

Ergänzen als halbschriftliche Strategie zum Subtrahieren: Einblicke in digitale Lernendenbearbeitungen

1. Einleitung

Halbschriftliche Strategien bieten gegenüber den schriftlichen Verfahren aufgrund der charakteristischen Zerlegung von Aufgaben in leichtere Teilaufgaben vielfältige Lernanlässe. Diese sollen in einer digitalen verstehensorientierten Lernumgebung zum verständigen Rechnen, die im Rahmen des Projekts "Divomath" für den Regelunterricht in Klasse 5 entwickelt und beforscht wird, ausgenutzt werden. Dabei erfolgt keine Neuerarbeitung der halbschriftlichen Strategien, sondern das Ziel besteht darin, zentrale Verstehensgrundlagen wie das Zahl-, Stellenwert- und Operationsverständnis zu festigen und zu vertiefen sowie präalgebraische Erfahrungen zu sammeln, um ein durchgängiges Lernen zu ermöglichen. Neben den Hauptstrategien schritt- und stellenweises Addieren und Subtrahieren bildet das Ergänzen als eine spezifische Subtraktionsstrategie, die hier fokussiert wird, auch den Schwerpunkt einer Unterrichtseinheit der Lernumgebung.

2. Ergänzen – Grundvorstellung und Strategie

Die Strategie *Ergänzen* (s. Abb. 1) basiert auf der gleichnamigen Grundvorstellung der Subtraktion und ist eng mit dem Zahl- und Operationsverständnis verknüpft. Die Differenz wird ermittelt, indem vom Subtrahenden ein Wert sukzessiv zum Minuenden ergänzt wird. Sie entspricht dabei dem hinzugefügten Wert und bildet den Abstand zwischen Minuend und Subtrahend. Das Ergänzen wird daher auch als indirekte Addition betitelt (vgl. Selter et al., 2012; Wessel, 2015), was es wesentlich von anderen Strategien wie dem schrittweisen Subtrahieren unterscheidet, die auf der Grundvorstellung des Wegnehmens beruhen und bei denen die Differenz als Rest interpretiert wird. Selter et al. (2012) unterscheiden daher beim Subtrahieren die Rechenrichtungen Wegnehmen (taking-away) und Ergänzen (determining the difference).

Das Diagramm zeigt die Strategie 'Ergänzen' für die Subtraktion $17 - 13 = ?$. Links sind zwei Gleichungen dargestellt: $17 - 13 = ?$ und $13 + ? = 17$. Rechts ist eine Zahlengerade mit den Markierungen 13 und 17 dargestellt. Ein gebogener Pfeil zeigt den Abstand zwischen 13 und 17 an, beschriftet mit einem Fragezeichen (?).

Abb. 1: Ergänzen

Die Interpretation der Differenz als Unterschied von Subtrahend und Minuend lässt sich, im Vergleich zur Interpretation der Differenz als Rest,

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

einfacher auf die Subtraktion negativer Zahlen ausweiten. Der Wechsel zwischen Addition und Subtraktion ist dabei notwendig, um flexibel mit Gleichungen und ihren Darstellungen umgehen zu können. In der Algebra bildet die Kenntnis der strukturellen Beziehungen zwischen additiven und subtraktiven Gleichungen (nicht nur die Beziehung zwischen den Ausdrücken links und rechts vom Gleichheitszeichen) eine wichtige Grundlage für das Verständnis algebraischer Manipulationen (Selter et al., 2012).

Anders als das schritt- und stellenweise Addieren und Subtrahieren werden Verkürzungsstrategien wie das Ergänzen von Grundschüler*innen nur selten angewendet, sofern sie nicht gezielt eingeführt wurden (Hickendorff, 2020). Gründe dafür könnten sein, dass diese Strategien ein tiefgreifendes Verständnis von Rechengesetzen und Zahlbeziehungen erfordern und Lernende die Zahlvorteile in der Aufgabe erkennen und das Zahlenmaterial dementsprechend vereinfachen können müssen (Nemeth & Lipowsky, 2021).

3. Forschungsinteresse, methodisches Vorgehen und Datenerhebung

Im Sinne fachdidaktischer Entwicklungsforschung wird die initial entwickelte digitale Lernumgebung erprobt und beforscht, um die integrierten Aufgaben mit Blick auf eine adäquatere Unterstützung der Lernprozesse der Lernenden optimieren zu können. Die hier fokussierte Erprobung von vier Unterrichtseinheiten (zum schritt- und stellenweisen Addieren und Subtrahieren und zum Ergänzen) fand in zwei Kleingruppen mit je vier Viertklässler*innen in einem Umfang von jeweils 45-90 Minuten statt. Grundlagen für die Datenauswertung bilden die videografierten Kleingruppensitzungen sowie digitale Aufgabenbearbeitungen der Lernenden. Im Mittelpunkt dieses Beitrags soll folgende Forschungsfrage stehen: Welche Schwierigkeiten der Lernenden lassen sich hinsichtlich der Aufgabenbearbeitung in der Unterrichtseinheit zum Ergänzen rekonstruieren? Um diese bearbeiten zu können, erfolgt eine erste qualitative Analyse der entsprechenden Videos sowie Lernendenbearbeitungen. Aus dieser lassen sich verschiedene Arten von Lernendenschwierigkeiten ableiten, die nachfolgend anhand von Beispielen aus den Kleingruppensitzungen erläutert werden sollen. Die rekonstruierten Bereiche von Lernendenschwierigkeiten fungieren anschließend als Codes, um die Bearbeitungen der Aufgaben zum Ergänzen für alle acht Lernenden zu untersuchen und etwa typische Lernendenschwierigkeiten ausmachen zu können. Im Folgenden werden die Ergebnisse exemplarisch anhand von zwei Aufgaben dargestellt.

4. Ergebnisse: Auftretende Lernendenschwierigkeiten beim Ergänzen

Herstellung von Zusammenhängen zwischen Subtraktion und Addition (Z)

Als eine typische Schwierigkeit einiger Lernender konnte während der Unterrichtseinheit zum Ergänzen das Herstellen eines Zusammenhangs zwischen der Subtraktionsaufgabe und dem Rechenweg des Ergänzens, also dem Lösen über eine Additionsaufgabe, rekonstruiert werden. Deutlich wurde dies etwa in der ersten Aufgabe der Unterrichtseinheit, in der sich die Lernenden mit dem Rechenweg des fiktiven Lernenden Jan zur Aufgabe 217–214 auseinandersetzen sollen, der das Ergebnis mit Hilfe der Aufgabe $214+3=217$ ausgerechnet hat.

So scheint diese Notation etwa den Lernenden Daniel zunächst zu irritieren. Im scheint es schwer zu fallen, einen Zusammenhang zwischen den beiden Operationen herstellen, wie seine untenstehende Äußerung zeigt.

Daniel Bei Jan steht davor 217–214 und darunter wieder plus.

Auch bei Henry, Mona und Merve wird deutlich, dass der Zusammenhang zwischen der Subtraktions- und der Additionsaufgabe nicht bewusst zu sein.

Argumentation über die Rechenrichtung am Rechenstrich (in Verbindung mit der Grundvorstellung Wegnehmen (RR-W) oder Ergänzen (RR-E))

In Aufgabe 5 sollen die Lernenden aus verschiedenen Subtraktionsaufgaben zwei auswählen und am Rechenstrich zeigen, wie sie diese mit Hilfe des Ergänzens lösen. Mona zeichnet die Aufgaben 110–109 und 88–33 dabei als Subtraktion, scheint also auf die Vorstellung des Wegnehmens zurückzugreifen (RR-W), was durch den Darstellungswechsel von der symbolischen Ebene zum Rechenstrich deutlich wird (s. Abb. 2).

Abb. 2: 110–109 und 88–33 am Rechenstrich

In einer anschließenden Äußerung wird zudem deutlich, dass ihr der Zusammenhang zwischen den Operationen (Z) noch nicht bewusst und sie Jans Rechenweg nicht ganz verstanden zu haben scheint.

Mona Also wie würde Jan das quasi mit Minus rechnen? So wie wir das gemacht haben quasi mit plus? Weil das geht halt gar nicht mit minus...

In weiteren Äußerungen von Mona und Merve wieder zudem immer wieder deutlich, dass sie auf die Grundvorstellung des Wegnehmens zurückgreifen. Sie erklären mehrfach, dass das Ergebnis von Subtraktionsaufgaben links und das Ergebnis von Additionsaufgaben rechts am Rechenstrich abgelesen werden kann, argumentieren also anhand der Rechenrichtung am

Rechenstrich (RR). Erst am Ende der Unterrichtseinheit verstehen sie nach einer weiteren gemeinsamen Besprechung, dass die Addition genutzt wird, um die Differenz der Subtraktionsaufgaben zu bestimmen.

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 5
Henry	RR-W, Z	Z	RR-W
Mona	RR-W, Z	–	RR-W, Z
Merve	RR-W	–	RR-W
Emil	Z	RR-W	RR-E
Daniel	Z	Z	RR-W

Tabelle 1: Aufgaben, in denen die Schwierigkeiten auftreten

5. Diskussion und Ausblick

Aus der Analyse der durchgeführten Unterrichtseinheit zum Ergänzen geht hervor, dass es einigen Lernenden schwerfällt, den Zusammenhang zwischen der Subtraktionsaufgabe und der zur Differenzbestimmung verwendeten Addition herzustellen. Zudem argumentieren sie bei Darstellungen am Rechenstrich häufig mit der Rechenrichtung, wobei sie immer wieder auf die Grundvorstellung des Wegnehmens zurückzugreifen scheinen.

Die aus der Analyse gewonnen Erkenntnisse werden genutzt, um die Aufgaben zu überarbeiten, indem etwa von vornerein ein stärkerer Fokus auf dem Zusammenhang zwischen den Operationen gelegt wird. Zudem werden die Unterrichtseinheiten an unterschiedliche Lernvoraussetzungen angepasst und inhaltlich differenziert. Zukünftig soll zudem die Lehrkräfteebene hinsichtlich der Impulsfragen untersucht werden, um die Lernprozesse besser unterstützen zu können.

Literatur

- Hickendorff, M. (2020). Fourth graders' adaptive strategy use in solving multidigit subtraction problems. *Learning and Instruction* 67, 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2020.101311>
- Nehmet, L. & Lipowsky, F. (2021). Subtraktionsstrategien verschachtelt oder geblockt lernen? Strategiewahl- und Fehlerprofile von Drittklässler*innen. *Schweizerische Zeitschrift für Bildungswissenschaften*, 43(2), 233–249. <https://doi.org/10.25656/01:22912>
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2012). Taking away and determining the difference – a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 389–408. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9305-6>
- Wessel, J. (2015). *Grundvorstellungen und Vorgehensweisen bei der Subtraktion*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-11386-5_4