

Guido PINKERNELL, Heidelberg

## Mathematisches Grundwissen und digitale Werkzeuge

Die Frage, über welche mathematischen Kenntnissen, Fertigkeiten und Fähigkeiten ein Schüler am Ende seiner Schulzeit verfügen soll, tritt derzeit mit der wachsenden Verbreitung von digitalen Werkzeugen im Unterricht wieder verstärkt in den Vordergrund. Eigentlich ist diese Frage je nach Randbedingungen unterschiedlich zu beantworten, und eben hiervon ist abhängig, ob man das jeweils konkretisierte Wissen und Können nun als „hilfsmittelfrei verfügbar“ verstehen will oder nicht. Allerdings: Es gibt durchaus Versuche, die hilfsmittelfreie Fertigkeiten gezielt von solchen abzugrenzen, bei denen digitale und andere Werkzeuge herangezogen werden dürfen, (z. B. CALIMERO 2007 ff. und Herget et al. 2002). So willkommen solche Listen sind, weil sie pragmatische Antworten auf vielerorts drängende Fragen liefern, so problematisch sind sie, weil sie die Notwendigkeit hilfsmittelfrei verfügbaren Wissens und Könnens für das Verstehen von Mathematik nicht aufklären (Gardiner 2001). Darüber hinaus erscheint, wenn einseitig unter dem Etikett „hilfsmittelfreie Fertigkeiten“ wahrgenommen, das mathematische Grundwissen in einem Gegensatz zum Einsatz digitaler Medien, der mit Blick auf die didaktischen Erwartungen an ihren Einsatz so gar nicht gerechtfertigt ist. Man könnte sogar behaupten:

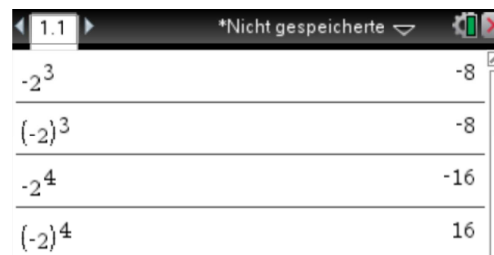
*Ein verständiger Zugang zu mathematischen Konzepten und Kompetenzen mit Hilfe digitaler Werkzeuge braucht „hilfsmittelfrei“ verfügbares symbolisch repräsentiertes und syntaktisch organisiertes Grundwissen und -können.*

Diese Überlegung soll im Folgenden theoretisch begründet werden:

### A Pragmatische Perspektive

*Ein produktives Lernen mit digitalen Werkzeugen muss durch einen einsichtigen Umgang mit syntaktischen Strukturen in symbolischen Repräsentationsformen begleitet sein.*

Diese These lässt sich auf zweierlei Weise konkretisieren. Zum einen ist wohl unmittelbar einsichtig, dass ein Schüler schwerlich einen zielorientierten Umgang z. B. mit einem CAS praktizieren kann, wenn er mit Fehlermeldungen der Maschine konfrontiert wird und diese aufgrund



$-2^3$	-8
$(-2)^3$	-8
$-2^4$	-16
$(-2)^4$	16

Abb. 1: Screenshot zu einer Klassenarbeitsaufgabe mit dem Arbeitsauftrag: "Kommentiere" (R. Berding)

fehlenden Verständnisses für syntaktisch-symbolisches Arbeiten nicht korrigieren kann. Zum anderen muss nicht jede falsche Eingabe zu einer Fehlermeldung führen. Die Nichtbeachtung der Termstruktur bei der Eingabe kann in anderen Werten in der Ausgabe resultieren. Abb. 1 zeigt eine Klassenarbeitsaufgabe, in der der Schülerinnen und Schüler diesen Umstand explizit reflektieren soll.

## **B Epistemologische Perspektive**

*Entdeckungen in digitalen Lernumgebungen müssen als fachsystematisch ungesicherte Hypothesen wahrgenommen werden, solange ihre formale Bestätigung nicht (nach)vollzogen wird.*

Eine der wichtigsten didaktischen Funktionen des Computereinsatzes ist das Bereitstellen von Lernumgebungen für das Entdecken und Explorieren von mathematischen Zusammenhängen. Zum Beispiel führt die vielerorts beliebte „Kaninchenstallaufgabe“ in den Klassen 8 bzw. 9 zur Entdeckung eines neuen Funktionstyps, der sich schon auf den ersten Blick von den bis dahin bekannten linearen Funktionen deutlich unterscheidet (Abb. 2). Aus fachlich epistemologischer Sicht darf die hier erfolgte „Generierung neuen Wissens“ mit der bloßen Beschreibung von Oberflächenphänomenen nicht stehen bleiben. Es ist unter expliziten Bezug auf schon vorhandenes gesichertes Wissen, also deduktiv zu begründen. Dass der unbekannte funktionale Zusammenhang neue Eigenschaften aufweist, ist also nicht aus dem Sachkontext herzuleiten, sondern weil er durch einen Term neuer Art beschrieben werden kann: Er weist, anders als bei den bisher betrachteten Funktionstermen, ein quadratisches Glied auf. Die besonderen arithmetischen Eigenschaften quadratischer Potenzen bilden so die Argumentationsbasis für die Begründung der beobachteten Funktionseigenschaften.

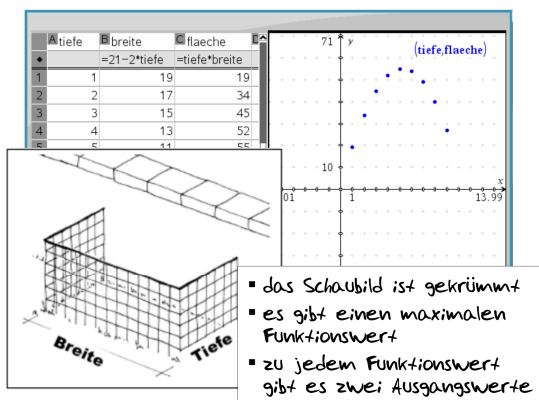


Abb. 2: Die numerische Lösung der bekannten "Kaninchenstallaufgabe" führt zur Entdeckung eines Funktionstyps mit neuen Eigenschaften, begründet diese aber nicht.

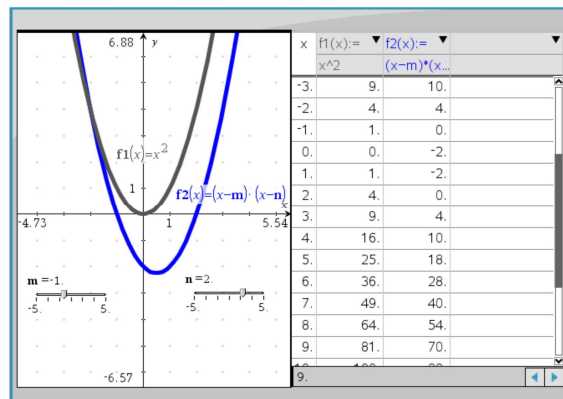


Abb. 1: Die Variation von Parametern in der Funktionsgleichung lässt auf Zusammenhänge zwischen Term, Wertetabelle und Schaubild schließen, stellt aber keine strukturellen Analogien heraus.

In der Regel schließt sich der Entdeckung eines neuen Funktionstyps eine systematische Exploration seiner Eigenschaften mittels Parametervariation an (vgl. CALIMERO 2007ff.). Eine typische Aufgabe bei gegebener faktorisierte Funktionsgleichung  $f(x) = (x-m) \cdot (x-n)$  könnte z. B. lauten, Zusammenhänge zwischen den Werten von  $n$  und  $m$ , der Gestalt und Position des Schaubildes und den tabellarisch erfassten Wertepaaren zu erkunden (Abb. 3). Die Vermutung, dass  $m$  und  $n$  wohl die Nullstellen der Funktion darstellen könnten, ist nicht dadurch begründet, dass Schaubild und Wertetabelle sie für jeden erfassten Wert von  $n$  und  $m$  bestätigt. Aus fachlicher Sicht überzeugt nur der explizite Hinweis, dass ein Produkt zweier Zahlen genau dann gleich null ist, wenn einer der beiden Faktoren null beträgt. Das ist eine arithmetisch nachvollziehbare Aussage, die in diesem Kontext dann Anwendung finden kann, wenn der Funktionsterm als ein Produkt zweier linearer Terme erkannt wird.

### C Kognitive Perspektive

*Die situationsunabhängige Aktivierung vorhandenen Wissens gelingt, wenn die situativ erworbenen Repräsentationen, Anwendungen und Kontexte vermittelt Abstraktion sachlogisch vernetzt und syntaktisch modifizierbar sind.*

Fachlich gesehen erfolgt die Sicherung neuen Wissens durch Begründung bei Bezug auf schon gesichertes Wissen. Lernpsychologisch gesehen kann man die Wissenserweiterung als ein Vernetzen des neuen Wissens mit dem vorhandenen beschreiben. Situativ erworbenes Wissen muss, damit es anwendbar und übertragbar wird, vom Kontext des Einführungsproblems abstrahiert werden (Stern & Schumacher 2004). Solches Wissen ist im

Sinne Weinerts „intelligent“, d. h. flexibel und situationsangemessen anwendbar (Weinert 2000). Lompscher und Giest (2010) beschreiben den Erwerb intelligenten mathematischen Wissen als einen Lernprozess, der mit der Dekontextualisierung des in einem oder mehreren sinnstiftenden Kontexten kennengelernten neuen Wissensinhalt beginnt und nun in abstrakter Form in verschiedenen inner- und außermathematischen Anwendungen rekontextualisiert und damit weiter vernetzt wird. Gelingt die Abstraktion vom Kontext nicht, so kann sich die Vernetzung der verschiedenen Repräsentationen und Kontexte nur an Oberflächenmerkmalen orientieren. Eine strukturelle Analogiebildung der verschiedenen Repräsentationen dagegen gelingt dann, wenn der Begriff jenseits der Kontexte erfasst wird, in denen er erscheint. Lompscher und Giest nennen dies einen „wissenschaftlichen Begriff“, der für weiterführende Erkenntnis- und Lernhandlungen die notwendige Argumentationsbasis liefert, im Gegensatz zum „Alltagsbegriff“, dem als Orientierung für praktisches Handeln im Alltag der Vergleich von Oberflächenmerkmalen ausreicht. Übertragen auf die im vorangegangenen Abschnitt diskutierte Aufgabenfolge zum Entdecken und Explorieren eines neuen Funktionstyps mit digitalen Werkzeugen hieße das, dass nach der Betrachtung der einführenden Anwendungskontexte sich ein Vergleich auf struktureller Ebene anschließen muss. Dieser erfolgt sinnvollerweise in algebraischer Form, die ein hinreichendes Abstraktions- und Transferpotential aufweist und die für die formale Wissenssicherung und -konstruktion notwendige Syntax mitbringt.

### **Grundwissen und -können für den Aufbau mathematischen Wissens mit digitalen Werkzeugen**

Nach Pinkernell und Greefrath (2011) zeichnet sich mathematisches Grundwissen als Basis für erfolgreiches Weiterlernen „durch Vernetzung, Flexibilität und Situationsunabhängigkeit in der Anwendung aus. Eine Abhängigkeit von Werkzeugen wie Rechnern oder auch Hilfsmitteln wie Formelsammlungen würde diese Auffassung widersprechen.“ Mathematisches Grundwissen ist demnach nicht als Gegensatz zu rechnergebundenen mathematischen Kompetenzen zu verstehen, sondern die Forderung nach einer hilfsmittelfreien Verfügbarkeit ergibt sich aus dem zugrunde liegenden Weinertschen Begriff des „intelligenten Wissens“ mit seiner grundsätzlichen situativen Unabhängigkeit, die einen flexiblen Wissenstransfer und damit ein erfolgreiches Weiterlernen in neuen Lernsituationen verspricht. Digitale Hilfsmittel sind insbesondere dann, wenn sie dynamisch vernetzte Repräsentationen ermöglichen, aus didaktischer Sicht sinnvolle Medien für einen verständigen Zugang zu neuen Inhalten. Damit diese ihre Funktion erfüllen können, braucht es

hilfsmittelfreies Grundwissen auch im algebraischen Bereich, damit die Vernetzung auch aus sowohl fachlich epistemologischer Sicht als auch kognitiver Perspektive gelingen kann.

## **Literatur**

CALiMERO (2007 ff.) Arbeitsmaterialien und methodische und didaktische Handreichungen, hrsg. v. Bruder R., & Weiskirch, W. WWU Münster, ZfL.

Gardiner, T. (2001). Education or CAStration? *Micromath*, (Spring), 6–8.

Giest, H., & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit*. Berlin: Lehmann.

Herget, W., Heugl, H., Kutzler, B., & Lehmann, E. (2002). Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS-Zeitalter unverzichtbar? *MNU*, Heft 8.

Pinkernell, G, & Greefrath, G. (2011): „Mathematisches Grundwissen an der Schnittstelle Schule-Hochschule.“ *MNU* 64(2), 109–113.

Stern, E., & Schumacher, R. (2004). Lernziel: Intelligentes Wissen. *Universitas*, 59(2).

Weinert, F. (2000). Lehren und Lernen für die Zukunft. *Pädag. Nachr. Rheinl. Pfalz*, 2.