Aiso HEINZE, Stefan UFER, München

Was bleibt? Grundlegende geometrische Kompetenzen bei Neuntklässlern des Gymnasiums[1]

Vor dem Hintergrund des kumulativen Kompetenzaufbaus dient der Erwerb von mathematischen Kompetenzen nicht nur dem (Fern-)Ziel, den Lernenden eine zukünftige Teilhabe in Gesellschaft und Berufswelt zu ermöglichen. Mathematische Kompetenzen stellen in der Schullaufbahn ebenso eine Voraussetzung dar, weitere mathematische Inhalte und Konzepte zu erlernen bzw. diese zu erweitern. Längsschnittlich angelegte Untersuchungen konnten in der Vergangenheit zeigen und auch quantifizieren, inwieweit erworbene Kompetenzen im zeitlichen Verlauf ausgebaut werden. So wiesen etwa PISA-I Plus oder das laufende Projekt PALMA für die mathematische Kompetenzentwicklung innerhalb eines Schuljahres einen Zuwachs von einer drittel bis einer halben Standardabweichung nach.

Im Unterschied zu PISA und PALMA strebt die hier vorgestellte Studie nicht an, mathematische Kompetenz im umfassenden Sinne zu untersuchen. Stattdessen beschränken wir uns auf die anspruchsvolle mathematische Teilkompetenz des geometrischen Beweisens, die zudem längsschnittlich in Beziehung zu potentiellen individuellen Bedingungsfaktoren gesetzt wird.

Geometrische Beweiskompetenz und ihre Bedingungsfaktoren

Beweisen und Begründen als zentrale Arbeitsweise der Mathematik wird traditionell schwerpunktmäßig im Rahmen des Geometrieunterrichts der Mittelstufe eingeführt und behandelt. Dass das geometrische Beweisen auch für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I anspruchsvoll ist, konnte in Studien mehrfach belegt werden (z.B. Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2004). So zeigte sich beispielsweise, dass in Klasse 7 und 8 des Gymnasiums nur ein kleiner Teil der Lernenden in der Lage war, mehrschrittige geometrische Beweisaufgaben aus dem vorgesehen Curriculum zu lösen (Heinze & Reiss, 2004).

Zur Beschreibung der geometrischen Beweiskompetenz hat sich ein Kompetenzmodell mit mehreren Stufen bewährt, das inzwischen mehrfach für die Jahrgangstufen 7 und 8 empirisch evaluiert werden konnte. Das Modell erlaubt Beweisitems in drei Niveaus einzuteilen, wobei das erste Niveau einfache geometrische Rechenaufgaben umfasst und dem zweiten bzw. dritten Niveau einschrittige bzw. mehrschrittige Beweisprobleme zugeordnet werden. Während die Probanden bei Items des Niveaus 1 ihr mathematisches Wissen nur anwenden, aber nicht explizieren müssen (also prozedu-

[1] Gefördert durch das Lehrerbildungszentrum der LMU München.

rales Wissen gefordert ist), liegt der Anspruch bei den Beweisitems darin, explizite Argumentationen anzugeben. Tabelle 1 zeigt beispielhaft Ergebnisse einer Studie mit N = 1112 Schülerinnen und Schülern der 7. Jahrgangsstufe des Gymnasiums (Reiss et al., 2006).

Tabelle 1: Geometrische Beweiskompetenz in Klasse 7

Score in Prozent	Kompetenzniveaus			Gesamt-test
	K I	K II	K III	
Unteres Drittel N = 385	57.6	19.6	7.6	31.4
Mittleres Drittel N = 434	79.6	57.3	18.9	53.7
Oberes Drittel N = 419	92.0	90.9	43.7	75.6
Mittelwert	76.5	56.0	23.3	
N = 1112, M = 53.6 (s = 19.6)				

Die Resultate zeigen, dass die einzelnen Kompetenzniveaus recht gut durch die verschiedenen Leistungsdrittel der Stichprobe abgebildet werden. Die Leistungsdrittel wurden dabei auf Basis des Gesamtscores des Geometrietests gebildet. Auffällig ist, dass nur das stärkste Leistungsdrittel des Gymnasiums mehrschrittige Beweisaufgaben zufrieden stellend bewältigt. Hierbei handelt es sich in Klasse 7 beispielsweise um Aufgaben, die die Kombination von Winkelsätzen erfordern.

Design und Forschungsfragen

Mit unserer Studie verfolgen wir zwei Ziele. Zum einen geht es um eine deskriptive Beschreibung der geometrischen Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern des Gymnasiums der Klasse 9. Dabei beschränken wir uns auf die Betrachtung von grundlegenden geometrischen Inhalten wie einfachen Winkelsätzen und Kongruenzsätzen, die dem Curriculum der Jahrgangstufen 7 und 8 zugeordnet sind. Zum zweiten geht es darum, die individuelle Beweiskompetenz der Neuntklässler mittels ihres Basiswissens bzw. Kompetenz in den Jahrgangsstufen 7 und 8 längsschnittlich zu erklären. Folgende Fragen werden im Rahmen dieses Beitrags behandelt:

1. Inwieweit verfügen Schülerinnen und Schüler der Klasse 9 des Gymnasiums über grundlegende geometrische Beweiskompetenzen?
2. In welchem Umfang lässt sich die individuelle Beweiskompetenz durch Basiswissen bzw. Kompetenz in den Jahrgangsstufen 7 und 8 erklären?

Die Studie ist eine Fortführung einer Untersuchung zum Beweisen und Begründen in den Jahrgangsstufen 7 und 8, in der prozedurales Basiswissen und geometrische Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern erhoben wurden (Reiss et al., 2006). In der aktuellen Studie bearbeiteten

251 Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 9 aus zehn Gymnasialklassen Testaufgaben zu konzeptuellem und prozeduralem Basiswissen sowie zu geometrischer Beweiskompetenz. Im Längsschnitt ergab sich eine Stichprobengröße von N = 131.

Das konzeptbezogene Basiswissen wurde durch sechs Aufgaben erhoben, bei denen jeweils fünf bis zwölf Multiple Choice-Aussagen zu Eigenschaften des Parallelogramms, Winkelsätzen, Kongruenzsätzen und Punkt- und Achsensymmetrie zu beurteilen waren. Items zum prozeduralen Basiswissen erstreckten sich auf Winkelberechnungen in geometrischen Figuren und verlangten Wissen aus den Bereichen Winkel an parallelen Geraden, Winkelbeziehungen in Dreiecken und Vierecken sowie Kongruenz. Die Beweisitems bezogen sich u.a. auf Kongruenzbeweise zu Eigenschaften von Vierecken und anderen geometrischen Figuren sowie auf die Argumentation mit Winkelsätzen und Eigenschaften einfacher geometrischer Figuren.

Ergebnisse

Durchschnittlich erreichten die Schülerinnen und Schüler im konzeptbezogenem Bereich 78.2% (s = 12.4) der Punkte und im prozeduralen Bereich 82.9% (s = 17.0). Hinsichtlich der Beweiskompetenz konnte das zuvor erwähnte Kompetenzmodell auch in der neunten Klasse bestätigt werden (s. Tabelle 2). Auffällig ist, dass auch in der 9. Klasse noch viele Schülerinnen und Schüler große Probleme bei Beweisaufgaben haben, bei mehrschrittigen Beweisaufgaben sind dies mehr als die Hälfte der Gymnasiasten.

Tabelle 2: Geometrische Beweiskompetenz in Klasse 9

Score in Prozent	Kompetenzniveaus			Gesamttest
	K I	K II	K III	
Unteres Drittel N = 80	69.6	11.6	2.5	24.9
Mittleres Drittel N = 83	86.4	32.9	6.4	40.3
Oberes Drittel N = 88	91.9	63.5	28.6	61.7
Mittelwert	82.9	36.9	13.0	
N = 251, M = 42.0 (s = 16.8)				

Von besonderem Interesse für die Erklärung geometrischer Beweiskompetenz und ihrer Entwicklung ist die Interaktion der verschiedenen Bedingungsfaktoren. Zur Untersuchung dieser Effekte wurden mehrere Regressionsmodelle gerechnet. Das erste Modell verwendet als Prädiktoren für die geometrische Beweiskompetenz (Kompetenzniveaus II und III) in Klasse 9 das konzeptbezogene und prozedurale Basiswissen in Klasse 9 sowie das prozedurale Basiswissen und die geometrische Beweiskompetenz

(Kompetenzniveaus II und III) in Klasse 8. Signifikante Effekte zeigen sich hier lediglich für die Prädiktoren Beweiskompetenz in Klasse 8 und konzeptbezogenes Basiswissen in Klasse 9. Zieht man die Prädiktoren der 7. Jahrgangsstufe hinzu, ergibt sich dasselbe Ergebnis. Es bleibt ein Modell mit zwei Prädiktoren, dass 46,1% der Varianz erklärt (Tabelle 3).

Tabelle 3: Prädiktoren der Beweiskompetenz in Klasse 9

	stand. β	p
Beweiskompetenz in Klasse 8	0.384	<0.001
Konzeptbezogenes Basiswissen in Klasse 9	0.417	<0.001
korrigiertes $R^2 = 0.461$		

Diskussion

Das Bild, das die Erhebung vom Basiswissen der untersuchten Neuntklässler in Bezug auf Inhalte der 7. und 8. Jahrgangsstufe gibt, ist recht positiv. Hinsichtlich der Beweiskompetenz zeigt sich allerdings, dass auch noch in Klasse 9 viele Lernende am Gymnasium Schwächen aufweisen. Auffällig ist dabei, dass das prozedurale Basiswissen, das vor allem Winkel- und Seitenberechnungen in geometrischen Figuren umfasst, keinen signifikanten Einfluss auf die geometrische Beweiskompetenz hat. Demgegenüber stellt das begriffliche Basiswissen einen relativ guten Prädiktor dar.

Literatur

Healy, L & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey*. Mathematical Science. London: Institute of Education, University of London.

Heinze, A. & Reiss, K. (2004). Mathematikleistung und Mathematikinteresse in differentieller Perspektive. In J. Doll & M. Prenzel (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (S. 234 - 249). Münster: Waxmann.

Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F. & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 194-208). Münster: Waxmann.