

THOMAS, Charlott & PÖHLER, Birte  
Potsdam

## **Analyse von Lernendenrechengeschichten kombinatorischer Figuren**

Die Leistung der Lernenden beim Lösen kombinatorischer Aufgaben wird von den Lernenden und dem Unterricht, aber auch den eingesetzten Aufgabenstellungen beeinflusst (u. a. Höveler, 2014). Bestehende Forschung widmete sich bisher vor allem den kombinatorischen Figuren, den Modellen sowie der Art und Anzahl der zu kombinierenden Elemente. Dabei wurde bisher unter anderem gezeigt, dass Lernende Probleme haben, kombinatorische Aufgaben zu lösen. Als ein möglicher Grund für die Schwierigkeiten wurde fehlendes Verständnis der kombinatorischen Operationen konstruiert (u. a. Thomas & Pöhler, 2023). Ziel des Beitrages ist es, die Unterschiede beim Formulieren tragfähiger Rechengeschichten im Hinblick auf die zugrunde liegenden Modelle zu untersuchen.

### **Kombinatorische Figuren und zugrunde liegende Modelle**

Zu den kombinatorischen Figuren werden die Permutation, die Variation und die Kombination jeweils mit und ohne Wiederholung gezählt. Während bei der Permutation alle Elemente einer Grundmenge angeordnet werden, wird bei der Variation und der Kombination nur eine Auswahl der Grundmenge angeordnet. Aus Studien geht hervor, dass Aufgaben unterschiedlich erfolgreich gelöst werden, je nach der gesuchten kombinatorischen Figur: So wurde in Untersuchungen von Fischbein & Gazit (1988) gezeigt, dass Permutationsaufgaben am seltensten erfolgreich gelöst wurden, gefolgt von Variations- und dann Kombinationsaufgaben. Dem gegenüber stehen neuere Studien, die ergaben, dass Permutationsaufgaben am erfolgreichsten gelöst wurden, gefolgt von Kombinations- und Variationsaufgaben (u. a. Lamanna et al., 2022). Da die Permutation ohne Wiederholung ein Spezialfall der Variation ohne Wiederholung ist, bei der die Anzahl der ausgewählten Elemente gleich der Gesamtzahl der Elemente ist, wird sich im Folgenden vor allem auf diese beiden kombinatorischen Figuren (Permutation und Variation jeweils ohne Wiederholung) konzentriert. Kombinatorische Aufgaben können ferner nach den zugrunde liegenden kombinatorischen Modellen klassifiziert werden (Dubois, 1984): Selektion, Distribution oder Partition. Da sich für die Permutation und die Variation jeweils ohne Wiederholung entschieden wurde, werden nur die Selektion und Distribution betrachtet. Selektionsaufgaben beinhalten die Auswahl einer Menge von  $k$  Elementen aus einer Menge von  $n$  Elementen. Distributionsprobleme umfassen die Verteilung von  $n$  Objekten in  $m$  Zellen oder die Zuordnung von  $n$  Objekten zu  $m$

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),  
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.  
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Zellen. Die Partitionsvorstellung basiert auf der Aufteilung einer Menge  $n$  in Teilgruppen. Permutation und Variation ohne Wiederholung erfüllen dies nicht, da sie die gesamte Menge ohne Teilmengenbildung betrachten und den Fokus auf die Reihenfolge legen. In Bezug auf diese zugrunde liegenden Modelle zeigten u. a. Lamanna et al. (2022), dass es Unterschiede beim Lösen der Aufgaben auch in Abhängigkeit von den zugrunde liegenden Modellen gibt. Dabei wurde belegt, dass Distributionsprobleme weniger häufig gelöst wurden als Selektionsprobleme. Ein möglicher Grund dafür könnte die Gestaltung der Lehrbücher sein, da die kombinatorischen Figuren und die damit verbundenen Operationen in der Regel über das Selektionsmodell eingeführt werden (Höveler, 2014). Insgesamt bezogen sich die skizzierten Untersuchungen hauptsächlich auf das Lösen typischer Sachaufgaben (Wechsel von verbaler zu symbolischer Darstellung). Vor diesem Hintergrund einer bestehenden Forschungslücke befasst sich diese Arbeit mit dem Formulieren eigener Rechengeschichten (Wechsel von symbolischer zu verbaler Darstellung) von Lernenden im Alter zwischen 17 und 18 Jahren. Analysiert werden dabei die zugrunde liegenden Modelle in den tragfähigen Rechengeschichten. Dies erleichtert es, mögliche Präferenzen oder Schwierigkeiten der Lernenden bei der Anwendung dieser Modelle zu identifizieren. Im Rahmen dieses Beitrages soll daher folgende Forschungsfrage beantwortet werden: *Welche Unterschiede lassen sich beim Formulieren von tragfähigen Rechengeschichten hinsichtlich des zugrunde liegenden Modells zwischen der Permutation und der Variation ohne Wiederholung feststellen?*

### **Methodisches Vorgehen**

Im Rahmen eines Paper-Pencil-Test bekamen 161 Lernende (71w/84m/6d) den Auftrag, jeweils eine Textaufgabe zu zwei vorgegebenen Gleichungen für die Permutation bzw. die Variation ohne Wiederholung zu formulieren. Die Lernenden erhielten dafür folgende konkrete Aufgaben:

Formulieren Sie eine kombinatorische Sachaufgabe zur folgenden

$$\text{Gleichung: } 4! = 24 \text{ bzw. } 6 \cdot (6 - 1) \cdot (6 - 2) = \frac{6!}{(6-3)!} = 120.$$

Je nach Schultyp wurden Lernende der 12. (Gymnasium) bzw. der 13. Klasse (Gesamtschule) im Land Brandenburg befragt. Die 15 Klassen aus sechs Schulen wurden so ausgewählt, dass alle Lernende im letzten Schuljahr mindestens vier 90-minütige Blöcke Kombinatorikunterricht hatten und dieser zum Zeitpunkt des Tests gemäß dem Lehrplan abgeschlossen war. Die Daten wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) analysiert, mit dem Ziel, Unterschiede zwischen tragfähigen Rechengeschichten für die Permutation und Variation hinsichtlich des zugrunde liegenden Modells zu identifizieren. Ausgehend von den unterschiedlichen zugrunde liegenden

Modellen (Dubois, 1984) und in Anlehnung an die Studie von Thomas und Pöhler (im Druck) können die Lernenden eine Rechengeschichte für die Permutation bzw. Variation ohne Wiederholung (Permutationsrechengeschichte K1 bzw. Variationsrechengeschichte K2) formulieren, die entweder auf dem kombinatorischen Modell Selektion (K1.1 bzw. K2.1) oder Distribution (K1.2 bzw. K2.2) basiert. Permutations- bzw. Variationsrechengeschichten zeichnen sich dadurch aus, dass verschiedene Objekte ausgewählt bzw. platziert werden (z. B. bei 4!, wo vier unterschiedliche Steine ausgewählt werden (Selektion) oder wo vier unterschiedliche Steine zu einem vierstöckigen Turm zusammengebaut werden (Distribution)). Rechengeschichten, die nicht die Permutation bzw. Variation ohne Wiederholung adressieren, sondern etwa zur Produktregel oder zum allgemeinen Zählprinzip passen, werden hier nicht weiter betrachtet, genauso wie fehlerhafte oder unvollständige Rechengeschichten. Dies lässt sich mit dem Fokus dieses Beitrags begründen, der auf der Analyse tragfähiger Permutations- bzw. Variationsgeschichten und deren zugrunde liegenden Modellen liegt. Eine weitere unabhängige Person kodierte insgesamt 25 % des Datensatzes. Die Intercoder-Reliabilität von  $\kappa = 0,91$  wurde mit MAXQDA 2024 ermittelt.

## Ergebnisse

Insgesamt haben 161 Lernende den Auftrag erhalten, eine Rechengeschichte zu einer Gleichung für die Permutation und für die Variation jeweils ohne Wiederholung zu formulieren. Dabei haben 77 Lernende eine tragfähige Permutationsgeschichte (64,6 %) geschrieben. Der Großteil davon (52,9 %) formulierte Rechengeschichten zur Distribution, bei der alle vier Objekte angeordnet oder auf vier Plätze verteilt werden, wie in dem folgenden Beispiel: Es wird ein Foto mit vier Kindern gemacht, dabei stellen sich diese in einer Reihe auf. Wie viele verschiedene mögliche Reihenfolgen gibt es? Weiterhin haben 11,7 % Rechengeschichten zur Selektion formuliert, bei der alle vier Objekte aus einer Menge ausgewählt werden, wie in dem folgenden Beispiel: In einem Gefäß liegen vier verschiedenfarbige Bälle. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese nacheinander zu ziehen? Des Weiteren zeigt sich, dass 35 Lernende in der Lage waren, eine tragfähige Variationsgeschichte (21,7 %) zu verfassen. Dabei formulierten etwa gleich viele Lernende eine Rechengeschichte zur Selektion (12,4 %) bzw. zur Distribution (9,3 %). Bei der Selektion werden Rechengeschichten geschrieben, wo aus einer Menge von sechs Elementen drei ausgewählt wurden, wie im folgenden Beispiel: *Aus einer Urne mit sechs verschiedenen Kugeln werden drei gezogen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln zu ziehen, wenn die Kugeln nicht zurückgelegt werden?* Bei der Distribution wurden Rechengeschichten formuliert, bei denen drei von sechs Elementen angeordnet wurden, wie im folgenden

Beispiel: *Sechs Kinder laufen ein Rennen. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei der Anordnung auf dem Siegerpodest?*

## **Diskussion und Ausblick**

Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass circa zwei Drittel der Lernenden in der Lage waren, eine tragfähige Rechengeschichte zur Permutation ohne Wiederholung zu formulieren, während es ihnen deutlich schwerer fiel, eine entsprechende Variationsgeschichte zu verfassen. Dies legt nahe, dass die Lernenden ein besseres Verständnis für Aufgaben zur Permutation entwickelt haben. Möglicherweise könnte dies darauf zurückgeführt werden, dass Permutationsaufgaben auch besser gelöst werden als andere kombinatorische Figuren (u. a. Lamanna et al., 2022) und Permutation oft die erste in den Schulbüchern thematisierte Figur ist. Es wird deutlich, dass die Lernenden das Modell der Distribution bei Permutationsaufgaben präferieren. Dieses Ergebnis ist überraschend, da die Figuren in den Schulbüchern meist über das Selektionsmodell eingeführt werden (u. a. Höveler, 2014).

Diese Studie bietet insgesamt wichtige Einblicke in das Verständnis von Permutation und Variation beim Formulieren von Rechengeschichten bei Lernenden im Alter von 17 bis 18 Jahren. Folgende Studien könnten anknüpfen und daher jüngere Lernende oder Studierende untersuchen, um Einblicke in das kombinatorische Denken auf verschiedenen Lernstufen zu erhalten. Da in dieser Studie lediglich zwei kombinatorische Figuren betrachtet wurden, könnten zukünftige Studien weitere Figuren untersuchen. Da bisher nur die Lernendendaten untersucht wurden, wäre eine Analyse der Unterrichtsgestaltung wünschenswert, um die Daten differenzierter auswerten zu können.

## **Literatur**

- Dubois, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples [A Systematic Study of Simple Combinatorial Configurations]. *Educational Studies in Mathematics*, 1(15), 37–57.
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1988). The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 20(5), 193–198.
- Höveler, K. (2014). *Das Lösen kombinatorischer Anzahlbestimmungsprobleme*. (Doctoral Dissertation) Universitätsbibliothek Dortmund.
- Lamanna, L., Gea, M. M., & Batanero, C. (2022). Do Secondary School Students' Strategies in Solving Permutation and Combination Problems Change with Instruction?. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 602–616.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., überarb. Aufl.). Beltz Pädagogik.
- Thomas, C. & Pöhler, B. (im Druck). Analysis of word problems of students at university in relation to the factorial. In *Proc. of the 15th International Congress on Mathematical Education*. ICME.