

MÖLLER, Victoria
Frankfurt a. M.

Mathematische Konsistenz – individuelle mathematische Lehrtätigkeit zwischen Intuition, Algorithmus und Formalem

Aufgabe von Lehrenden im Mathematikunterricht ist es, sinnstiftende mathematische Lehr-Lern-Prozesse anzuregen. Für ihre Ausgestaltung bedienen sich Lehrende ihrer professionellen Kompetenz (Kunter et al., 2011), welche kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, sowie motivationale, volitionale und soziale Bereitschaften und Fähigkeiten vereinen (Weinert, 2014).

Davon ausgehend, dass in den so gestalteten Unterrichtssituationen Praktiken sichtbar werden, fokussiert der vorliegende Beitrag die Rekonstruktion mathematischer Unterrichtspraktiken (Häsel-Weide & Nührenböcker, 2021). Dabei wird mit den Komponenten mathematischer Tätigkeit eine psychologische Perspektive auf mathematische Unterrichtspraktiken eingenommen und individuelle mathematische Lehrkonzepte rekonstruiert.

Mathematische Lehrtätigkeit als zeitlich-iterative Verortung von Intuition, Algorithmus und Formalem

Mathematische Tätigkeiten umfassen nach Fischbein (1994) mehr als die rein formalen und deduktiven Facetten des Faches. Vielmehr kann Mathematikreiben als menschliche Aktivität verstanden werden, die sich auf drei Komponenten entfaltet: die intuitive, die algorithmische und die formale Komponente (Fischbein, 1994). Die intuitive Komponente mathematischer Tätigkeit spielt eine wesentliche Rolle für flüssige Argumentations- und Denkprozesse und wird ohne zusätzliche Begründung akzeptiert, sodass kein weiteres Hinterfragen stattfindet. Sie kann beispielsweise durch Grundvorstellungen konkretisiert werden (Kollhoff, 2021), wie die Vorstellung von Brüchen als Anteile bzw. das Zusammenfügen dieser Anteile für die Bruchaddition. Die algorithmische Komponente mathematischer Tätigkeit bezieht sich auf standardisierte Verfahren zur Lösung mathematischer Probleme und greift damit auf prozedurales Wissen zurück (Prediger, 2008). Für die Bruchaddition kann das Gleichnamigmachen als Teilschritt des Algorithmus zur Lösung von Additionen beschrieben werden. Schließlich umfasst die formale Komponente mathematischer Tätigkeit Axiome, Definitionen und Theoreme (Beutelspacher, 2009), wie beispielsweise die Betrachtung von Brüchen als Äquivalenzklassen bei der Identifikation des Hauptnenners.

Diese drei Komponenten mathematischer Tätigkeit sind auch in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen wiederzufinden. Werden sie im Kontext

instruktorischer Erklärungen von Lehrpersonen betrachtet, wird im Folgenden von Komponenten mathematischer Lehrtätigkeit gesprochen.

Mathematische Konsistenz in mathematischen Lehr-Lern-Prozessen

Mathematische Konsistenz bezeichnet die logische Widerspruchsfreiheit von mathematischen Inhalten im Rahmen der Komponenten mathematischer Lehrtätigkeit. Sie kann als ein zentrales Merkmal zur Beschreibung sinnstiftender mathematischer Äußerungen in Lehr-Lern-Kontexten aufgefasst werden und lässt sich im Kontext mathematischer Lehrtätigkeit in zwei komplementäre Dimensionen ausschärfen, der intrakomponentiellen und der interkomponentiellen Dimension (Möller, im Druck).

In der intrakomponentiellen Dimension gewährleistet mathematische Konsistenz, dass Aussagen innerhalb einer Komponente mathematischer Lehrtätigkeit klar und nachvollziehbar miteinander in Beziehung stehen. Folglich stehen die geäußerten Vorstellungen, Strategien und Axiome innerhalb der gleichen Komponente mathematischer Lehrtätigkeit widerspruchsfrei zueinander. Darüber hinaus entfaltet mathematische Konsistenz auch auf der interkomponentiellen Ebene eine wesentliche Bedeutung und damit hinsichtlich des Wechsels zwischen unterschiedlichen Komponenten mathematischer Lehrtätigkeit. Hierbei geht es darum, dass die geäußerten mathematischen Inhalte zwischen verschiedenen Komponenten mathematischer Lehrtätigkeit logisch und argumentativ nachvollziehbar sowie widerspruchsfrei zu verknüpft sind. Somit kann die argumentative Logik des mathematischen Inhaltes durch die beiden Dimensionen mathematischer Konsistenz sinnstiftend für Lernende dargestellt werden (Möller, im Druck).

Methodisches Vorgehen und Forschungsfrage

Analysiert werden 532 Minuten Videoaufnahmen, die in sechsten Klassen integrierter Gesamtschulen entstanden sind. Der thematische Schwerpunkt der untersuchten Unterrichtssequenzen liegt auf der Addition und Subtraktion von Brüchen. Es wird eine Adaption der Kontextanalyse (Vogel, 2017; Mayring, 2022) entwickelt, die durch eine kontrastierende Analyse eine Rekonstruktion der individuellen mathematischen Lehrkonzepte in den beobachteten Unterrichtseinheiten ermöglicht. Dabei dienen die drei Komponenten mathematischer Tätigkeit nach Fischbein (1994) als theoretische Grundlage und damit als Referenzrahmen. Auf Grundlage dieser Analysen (Möller, im Druck) sollen nun intrakomponentielle und interkomponentielle mathematische Konsistenzen herausgearbeitet werden.

Wie können Äußerungen von Lehrenden in Hinblick auf die mathematische Konsistenz in Lehr-Lern-Prozessen beschrieben werden?

Analyseeinblick und Ergebnisse

Im Folgenden wird beispielhaft eine Transkriptstelle analysiert, die im Hinblick auf das mathematische Lehrkonzept besonders reichhaltig erscheint. In dieser äußert die Lehrperson "nur GLEICH große Stücke auch zuSAMMen/zähl\". In Kontrastierung mit dem Referenzrahmen kann der Äußerungsanteil „nur (...) auch zuSAMMen/ zähl\“ als Voraussetzungsprüfung der Bruchaddition und damit als algorithmischen Komponente mathematischer Lehrtätigkeit beschrieben werden. Die lautsprachliche Äußerung "GLEICH große Stücke" beschreibt einen Bruch als Anteil, einem Aspekt der intuitiven Komponente mathematischer Lehrtätigkeit. Die gemeinsame gleichmäßige Unterteilung von Anteilen (intuitiv) wird als notwendige Voraussetzung der Addition (algorithmisch) beschrieben. Dieser Zusammenhang kann innerhalb der intuitiven Komponente mathematischer Lehrtätigkeit nicht nachvollzogen werden, denn intuitiv können Anteile (anders als im Algorithmischen) mit unterschiedlicher Unterteilung zusammengefügt werden. Erst die schriftlich-symbolische Notation der Summe macht eine gemeinsame gleichmäßige Unterteilung notwendig. Diese Stelle kann als interkomponentielle Inkonsistenz beschrieben werden. Daran anschließend werden weitere Stellen ausgewählt, die das Lehrkonzept weiter anreichern.

Die beispielhafte Analyse zeigt, dass Lehrenden in den beobachteten Unterrichtsstunden auch widersprüchliche Äußerungen tätigen. Es können folglich mathematische Inkonsistenzen zwischen der intuitiven und der algorithmischen Komponente rekonstruiert werden. Durch Hinzunahme weiterer Stellen können interkomponentielle mathematische Konsistenzen zwischen der intuitiven und der algorithmischen sowie zwischen der algorithmischen und der formalen Komponente mathematischer Lehrtätigkeit rekonstruiert werden. Die weiterführende Analyse zeigt außerdem, dass bei Lehrenden intrakomponentielle mathematische Konsistenzen auf der intuitiven Komponente mathematischer Lehrtätigkeit rekonstruiert werden kann. So werden beispielsweise Brüche zunächst als isoliert betrachtete Zahlen und anschließend im Kontext einer Operation dargestellt.

Fazit und Ausblick

Die Ergebnisse zeigen, dass Lehrende bei der Einführung eines mathematischen Inhalts sowohl auf intra- als auch auf interkomponentielle mathematische Konsistenz zurückgreifen. Gleichzeitig wird deutlich, dass es in der Unterrichtspraxis für Lehrende herausfordernd sein kann, mathematische Konsistenz systematisch und durchgängig herzustellen. Besonders die logische Widerspruchsfreiheit mathematischer Inhalte zwischen den Komponenten mathematischer Lehrtätigkeit (intrakomponentielle Konsistenz) scheint

anspruchsvoll zu sein. Die Förderung der Fähigkeit, die Komponenten mathematischer Lehrtätigkeit logisch miteinander zu verknüpfen, könnte ein zentraler Bestandteil von Fortbildungsmaßnahmen sein. Insbesondere die Entwicklung von Strategien, um intuitive Zugänge stärker mit algorithmischen und formalen Aspekten zu verknüpfen, erscheint vielversprechend.

Die hier verwendete Analyse mehrerer Äußerungsmodi (Sprache, Gestik, mathematische Bilder und Symbole) ermöglicht eine differenzierte und umfassende Betrachtung der geäußerten mathematischen Inhalte. Das Potenzial multimodaler Forschung für Lehr-Lern-Prozesse wird beispielsweise in den Forschungsergebnissen deutlich, die auf den Zusammenhang von Äußerungsmodi und mathematischen Konsistenz verweisen (Möller, im Druck).

Literatur

- Beutelspacher, A. (2009). "Das ist o.B.d.A. trivial!": Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken (9., aktualisierte Aufl.). Studium. Vieweg + Teubner.
- Fischbein, E. (1994). The Interaction between the Formal, the Algorithmic, and the Intuitive Components in a Mathematical Activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Hrsg.), *Mathematics education library: Bd. 13. Didactics of mathematics as a scientific discipline* (S. 231–245). Kluwer Academic Publishers.
- Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2021). Inklusive Praktiken im Mathematikunterricht: Empirische Analysen von Unterrichtsdiskursen in Einführungsphasen. *Zeitschrift für Grundschulforschung* (14), 49–65.
- Kollhoff, S. (2021). *Analyse von Transferprozessen in der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs: Theoretische Rahmung und empirische Untersuchung*. Springer.
- Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (Hrsg.). (2011). *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*. Waxmann.
- Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Möller, V. (im Druck). *Multimodale Rekonstruktion individueller Lehrkonzepte von Lehrpersonen: instruktionale Erklärsituationen authentischen Mathematikunterrichts*.
- Prediger, S. (2008). Discontinuities for mental models - A source for difficulties with the multiplication of fractions. In D. de Bock, B. D. Sondergaard & B. A. Gómez (Hrsg.), *Proceedings of ICME11: TSG 10 Research and development in the teaching and learning of number systems and arithmetic*. (S. 29–37). Katholieke Universiteit Leuven.
- Vogel, R. (2017). „wenn man da von oben guckt sieht das aus als ob ...“ – die ‚Dimensionslücke‘ zwischen zweidimensionaler Darstellung dreidimensionaler Objekte im multimodalen Austausch. In M. Beck & R. Vogel (Hrsg.), *Geometrische Aktivitäten und Gespräche von Kindern im Blick qualitativen Forschens: Mehrperspektivische Ergebnisse aus den Projekten erStMaL und MaKreKi* (S. 61–75). Waxmann.
- Weinert, F. E. (2014). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen -eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Pädagogik. Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–32). Beltz.