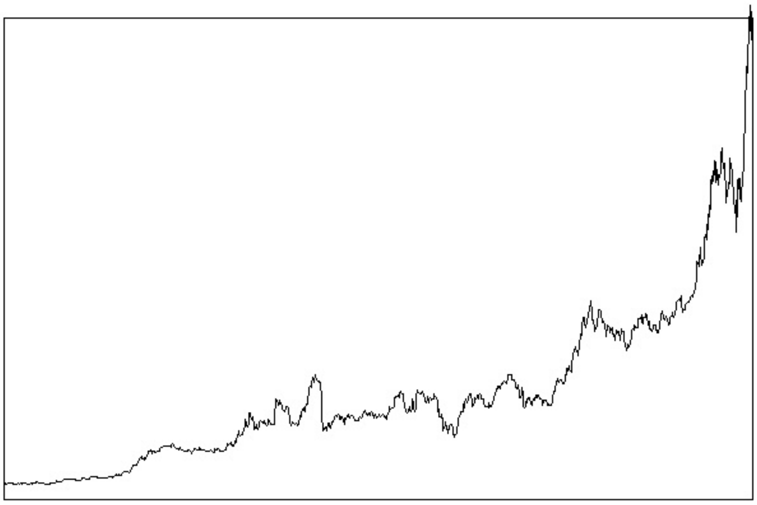

Abb. 1: Ein typischer Zeitverlauf für einen (bereinigten) Aktienkurs:
Nur schwer als Random Walk mit Drift zu modellieren

Abb. 2: Die gleiche Zeitreihe in Logarithmen

häufiger als I(1) erkannt werden als die korrekten I(1)-Zeitreihen selbst, was etwa das Phänomen erklärt, daß Einheitswurzeln in der die ganze ökonomische Einheitswurzeldiskussion lostretenden fundamentalen Arbeit von Nelson und Plosser (1982) vor allem in logarithmierten Reihen aufgefunden worden sind; dies ist möglicherweise nur ein Artefakt einer Unterreaktion von Einheitswurzeltests (in dem Sinn, daß eine korrekte Nullhypothese "Der zugrundeliegende Prozeß ist ein I(1)-Prozeß" bei logarithmierten Reihen noch seltener abgelehnt wird als bei den Ausgangsreihen selbst; siehe dazu auch Franses und McAleer 1998).

Das Bild wird differenzierter, wenn die logarithmierten Reihen einem I(1)-Prozeß folgen, die Einheitswurzeltest aber auf die Ausgangsreihen angewendet werden. Anders als etwa in Granger und Hallman (1991) nachzulesen, kann die Ablehnwahrscheinlichkeit einer korrekten Nullhypothese das Signifikanzniveau jetzt sowohl über- als auch unterschreiten. Tabelle 1, aus Krämer und Davies (2000), zeigt beispielhaft einige Ablehnraten des Standard-Dickey-Fuller Tests. Es erweist sich, daß diese Ablehnraten von der Stichprobengröße und von der Varianz σ^2 der u_t's abhängen und zwischen 0% und 100% variieren, so daß sich als Rat für Anwender ergibt, die Entscheidung "Logarithmieren ja oder nein?" bei Einheitswurzeltests nicht auf die leichte Schulter zu nehmen: wenn man sich hier vergreift, kann leicht eine existierende Einheitswurzel übersehen als auch eine nicht existierende zu Unrecht als gegeben angenommen werden.

Diese Probleme seien aber im weiteren ignoriert, und der I(1)-Kandidat sei o.B.d.A. die Zeitreihe x_t. Die Nullhypothese: "Die zugrundeliegende Reihe ist ein I(1)-Prozeß" ist dann äquivalent zu $H_0 : \gamma = 1$ in

$$x_t = \delta + \gamma x_{t-1} + u_t, \tag{3}$$

und damit haben wir das erste, seit Dickey/Fuller (1979) intensiv untersuchte statistische Non-Standard-Problem. Denn der zuständige t-Test mit Prüfgröße

$$\tau = \frac{\hat{\gamma} - 1}{\hat{\sigma}(\hat{\gamma})} \tag{4}$$

(dabei ist $\hat{\gamma}$ die Kleinst-Quadrate-Schätzung für γ in (3), und $\hat{\sigma}(\hat{\gamma})$ ist deren geschätzte Standardabweichung, so wie sie sich mittels der üblichen KQ-Formel ergibt) hat auch asymptotisch i.a. keine t-Verteilung.

Die korrekte Grenzverteilung für $T \to \infty$ und damit auch die korrekte Wahl der Signifikanzpunkte hängt vom Driftparameter δ (und davon, ob er in die Schätzung einbezogen wird) und von der Korrelationsstruktur der u_t ab; für autokorrelierte u_t

ist entweder die rechte Seite von (3) durch weitere Regressoren $x_{t-1} - x_{t-2}$, $x_{t-2} - x_{t-3}$ usw. zu ergänzen (der "Augmented Dickey- Fuller-Test"), oder die Prüfgröße τ in

Tabelle 1: Empirische Ablehnwahrscheinlichkeiten (bei einem Niveau von 5%) des Standard Dickey-Fuller-Tests bei einem Random Walk in den Logarithmen

T	σ^2			
	0,01	0,1	1	10
	a) keine Drift ($\delta = 0$)			
25	0	2	36	59
50	0	26	88	93
100	0	78	97	99
200	0	95	97	97
400	2	96	98	98
800	11	98	93	99
1600	47	100	99	99
	b) $\delta = 0{,}1$			
25	0	1	24	84
50	0	16	74	95
100	0	54	91	91
200	0	67	84	94
400	0	76	89	89
800	0	74	87	96
1600	0	76	89	89

(4) ist durch einen Korrekturterm gegen die Konsequenzen der Korrelation der u_t zu imprägnieren (der Phillips-Perron-Test). Diese Varianten und die zugehörigen Signifikanzpunkte sind sehr ausführlich im Hamilton (1994, Kap. 17 und Tabelle B5 bis B9) beschrieben.

Wichtiger als Integration ist aber in Finanzkontexten das Phänomen der *Kointegration*. Ein Vektor $x_{t1}, ..., x_{tn}$ von Finanzzeitreihen heißt dabei kointegriert, wenn gilt:

(i) alle x_{ti} (i=1,...,n) sind integriert, ($x_{ti} \sim I(1)$) und

(ii) es gibt mindestens eine nichttriviale Linearkombination
$c_1 x_{t1} + ... + c_n x_{t2} = c' x_t$ mit $c'x_t \sim I(0)$.

Falls mehrere linear unabhängige c-Vektoren existieren, die einen Vektor integrierter Zeitreihen zu einem stationären Vektor machen, heißt deren Anzahl auch "Kointegrationsrang" des Systems.

Eine wichtige Konsequenz von Kointegration ist die Granger-Fehlerkorrekturdarstellung (Engle und Granger 1987)

$$(5) \qquad \Delta x_t = c' x_t + \sum_{i=1}^{m} \Delta x_{t-1} + \eta_t$$

mit einem stationären Prozeß η_t. Im Kontext von Aktienkursen, mit $y_t = \ln(x_t)$ und $\Delta y_t = \ln(y_t) - \ln(y_{t-1}) = \ln(x_t/x_{t-1})$ als zeitstetiger Rendite läuft Kointegration damit auf die Vorhersagbarkeit von Renditen und die Verletzung der Effizienzmarkthypothese heraus (Der Ausdruck "Fehlerkorrekturdarstellung" rührt daher, daß die Linearkombination $c'x_t$ der Ausgangsvariablen in vielen Anwendungen als Gleichgewichtsbeziehung interpretiert werden kann: bei einer Verletzung dieser Gleichgewichtsbeziehung, d.h. bei $c'x_t \neq 0$, bewirkt die Gleichung (5) eine Rückkehr zu diesem Gleichgewicht).

Krämer (1999) testet die Hypothese $H_{0:}$ "Keine Kointegration" anhand der Kurse der deutschen Großchemie. Wie in Abb. 3 zu sehen, bleiben deren (logarithmierte) Kurse (wie beispielhaft für BASF und Bayer; die zusätzliche Aufnahme von Hoechst würde das Bild überladen) eng beieinander, was auf einen Kointegrationsvektor c= (-1,1,0)' zu deuten scheint. Auch Streudiagramme (Abb. 4) bestärken diese Kontegrationsbeziehung, die sich, wie in Krämer (1999, Tabellen 7 und 8) gezeigt, auch für Überrenditen auszunutzen lassen scheint.

Weitere finanzwirtschaftliche Anwendungen findet die Kointegrationstheorie bei der Modellierung und Prognose von Wechselkursen und bei der Erklärung der Zinsstruktur. Unterstellt man etwa die Kaufkraftparitätentheorie, d.h.

(6) Inlandpreisnveau $\approx$ Wechselkurs x Auslandpreisniveau,

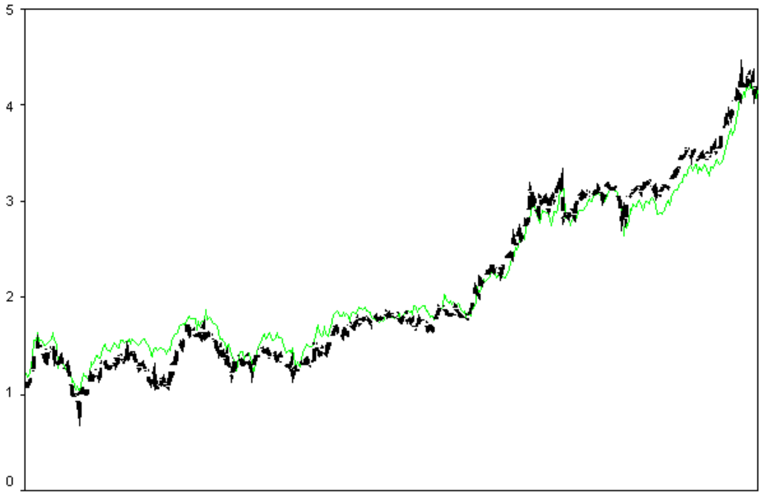

Abb. 3: Logarithmierte Aktienkurse von Bayer und BASF von Anfang 1960 bis Ende 1997: Die Reihen bleiben eng beieinander

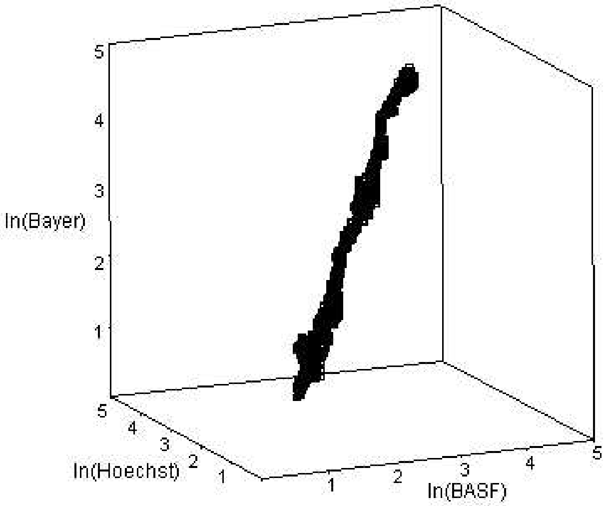

Abb. 4: Drei-D-Darstellung der logarithmierten Aktienkurse der deutschen Großchemie, Anfang 1960 bis Ende 1997

so erhält man nach Logarithmieren

(7) ln(Inlandpreisnveau) $\approx$ ln(Wechselkurs) + ln(Auslandpreisnveau).

Dabei steht "$\approx$" für: "weicht nicht allzusehr voneinander ab", oder formal: die Differenz folgt einem I(0)- Prozeß. Wenn man daher weiter unterstellt (wofür es gute sachbezogenen Gründe gibt; siehe Cheung und Lai 1993), daß die Variablen in (7) integrierte stochastische Prozesse sind, so läuft die Kaufkraftparitätentheorie gerade auf die Kointegration der beteiligten I(1)-Prozesse hinaus.

Auch in der Theorie der Zinsstruktur ist die Frage "Kointegration ja oder nein" von großer sachlicher Bedeutung. Wenn x_{t1} und x_{t2} als die Renditen für Wertpapiere unterschiedlicher Laufzeiten als I(1)-Prozesse modellierbar sind (anders als bei Aktien- oder Wechselkursen ist diese I(1)-Eigenschaft bei Zinsen allerdings umstritten), so folgt die Kointegration von x_{t1} und x_{t2} aus der Erwartungstheorie der Zinsstruktur, und liefe einer Widerlegung der Kointegration damit auf eine Widerlegung dieser Erwartungstheorie hinaus; siehe Hall et al. (1992).

3. Schwere Ränder

Die weiteren stilisierten Fakten zu Finanzmarktdaten betreffen nicht die Preise oder Kurse selbst, sondern die zugehörigen Renditen, ersten Differenzen oder Wachstumsraten. Deren Verteilung zeichnet sich insbesondere durch eine im Vergleich zur Normalverteilung stärkere Besetzung der Ränder und des Zentrums der Verteilung aus (exzessive Kurtosis: der Quotient "zentrales viertes Moment geteilt durch Quadrat der Varianz", mit einem Wert von 3 bei der Normalverteilung, ist bei Kapitalmarktrenditen in aller Regel größer als 3).

Abb. 5 zeigt beispielhaft ein Histogramm von 9590 täglichen zeitstetigen Deutsche-Bank-Renditen, zusammen mit einer Normalverteilungsdichte von gleichem Mittelwert und gleicher Standardabweichung. Sowohl in der Mitte – deutlich zu sehen – als auch an den Rändern – weniger deutlich – liegen die Klassenhäufigkeiten über den Werten, die bei Normalverteilung zu erwarten wären.

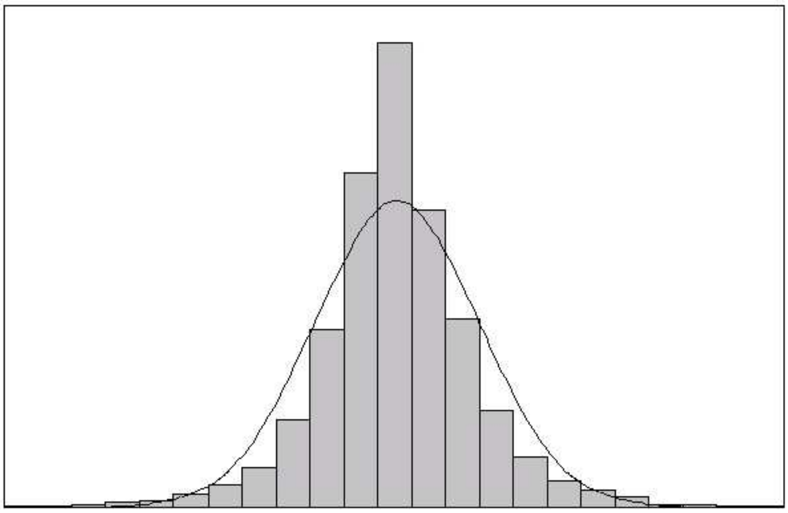

Abb. 5: Ein typisches Histogramm von Kapitalmarktrenditen: 9590 tägliche Aktienrenditen für die Deutsche Bank

Noch offen ist bei solchen Diagrammen, mit welcher Normalverteilungsdichte die Renditen am besten verglichen werden sollten, und ob es vor allem die exzessive Masse in der Mitte oder die exzessive Masse an den Rändern ist, die Kapitalmarktrenditen von normalverteilten Zufallsvariablen unterscheidet (Krämer/Runde 1999). In Abb. 5 z. B. wurde eine Normalverteilungsdichte durch das Histogramm gelegt, deren Erwartungswert und Standardabweichung gerade denen der in dem Histogramm abgebildeten Renditen entsprechen. Das ist aber nicht die einzig sinnvolle und oft sogar eine in gewissem Sinne irreführende Vorgehenssweise. Haben z.B. die Renditen eine unendliche Varianz (dazu weiter unten mehr), so konvergiert die Stichprobenvarianz gegen ∞, und die durch dergleichen Diagramme hindurchgelegte Normalverteilungskurve wird mit wachsender Stichprobe immer flacher; der optische Vergleich von Normalverteilungskurve und Renditehistogrammen wird damit zu einem Artefakt der Stichprobengröße und asymptotisch bedeutungslos (da sich die angepaßte Normalverteilungskurve der waagerechten Achse nähert). Deshalb schlagen Krämer und Runde (1999) die Gleichsetzung von geeigneten Interquantilsabständen vor, um eine Normalverteilung an die empirischen Renditen anzupassen.

Ob oder ob nicht die Ränder der Verteilungen von Kapitalmarktrenditen tatsächlich so schwer sind, daß die Varianz unendlich wird, ist eine weitere, seit Mandelbrot (1963) und Fama (1995) heftig diskutierte Frage. Im Kontext von Renditen R_t mit hyperbolisch abfallenden Randwahrscheinlichkeiten, d.h.

$$(8) \qquad P(|R_t| > c) \sim \frac{1}{c^{\alpha}}$$

läuft dies auf die Entscheidung $\alpha \geq 2$ oder $\alpha < 2$ hinaus: Für $\alpha > 2$ existiert die theoretische Varianz, für $\alpha \leq 2$ existiert sie nicht (Aus offensichtlichen Gründen heißt α auch "kritischer Exponent").

Vor allem der Fall nichtexistierender Varianzen, und dabei wiederum der Fall stabil verteilter Renditen, hat seit den Pionierarbeiten von Mandelbrot (1963) und Fama (1965) heftige Debatten ausgelöst. Siehe Mittnik und Rachev (1993) für einen Überblick. Für stabil verteilte Renditen scheint dabei zu sprechen, daß Summen unabhängiger, identisch stabil verteilter Zufallsvariablen per definitionem (denn genau diese Vererbungseigenschaft zeichnet stabil verteilte Zufallsvariable aus) wieder die gleiche stabile Verteilung, nur mit anderem Skalenparameter, besitzen wie die einzelnen Summanden selbst. Und da bei zeitsteitiger Betrachtung eine Wochenrendite gerade die Summe der Tagesrenditen ist, und auch die funktionale Verteilungsform von Wochenrenditen, von einem Skalenfaktor abgesehen, derjenigen der Tagesrenditen gleicht, bieten sich stabile Verteilungen, mit dem Spezialfall der Normalverteilung, in der Tat für die Modellierung von Kapitalmarktrenditen an.

Allerdings ändern sich bei stabil verteilten Renditen die stochastischen Eigenschaften vieler statistischer Schätz- und Testverfahren. So zeigen Krämer/Runde (1991, 1996), daß die oft zur Überprüfung der seriellen Unkorreliertheit von Kapitalmarktrenditen herangezogenen empirischen Autokorrelationskoeffizienten

$$(9) \qquad r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \overline{R}\right)\left(R_{t+k} - \overline{R}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - \overline{R}\right)^2}$$

mit der im Standardfall und bei serieller Unabhängigkeit bekannten Eigenschaft

(10) $\sqrt{T}r_k \to N(0,1)$ für $T \to \infty$,

für $\alpha < 2$ keine asymptotische Normalverteilung mehr besitzen und auch anders zu standardisieren sind:

(11) $(T/\ln(T))^{1/\alpha}\ r_k \ \to\ S(\alpha)/S(\alpha/2)$.

Dabei sind $S(\alpha)$ und $S(\alpha/2)$ unabhängig stabil verteilte Zufallsvariable mit charakteristischem Exponenten α bzw $\alpha/2$. Sowohl die Prüfgröße selbst als auch deren kritische Werte hängen damit von dem zusätzlichen und aus den Daten zu schätzenden Parameter α ab; eine Tabelle ausgewählter kritischer Werte findet sich in Krämer und Runde (1991).

Auch die Box-Pierce-Statistik

(12) $T\left(\sum_{k=1}^{m} r_k^2\right)$

die zur simultanen Überprüfung mehrerer Autokorrelationskoeffizienten dient, hat für $\alpha < 2$ nicht mehr ihre übliche χ^2-Grenzverteilung (Runde 1997, Krämer und Runde 1998).

Neben Autokorrelationstests sind auch Tests auf Gleichheit von Varianzen (Runde 1997) oder der t-Test von Lagehypothesen für die erwarteten Renditen (etwa Tests auf signifikante Wochentagseffekte) von unendlichen Renditevarianzen betroffen. Der Standard-t-Test von H_0 : E(Montagsrendite ≥ 0), mit Prüfgröße "durchschnittliche Montagsrendite geteilt durch geschätzte Standardabweichung der durchschnittlichen Montagsrendite" hat für $\alpha < 2$ nicht mehr die übliche standardnormale, sondern je nach α sogar zweigipflige Grenzverteilung. Abb. 6, aus Krämer und Runde (1996), zeigt beispielhaft die Grenzverteilung der Prüfgröße für verschiedene α's zwischen 1 und 2: wie man sieht, weicht die asymptotische Nullverteilung des t-Tests je nach α doch sehr von der Standardnormalverteilung ab:

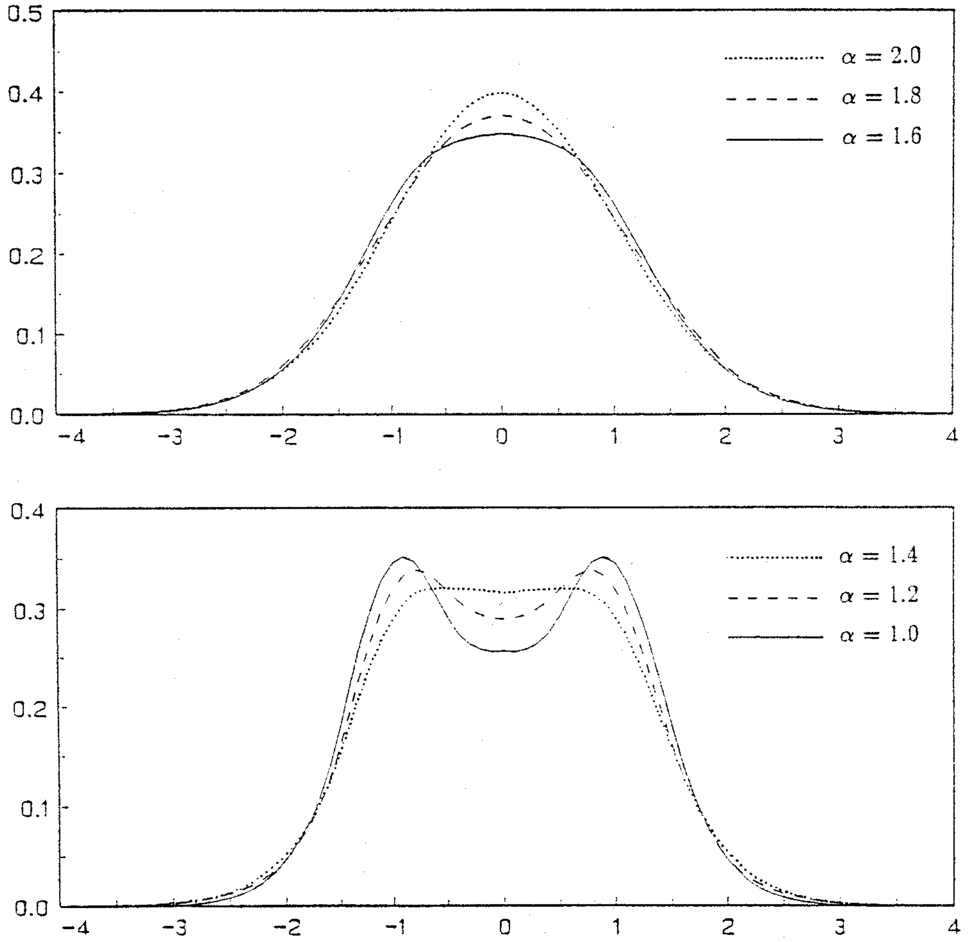

Abb. 6: Asymptotische Gestalt der Dichte des Prüfgröße des t-Tests für Renditen mit unendlicher Varianz

4. Bedingte Heteroskedastie

Ein weiteres, ebenfalls schon von Mandelbrot (1963) bemerktes stilisiertes Faktum von Kapitalmarktrenditen ist das Klumpen absolut gesehen großer Kursausschläge. Abb. 7 zeigt beispielhaft die täglichen Dax-Renditen über die zehn Jahre von Anfang 1985 bis Ende 1994; es ist schon mit dem bloßen Auge nicht zu übersehen, wie sich hohe Kursausschläge in bestimmten Zeitabschnitten häufen.

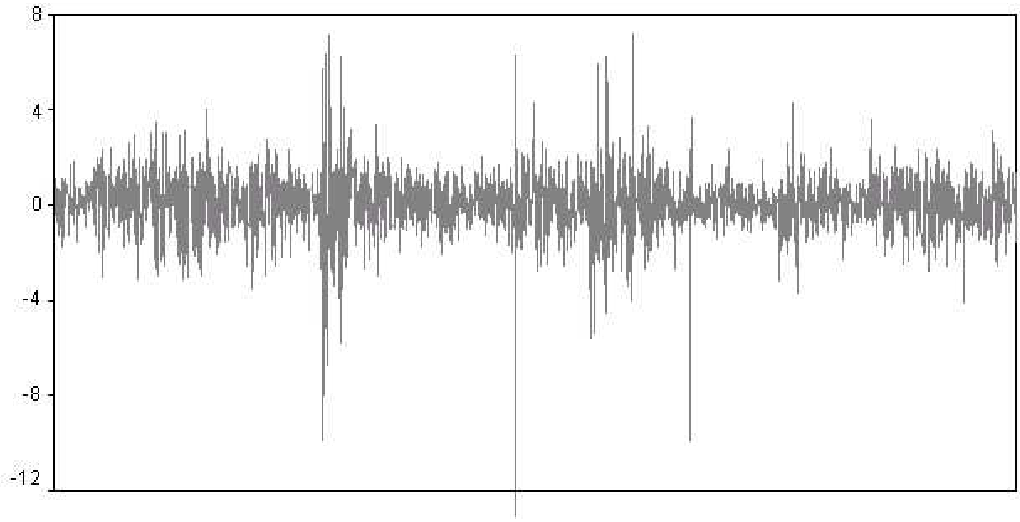

Abb. 7: Tägliche Dax-Renditen von Anfang 1985 bis Ende 1994: Absolut große Kursausschläge treten gern in Klumpen auf.

Ähnliche Muster beobachtet man auch für Änderungsraten von Wechselkursen. Die populärste Erklärung dafür liefern die von Engle (1982) und Bollerslev (1986) eingeführten ARCH- und GARCH-Modelle (für eine Übersicht von Finanzmarktanwendungen siehe Bollerslev et al. 1992), mit

(13) $R_t = z_t \sqrt{h_t}$

(14) $h_t = f\left(R_{t-1}^2, R_{t-2}^2, \ldots, h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots\right)$

und seriell sowie von vergangenem Renditen unabhängigen z_t's mit $E(z_t) = 0$, $Var(z_t) = 1$. Damit ist h_t die bedingte Varianz von R_t, gegeben vergangene Renditen und vergangene bedingte Varianzen, und diese bedingte Varianz hängt von vergangenen Renditen und vergangenen bedingten Varianzen ab.[2]

Der in der Praxis mit Abstand am häufigsten unterstellte Spezialfall ist das GARCH(1,1)-Modell mit

---

[2] Hier ist es wichtig, zwischen Renditen (die im allgemeinen einen Erwartungswert > 0 besitzen, und Überrenditen $R_t^* := R_t - E_{t-1}(R_t)$ zu unterscheiden, die per Konstruktion den Erwartungswert 0 besitzen. Im Kontext von ARCH-Modellen sind mit Renditen (unter Beibehaltung der alten Schreibweise) im weiteren immer Überrenditen gemeint.

(15) $h_t = \omega + \alpha R_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \ (\omega, \alpha, \beta \geq 0)$.

Es hat den Nachteil, daß betragsmäßig große Renditen die künftige Volatilität unabhängig von ihrem Vorzeichen in gleichem Maß erhöhen. Wie aber schon von Black (1976) bemerkt, sollten zumindest bei Aktienrenditen vor allem hohe Kursausschläge nach unten die Volatilität erhöhen: Diese Kursausschläge nach unten vermindern den Gesamtwert einer Firma (im Sinn der geeignet diskontierten erwarteten künftigen Zahlungsströme, die den Eigentümern und Fremdkapitalgebern zustehen); dieser Wertverfall betrifft das Eigenkapital in aller Regel stärker als das Fremdkapital, d.h. der Anteil des Eigenkapitals nimmt ab. Da aber identische prozentuale Änderungen des Gesamtwertes der Firma den Wert des Eigenkapitals ceteris paribus umso stärker berühren, je kleiner dessen Anteil am gesamten Kapitel, nimmt die Volatilität des Aktienkurses zu.

Daher sind in jüngster Zeit vermehrt Varianten von GARCH-Modellen vorgeschlagen worden, die solche Asymmetrien zulassen, wie die EGARCH-Modelle (=exponential GARCH) von Nelson (1991) oder die asymmetrischen Power-ARCH- (A-PARCH-) Modelle von Ding et al. (1993), in denen die Funktion f( ) aus (14) die folgende Form besitzt:

(16) $$h_t^q = \omega + \alpha\left(\left|R_{t-1}\right| - \theta R_{t-1}\right)^{2q} + \beta h_{t-1}^q \ .$$

Ist der Hebel-Parameter $\theta = 0$, haben positive und negative Kursausschläge identische Auswirkungen auf bedingte Varianzen. Für $\theta > 0$ dagegen ist die bedingte Varianz bei negativen Kursausschlägen höher. Und für $\theta = 0$, $q = 1$ läuft das A-PARCH(1,1)-Modell in (16) gerade auf das GARCH(1,1)-Modell in (15) hinaus.

Sowohl das GARCH(1,1)- wie auch das A-PARCH(1,1) Modell lassen sich auf offensichtliche Weise derart verallgemeinern, daß auf der rechten Seite von (15) bzw. (16) mehr als eine verzögerte quadrierte Rendite und verzögerte bedingte Varianz erscheint.

In einer aktuellen Studie überprüft Schoffer (2000), ob es wirklich die von Black und anderen vermutete Hebelwirkung ist, die hinter der Asymmetrie von ARCH-Modellen steckt. Falls ja, sollte diese vor allem bei Aktienkursen, nicht jedoch bei Wechselkursen zu finden sein, wo das Hebelargument nicht greift. Schoffer testet daher die Hypothese $H_0 : \theta = 0$ sowohl für Aktien wie für Wechselkurse: Für Aktienkurse wird die Hypothese abgelehnt, für Wechselkurse nicht (Tabelle 2). Außerdem ist das Schwarz-Bayes-Informationskriterium

(17) $\quad \text{SBC} = -\ 2\log\text{-Likelihood} + \text{Anzahl Parameter} \times \ln(T)$

in Modellen mit a-priori nullgesetztem θ bei Aktienkursen kleiner, bei Wechselkursen aber größer.

Tabelle 2: Werte für die t-Statistik und zugehörige P-Werte des Hebel-Parameters im A-PARCH(1,1)-Modell für verschiedene Aktienkursrenditen und Änderungsraten von Wechselkursen sowie Informationskriterien ("SBC") für Anpassungen mit und ohne Hebel-Parameter (kleinster Wert fett)

Bezeichnung	**t-Statistik**	**P-Wert**	**SBC (mit θ_1)**	**SBC (ohne θ_1)**
DAX	-6.265	<0.0001	**-59011.0**	-58973.8
BAS	-3.944	<0.0001	**-55759.2**	-55751.6
DAI	-5.804	<0.0001	**-53069.9**	-53048.5
RWE	-3.243	0.0006	**-56802.0**	-56801.0
GBPDEM	-2.350	0.0094	-29848.5	**-29850.8**
GBPUSD	-2.474	0.0067	-9760.7	**-9761.9**
JPYUSD	0.853	0.1970	-10345.6	**-10352.1**
SFRDEM	2.306	0.0106	-44842.1	**-44844.8**
USDDEM	0.037	0.4853	-36117.3	**-36125.8**

In den Anwendungen wird in der Regel für die z_t's in (13) eine Standardnormalverteilung unterstellt. Es ist leicht zu sehen, daß dann die Renditen selber in allen Modellen der Form (15) eine Kurtosis von größer als 3 besitzen müssen: Wegen

(18) $E(R_t^2) = E(h_t)$ und (Jensen'sche Ungleichung)

(19) $E(h_t^2) \geq E(h_t)\, E(h_t)$

hat man

(20) $E(R_t^4) = E(z_t^4)\, E(h_t^2) = 3\, E(h_t^2) \geq 3\, [E(h_t)]^2 = 3\, [E(R_t^2)]^2$,

d.h. $E(R_t^4) / [E(R_t^2)]^2 \geq 3$.

Damit schlägt man mit Modellen wie in (13) gleich zwei Fliegen auf einmal: das Klumpen großer Kursausschläge und die im Vergleich zur Normalverteilung schwereren Ränder der Renditeverteilung.

Weniger angenehm sind dagegen die Auswirkungen von GARCH-Effekten auf verschiedene ökonometrische Schätz- und Testverfahren, wie etwa auf die Nullverteilung der empirischen Autokorrelationskoeffizienten aus (9). Wie z.B. in Krämer und Runde (1994) nachgewiesen, ist diese Nullverteilung nicht mehr asymptotisch standardnormal, sondern normal mit einer größeren Varianz als 1 (vorausgesetzt, die vierten Momente der Renditen existieren; bei nichtexistierenden höheren Momenten wird die Verteilungstheorie der empirischen Autokorrelationen sehr viel komplizierter, siehe Davis und Mikosch 1998). Ein in Krämer/Runde (1993) beobachteter empirischer Autokorrelationskoeffizient erster Ordnung für tägliche VW-Renditen von 0.057 ist bei einer Stichprobengröße von T = 3014 nach herkömmlicher Sichtweise hoch signifikant, bei Zulassung von GARCH-Effekten, mit einer geschätzten asymptotischen Varianz von 10,65 für die Grenzverteilung, aber nicht.

Ein weiterer, aktuell intensiv beforschter Fragenkomplex betrifft die numerischen Werte der Koeffizienten α und β in (15) (bzw. die Werte ähnlicher Koeffizienten in ähnlichen Modellen). Es ist leicht zu sehen, daß die Varianz von $R_t = Z_t \sqrt{ht}$ nur für $\alpha + \beta < 1$ existiert; in diesem Fall ist sie gegeben durch

$$(21) \qquad \mathrm{Var}(R_t) = E\left(R_t^2\right) = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} .$$

Außerdem klingen für $\alpha + \beta < 1$ die Autokorrelationen der quadrierten Renditen exponentiell schnell ab.

In empirischen Anwendungen zeigen sich aber immer wieder Werte von $\alpha + \beta$ nahe 1, und empirische Autokovarianzen von quadrierten Renditen, die auch für hohe Zeitabstände nicht verschwinden. Abb. 9 zeigt beispielhaft die empirische Autokorrelationsfunktion von 7980 täglichen quadrierten BMW-Renditen. Es ist klar zu sehen, daß zumindest für die ersten 50 Verzögerungen von einem exponentiellen Abklingen keine Rede ist; auch weit zurückliegende quadrierte Renditen scheinen mit den aktuellen quadrierten Renditen noch hoch zu korrelieren.

Diese Beobachtung leitet über zu einer letzten stilisierten Eigenschaft von Kapitalmarktdaten, dem Phänomen des langen Gedächtnisses, das vor allem höhere Momente von Kapitalmarktrenditen auszuzeichnen scheint.

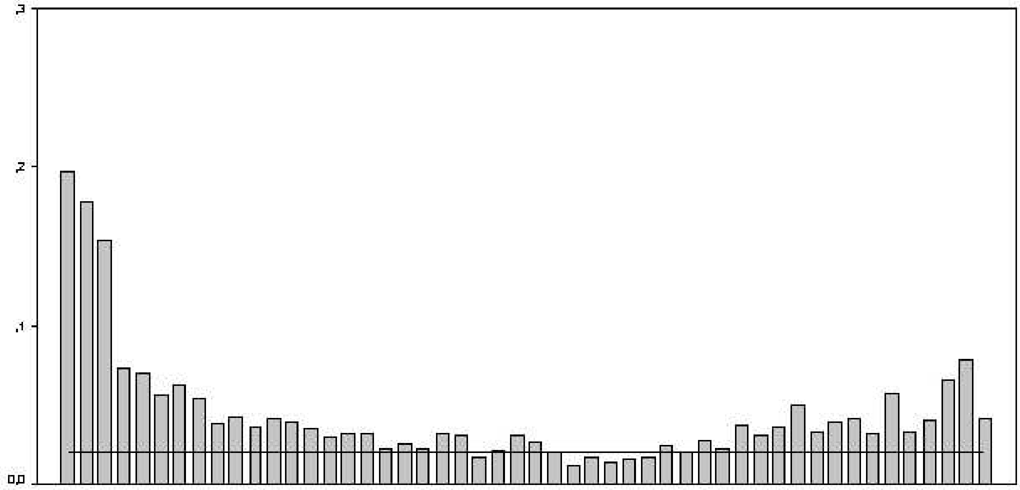

Abb. 9: Empirische Autokorrelationen der Ordnung 1 bis 50 von quadrierten BMW-Renditen

5. Langes Gedächtnis

Eine stationäre Zeitreihe x_t hat langes Gedächtnis, wenn die Autokorrelationsfunktion nicht wie etwa bei ARMA-Prozessen exponentiell, sondern hyperbolisch abklingt, und zwar so langsam, daß sie nicht summierbar ist:

(22) $\rho_k \sim k^{(2d-1)}$ mit $0 < d < ½$.

Insbesondere hat damit die Spektraldichte von stationären Prozessen mit langem Gedächtnis eine Polstelle bei 0 (die Spektraldichte an der Stelle 0 ist gerade die Summe der theoretischen Autokovarianzen).

Oft lassen sich Zeitreihen mit langem Gedächtnis nach Anwendung des fraktionalen Diffenzenoperators $(1 - B)^d$ als stationäre ARMA-Prozesse modellieren; sie heißen dann "fraktional integrierte" bzw. ARFIMA(p,d,q)-Prozesse:

(23) $(1 - B)^d x_t \sim$ ARMA(p,q).

Der zentrale Parameter d steuert dabei die Stärke des langen Gedächtnisses: Je größer d, desto stärker hängen weit auseinanderliegende Zeitreihenwerte voneinander ab.

Für $d \geq ½$ sind ARFIMA(p,d,q)- Prozesse weiter definiert, aber nicht mehr stationär. Für $d = 1$ erhält man gerade einen I(1)-Prozeß.

Prozesse mit langem Gedächtnis haben verschiedene Konsequenzen für die Güte statistischer Schätzungen und Tests, die hier nicht weiter interessieren sollen (siehe Krämer 1998, Krämer und Hassler 1998, Sibbertsen 1999, Kleiber 2000). In Finanzanwendungen kommen sie vor allem als Residuen von Kointegrationsbeziehungen (Cheung und Lai 1993, Dittmann 1998, Krämer 1999) und bei der Modellierung von bedingten Volatilitäten vor. In beiden Fällen führen sie eine Reihe von Komplikationen ein. Z. B. gestaltet sich der statistische Nachweis einer allein schon durch den Augenschein eindeutig nahegelegten Kointegrationsbeziehung wie in Abb. 3 überraschend schwierig, wenn die Kointegrationsresiduen langes Gedächtnis haben: die Nullhypothese "Keine Kointegration" wird von den meisten formalen Tests nicht abgelehnt.

Wie Krämer und Marmol (1999) zeigen, geht diese geringe Macht von Standard-Kointegrationstest auf deren drastisch reduzierte Divergenzgeschwindigkeit unter der Alternative zurück: während etwa die Prüfgröße des "Augmented-Dickey-Fuller-Tests" unter Standard-Alternativen mit der Ordnung T gegen ∞ divergiert, sinkt diese Divergenzgeschwindigkeit bei nichtstationären ARFIMA(p,d.q)-Alternativen auf T^{1-d} (Krämer und Marmol, 1999, Theorem 1).

Auch die fundamentale Granger-Fehlerkorrekturdarstellung (5) hat im Kontext fraktional integrierter Kointegrationsresiduen eine andere, weit kompliziertere Gestalt (Dittmann 2000).

Die für die Finanzwirtschaft größte theoretische wie praktische Bedeutung hat langes Gedächtnis aber für die Modellierung bedingter Volatilitäten (Baillie et al. 1996, Bollerslev/Mikkelsen 1996, Lobato/Savin 1998 und viele andere). Im Kontext von GARCH-Modellen wie in (17) hat man

$$(24) \qquad \mathrm{cov}(h_t, h_{t+k}) = \mathrm{cov}(R_t^2, R_{t+k}^2),$$

d.h. langes Gedächtnis bei bedingten Volatilitäten ist das gleiche wie langes Gedächtnis in quadrierten Renditen, und dieses scheint, wie Abb. 9 und ähnliche nahelegen, tatsächlich vorzuliegen. Abb. 10 zeigt ergänzend zu Abb. 9 die geschätzte Spektraldichte der quadrierten BMW-Renditen; eine Polstelle bei 0 für die wahre Spektraldichte ist angesichts dieses Schaubildes nicht auszuschließen:

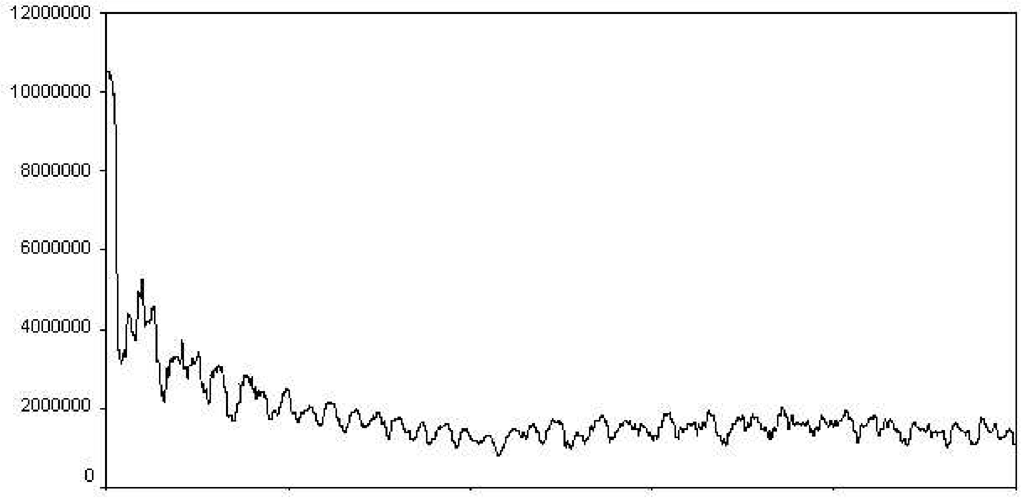

Abb. 10: Geschätzte Spektraldichte der quadrierten BMW-Renditen

Die sachliche Bedeutung von langem Gedächtnis, etwa für die rationale Bewertung von Optionen, ist offensichtlich: Wenn hohe aktuelle Volatilitäten bald wieder zum "normalen" Maß zurückfinden, dürften hohe aktuelle Kursausschläge die Bewertung längerfristiger Optionen kaum berühren; bleiben hohe aktuelle Volatilitäten dagegen lange in die Zukunft wirksam, ändert sich auch die Bewertung von Optionen. So ermitteln etwa Bollerslev und Mikkelsen (1996, Tabelle 7) um bis zu 100% abweichende Optionsprämien je nach Langzeitverhalten der bedingten Varianz und Laufzeit der Option. Verglichen mit diesem Einfluß eines möglichen langen Gedächtnisses der bedingten Volatilitäten tritt das zugrunde gelegte Preismodell ganz klar zurück (im Kontext stochastischer Volatilitäten ist die Black-Scholes Formel nicht mehr anwendbar), es ist in erster Linie das Zeitreihenverhalten der quadrierten Renditen, welches den Optionspreis dominiert.

Wegen dieser großen sachlichen Bedeutung eines möglichen langen Gedächtnisses in den quadrierten oder absoluten Renditen ist es wichtig, zwischen "wahrem" langem Gedächtnis und anderen Phänomenen wie Strukturbrüchen oder nicht existierenden theoretischen Momenten zu unterscheiden, die gleichfalls schwach abfallende empirische Autokorrelationsfunktionen und bei 0 steil ansteigende empirische Spektraldichten erzeugen. Wie etwa in Davis und Mikosch (1998) gezeigt, konvergieren empirische Autokorrelationen von quadrierten GARCH-Prozessen mit unendlichen vierten Momenten nicht mehr gegen Konstanten, sondern gegen nichtdegenerierte Grenzverteilungen, die sich mit wachsender Ordnung der Autokorrelation nur langsam gegen Null zusammenziehen, so daß man erstens keine schnell abfallenden empirischen Autokorrelationen, und zweitens je nach Teilstichprobe stark variierende Autokorrelationsmuster erwarten muß.

Abb. 11 zeigt die ersten 15 empirischen Autokorrelationen der quadrierten Hoechst-Renditen, berechnet aus Tagesdaten von 1960 bis Ende 1998; sie scheint die Erkenntnis aus Abb. 9 zu bestätigen: die empirischen Autokorrelationen fallen nur langsam ab und sind bis zu hohen Ordnungen positiv und signifikant von 0 verschieden.

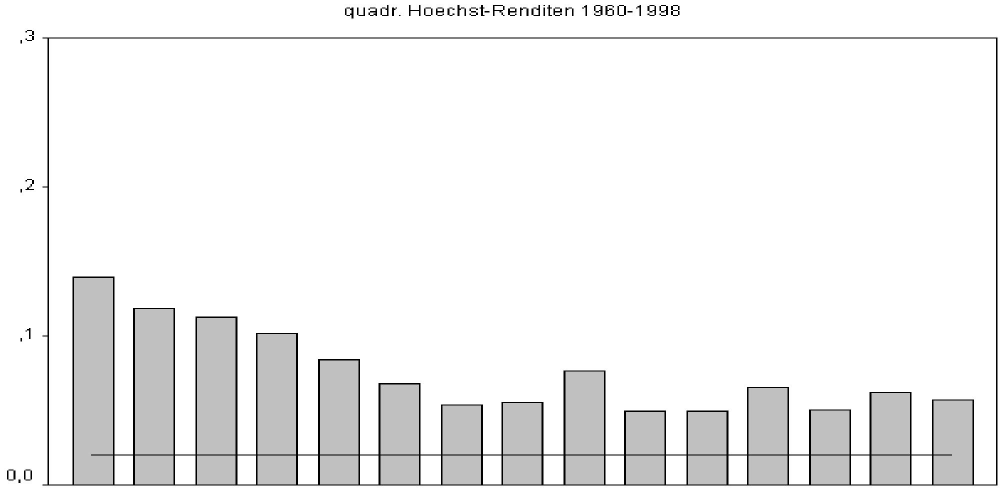

Abb. 11: Empirische Autokorrelationen der Ordnung 1 bis 15 für quadrierte Hoechst-Renditen

Abb. 12 dagegen zeigt die gleichen empirischen Autokorrelationsfunktionen für die vier zugrundeliegenden Dekaden separat: Zwar fallen die Autokorrelationen auch in den Teilstichproben nur langsam ab und sind in aller Regel positiv und signifikant von 0 verschieden. Aber das Muster ist in jeder Teilstichprobe eine anderes und weicht in jeder Teilstichprobe von dem in Abb. 11 entschieden ab. Dies scheint auf eine stochastische Natur des Grenzverhaltens hinzudeuten.

Eine weitere Quelle scheinbaren langen Gedächtnisses sind Strukturbrüche in den Volatilitäten: Wenn etwa durch eine Nennwertumstellung von DM 50,- auf DM 5,- die Volatilität einer Rendite steigt, oder allgemein: wenn sich der Erwartungswert einer stationären Zeitreihe mit kurzem Gedächtnis ändert, so schlägt sich das in langsam abfallenden empirischen Autokorrelationen nieder, die leicht und irreführend für ein Anzeichen von langem Gedächtnis gehalten werden können.

Abb. 13 zeigt beispielhaft die ersten 50 empirischen Autokorrelationen eines stationären MA(3)-Prozesses der Länge T = 1000 mit einem Erwartungwert, der

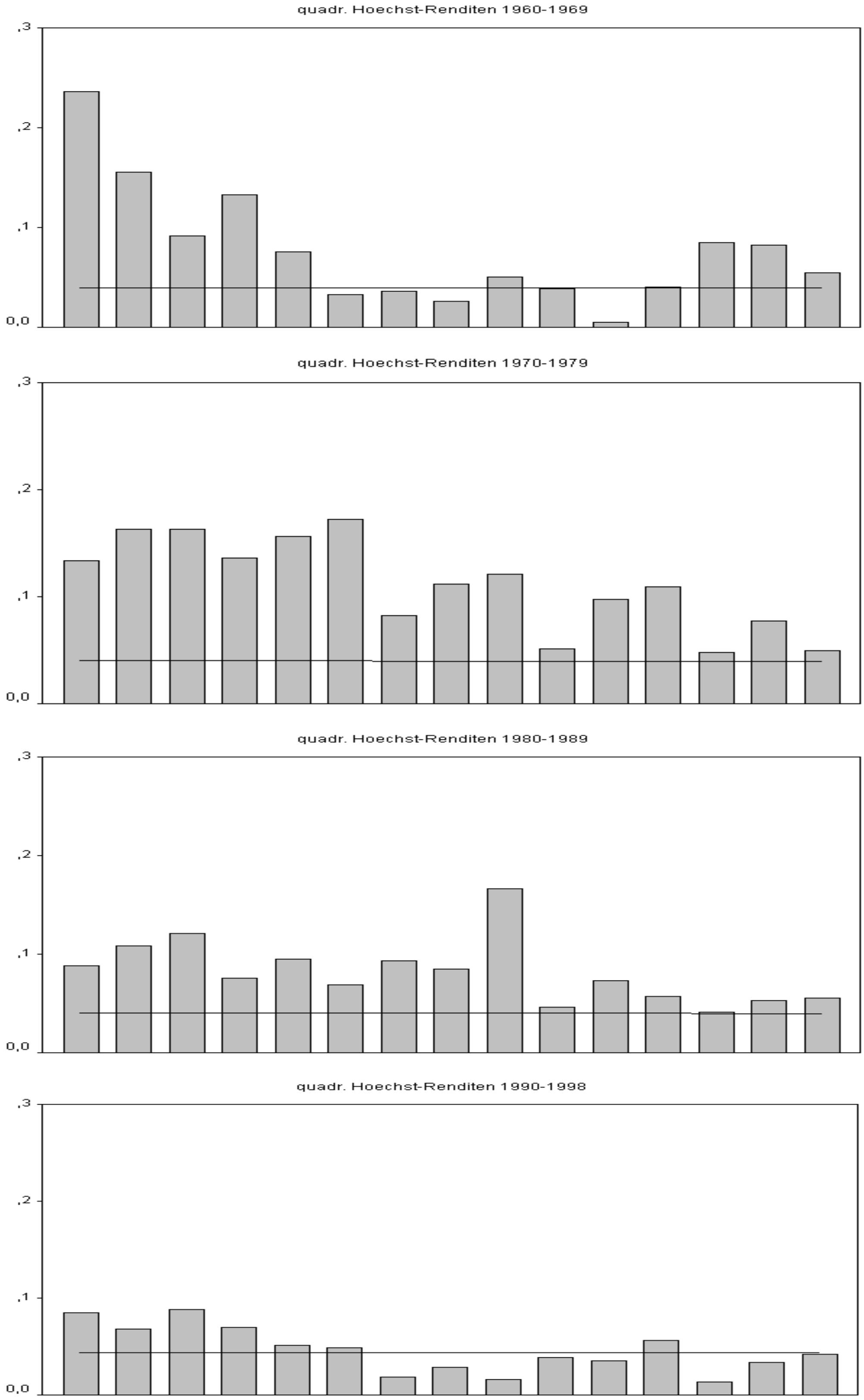

Abb. 12: Empirische Autokorrelationen der quadrierten Hoechst-Renditen für verschiedene Teilstichproben getrennt.

sich bei t = 500 von 1 auf –1 verändert: die Ähnlichkeit mit der empirischen Autokorrelationsfunktion der quadrierten BMW-Renditen aus Abb. 9 ist offensichtlich (ohne Strukturbruch bricht die Autokorrelationsfunktion nach 3 Perioden ab):

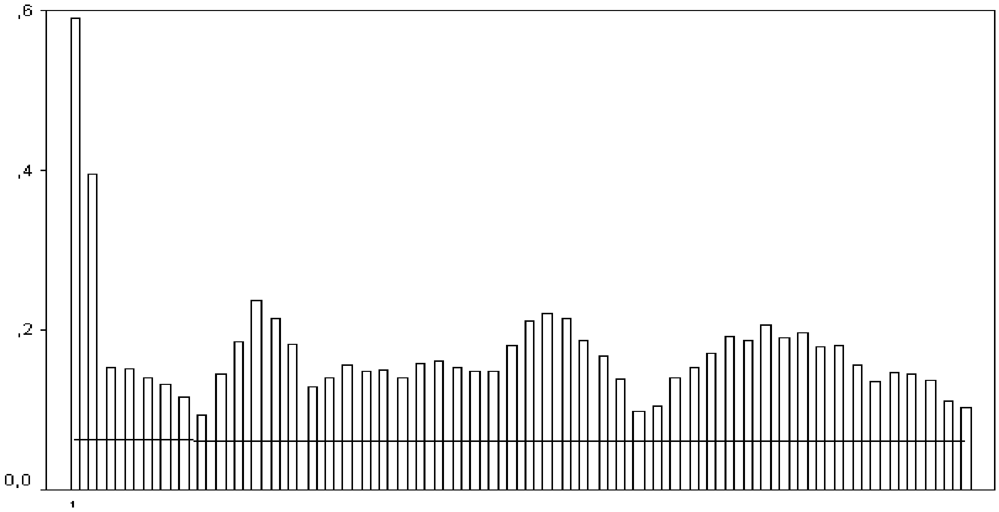

Abb. 13: Empirische Autokorrelationen eines stationären MA(3)-Prozesses der Länge T=1000 mit einem Strukturbruch in der Mitte

Diese Quelle von "spurious long memory" ist seit langem wohlbekannt. Leider steckt die Entwicklung effizienter Instrumente zur Entscheidung konkurrierender Ursachen für schwach abfallende empirische Autokorrelationen noch in den Kinderschuhen, und sind die bisherigen Resultate vor allem von einer sozusagen negativen Art: Einerseits wird bei tatsächlichen vorhandenem langem Gedächtnis sehr leicht und zu Unrecht ein Strukturbruch angezeigt (Nunes et al. 1995, Sibbertsen 2000, Krämer und Sibbertsen 2000), andererseits deutet ein tatsächlich vorliegender Strukturbruch sehr leicht auf ein nicht vorhandenes langes Gedächtnis hin. Die sich hier aufdrängenden Fragen sind zum großen Teil noch ungelöst, und stellen einen Schwerpunkt aktueller Forschung dar.

Literaturverzeichnis

Black, F.: "Studies of stock price volatility changes," Proceedings of the 1976 Meetings of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association, 1976. 177-181.

Bollerslev, T.: "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity." *Journal of Econometrics* 31, 1986, 307 – 327.

Bollerslev, T.; Chou, R. und Kroner, K.: "ARCH-modelling in finance : A review of the theory and emprical evidence," *Journal of Econometrics* 52, 1992, 5-59.

Bollerslev, T. und Mikkelsen, H. O.: "Modeling and pricing long memory in stock market volatility," *Journal of Econometrics* 73, 1996, 151-184.

Cheung, Y. W. und Lai. K S.: "A fractional cointegration analysis of purchasing power parity," *Journal of Business and Economics Statistics* 11, 1993, 103-112.

Davis, R.A. und Mikosch. T.: "The sample autocorrelations of heavy-tailed processes with applications to ARCH," *Annals of Statistics* 26, 1998, 2049-2060.

Ding, Z.; Granger, C.W.J. und Engle, R.F.: "A long memory properties of stock returns and a new model." *Journal of Empirical Finance* 1, 1993, 83 – 106.

Dittmann, I.: "Fractional cointegration of preferred and common stock," Universität Dortmund Discussion Papers in Economcis 3/1998.

Dittmann, I: "Error correction models for fractionally cointegrated time series," Technical Report 2/2000, SFB 475, Universität Dortmund

Dunis, Ch. und Zhou, B.: *Nonlinear modelling of high frequency financial time series,* New York 1998.

Engle, R.F.: "Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation. *Econometrica* 50, 1982, 987 – 1008.

Engle, R. F.: "The econometrics of ultra-high frequency data," *Econometrica* 68, 2000, 1-22.

Engle, R. F. und Granger, C. W. J.: "Cointegration and error correction : representation, estimation and testing," *Econometrica* 55, 1987, 251-276.

Fama, E.: "The behaviour of stock market prices." *Journal of Business* 38, 1965, 34 – 105.

Franses, P.H. und Koop, G.: "On the sensivity of unit root inference to nonlinear data transformations." *Economic Letters* 59, 1998, 7 – 15

Franses, P.H. und McAleer, M.: "Testing for unit roots and non-linear transformations." *Journal of Time Series Analysis* 19, 1998, 147 – 164.

Granger, C.W.J. und Hallmann, J.: "Nonlinear transformations of integrated time series." *Journal of Time Series Analysis* 12, 1991, 207 – 224.

Hall, A. D., Anderson, H. M. und Granger, C. W. J.: "A cointegration analysis of treasury bill yields," *Review of Economcis and Statistics*, 1992, 116-126.

Hamilton, J.: *Time Series Analysis*. Princeton 1994 (Princeton University Press).

Kleiber, Ch.: "Finite sample efficiency of OLS in linear regression models with long memory disturbances," Technical Report 34/2000, SFB 475, Universität Dortmund.

Krämer, W.: "Fractional integration and the augmented Dickey-Fuller Test", *Economics Letters* 61, 1998, 269 - 272.

Krämer W.: "Kointegration von Aktienkursen," *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* 51, 1999, 915-936.

Krämer, W. und Davies, L.: "Testing for unit roots in the context of misspecified logarithmic random walks." Technical Report 30/2000, SFB 475, Universität Dortmund

Krämer, W. und Haßler, U.: "Limiting efficiency of OLS vs. GLS when regressors are fractionally integrated," *Economics Letters* 60, 1998, 285 - 290.

Krämer, W. und Runde, R.: "Testing for autocorrelation among common stock returns." *Statistical Papers* 32, 1991, 311 – 320.

Krämer, W.und Runde, R.: "Some pitfalls in using empirical autocorrelations to test for zero correlation among common stock returns," in Kaehler/Kugler (Hrsg.): *Econometric analysis of financial markets*, Heidelberg 1994 (Physig), 1-10.

Krämer, W. und Runde, R.: Stochastic properties of German stock returns. *Empirical Economics* 21, 1996, 281 – 306.

Krämer, W. und Runde, R.: Diagnostic checking in linear processes with infinite variance, Technical Report 8/98, SFB 475 Universität Dortmund.

Krämer W. und Runde, R.: Peaks or tails - What distinguishes financial data?, Technical Report 8/99, SFB 475 Universität Dortmund.

Krämer, W. und Sibbertsen, P.: "Testing for structural change in the presence of long memory," Technical Report 31/3000, SFB 475, Universität Dortmund.

Lobato, I.N. und Savin, N.E.: "Real and spurious long-memory properties of stock-market data." *Journal of Business & Economic Statistics* 16, 1998, 261 – 268.

Mandelbrot, B.: "The variation of certain speculative prices." *Journal of Business* 36, 1963, 394 – 419.

Mittnik, S. und Rachev, S.T.: "Modelling asset returns with alternative stable distributions." *Econometric Reviews* 12, 1993, 261 – 300.

Nelson, C.R.; Plosser, C.I.: "Trends and random walks in macroeconomic time series." *Journal of Monetary Economics* 10, 1982, 139 – 162.

Nunes, L.C.; Kuan, C.-M. und Newbold, P.: "Spurious break." *Econometric Theory* 11, 1995, 736 – 749.

Runde, R.: "The asymptotic null distribution of the Box-Pierce Q-statistic for random variables with infinite variance - with an application to German stock returns". *Journal of Econometrics* 78, 1997, 205 - 216.

Schoffer, O.: "Ist die Hebelwirkung der Grund für Asymmetrie in ARCH- und GARCH-Modellen?" Technical Report 51/2000. SFB 475, Universität Dortmund.

Sibbertsen P.: "S-estimation in the nonlinear regression model with long-memory error-terms," Technical Report 36/99, SFB 475 Universität Dortmund.

Sibbertsen. P.: "Robust CUSUM-M-test in the presence of long memory disturbances," Technical Report 19/2000,SFB 475, Universität Dortmund.