SCHWARZMEIER, Sabrina & OBERSTEINER, Andreas
München

Ist Zählen eine schlechte Idee? Beziehungen zwischen dem Bruchwissen von Kindern, ihren Blickbewegungen und ihrer Leistung bei visuellen Bruchvergleichen

1. Theoretischer Hintergrund

Das Verständnis von Brüchen und Bruchgrößen (d. h. den numerischen Wert von Brüchen) ist ein zentraler Bestandteil mathematischer Bildung (z. B. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, 2024) und eine wichtige Grundlage für spätere Lerninhalte (Booth et al., 2014). Dennoch fällt es vielen Schüler*innen schwer, ein fundiertes Konzept von Bruchgrößen zu entwickeln. Eine Ursache für diese Schwierigkeiten ist der *Natural Number Bias* (Ni & Zhou, 2005). Er beschreibt die Tendenz, Eigenschaften natürlicher Zahlen auf Brüche zu übertragen, was zu typischen Fehlern führen kann. Beim Größenvergleich von Brüchen betrachten manche Schüler*innen beispielsweise die Zähler und Nenner der Brüche separat voneinander, ohne deren Verhältnis zu berücksichtigen, was zu falschen Antworten führen kann (z. B. „4/9 ist größer als 3/5, weil 4 > 3 und 9 > 5“).

Visuelle Darstellungen wie Bruchstreifen (siehe Abb. 1) könnten hilfreich sein, um das Verständnis von Bruchgrößen zu fördern. Sie sollen Schüler*innen dazu animieren, auf ihre intuitiven Fähigkeiten zum proportionalen Denken zurückzugreifen. Diese Fähigkeiten sind verfügbar, lange bevor Lernende Unterricht zu Brüchen erhalten (Jeong et al., 2007) und könnten daher von Anfang an im Unterricht zu Brüchen genutzt werden. Man unterscheidet bei Bruchstreifen zwischen den Darstellungsformen *kontinuierlich* (ohne Unterteilungen; siehe Abb. 1, rechts) und *diskretisiert* (mit Unterteilungen; siehe Abb. 1, links). Studien zeigen, dass kontinuierliche Darstellungen beim visuellen Vergleichen effizienter und mit größenbasierten Strategien bearbeitet werden. Diskretisierte Darstellungen hingegen verleiten Lernende häufig dazu, einzelne Segmente zu betrachten und Zählstrategien anzuwenden, die fehleranfällig und ineffizient sein können (Schwarzmeier et al., 2024). Besonders leistungsschwache Schüler*innen mit wenig allgemeinem Bruchwissen haben Schwierigkeiten mit diskretisierten Visualisierungen (Begolli et al., 2020). Als Grund dafür ist anzunehmen, dass Kinder mit wenig Bruchwissen häufiger Zählstrategien anwenden und folglich öfter falsche Entscheidung treffen. Beispielsweise führt in Abb. 1 links das Abzählen der Segmente und der anschließende Vergleich dieser Anzahlen zur falschen Entscheidung, weil der größere Bruch durch eine kleinere Anzahl an Segmenten dargestellt ist. Im Sinne des Natural Number Bias bezeichnen wir die

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Vergleichsaufgabe daher als *numerisch inkongruent*. Für die Annahme, dass Lernende mit wenig Bruchwissen öfter Segmente abzählen, gibt es aber noch keine eindeutige Evidenz.

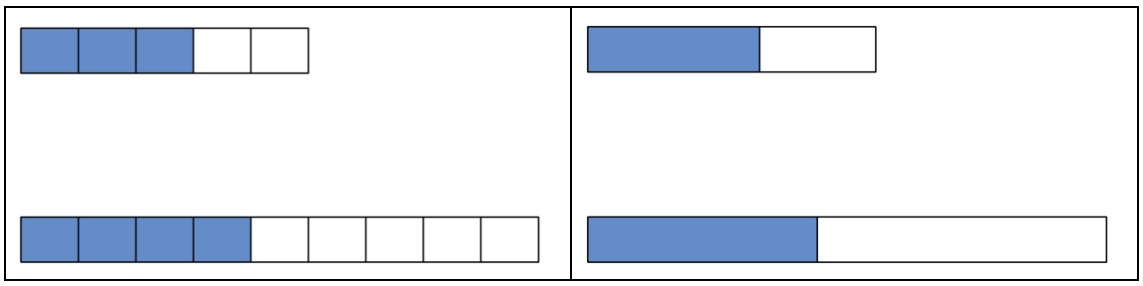

Abb. 1: Vergleichsaufgaben mit diskretisierten (links) und kontinuierlichen (rechts) Bruchstreifen

Eine weitere Schwierigkeit beim Vergleichen von Bruchvisualisierungen könnte durch die absolute Größe des markierten Bereichs entstehen. Lernende könnten diese absoluten Größen anstatt der relativen Anteile vergleichen und so zu falschen Antworten gelangen. Wir bezeichnen dieses Phänomen im Folgenden als *Size Bias*. Beispielsweise führt in Abb. 1 links und rechts das Vergleichen der absoluten Größen zur falschen Entscheidung, weil der größere Bruch durch die kleinere blaue Fläche dargestellt ist (die Vergleichsaufgaben heißen daher *size-inkongruent*). Bisherige Studien haben für den Size Bias kontrolliert (z. B. Jeong et al., 2007), allerdings nicht systematisch untersucht, ob dieser beim visuellen Größenvergleich von Brüchen für die Entscheidung tatsächlich eine Rolle spielt. Die vorliegende Studie untersucht daher den komplexen Zusammenhang zwischen Bruchwissen, Strategienutzung und Leistung auf individueller Ebene durch Clusteranalyse. Sie adressiert folgende Forschungsfragen:

FF1: Welche Gruppen an Schüler*innen lassen sich identifizieren hinsichtlich ihres allgemeinen Bruchwissens, der Anwendung von Zählstrategien und der Leistung (Lösungsraten, Antwortzeiten) beim Vergleichen von (kontinuierlichen und diskretisierten) Bruchstreifen?

FF2: In welchen Gruppen treten der Natural Number Bias bzw. der Size Bias auf?

2. Methode

67 Schüler*innen der 6. und 7. Klasse (37 weiblich, 29 männlich) aus zwei Schulformen (Mittelschule und Gymnasium) nahmen an der Studie teil. Zunächst bearbeiteten sie einen Test zum prozeduralen und konzeptuellen Bruchwissen. Im Anschluss lösten die Teilnehmenden einzeln am Computer 40 Vergleichsaufgaben mit Bruchstreifen, die entweder kontinuierlich oder

diskretisiert dargestellt waren. Die Vergleichsaufgaben waren numerisch kongruent oder inkongruent sowie size-kongruent oder size-inkongruent. Beim Lösen dieser Aufgaben wurden die Blickbewegungen mit einem Eye-Tracker aufgezeichnet und die verbalen Antworten schriftlich erfasst.

3. Ergebnisse

Bezüglich FF1 identifizierten wir mithilfe einer Clusteranalyse drei Cluster. Abb. 2 beschreibt die Cluster hinsichtlich der vier untersuchten Dimensionen *allgemeines Bruchwissen*, *Zählstrategien, Lösungsraten* und *Antwortzeiten*.

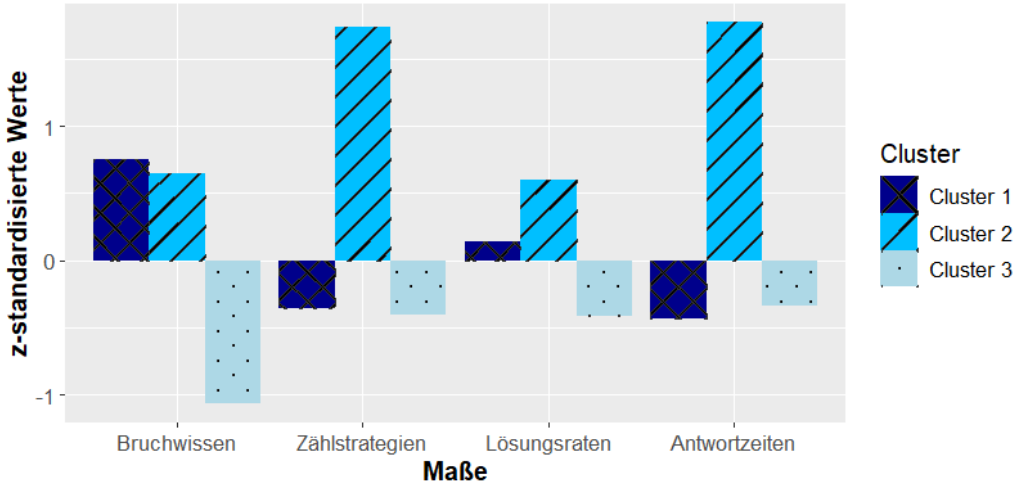

Abb. 2: z-standardisierte Werte für die drei Cluster

Die leistungsstarken größenbasierten Strategienutzer*innen (Cluster 1) hatten hohes Bruchwissen, hohe Lösungsraten, kurze Antwortzeiten und nutzten selten Zählstrategien. Diese Schüler*innen verwendeten oft effiziente, größenbasierte Strategien. Die leistungsstarken Zählstrategienutzer*innen (Cluster 2) hatten auch hohes Bruchwissen und hohe Lösungsraten, jedoch lange Antwortzeiten und verwendeten häufig Zählstrategien. Dies deutet darauf hin, dass diese Schüler*innen ihr Bruchwissen nutzten, um Visualisierungen in symbolische Brüche zu übersetzen und diese zu vergleichen. Sie erreichten damit zwar hohe Lösungsraten, waren jedoch eher ineffizient. Die leistungsschwachen größenbasierten Strategienutzer*innen (Cluster 3) hatten geringes Bruchwissen und die niedrigsten Lösungsraten, aber kurze Antwortzeiten. Überraschenderweise verwendeten sie nur selten Zählstrategien.

Die Auswertungen zu FF2 ergaben, dass Cluster 3 (und nur dieses) durch den Size Bias beeinflusst wurde. Es ist davon auszugehen, dass diese Schüler*innen die absoluten Größen der markierten Flächen verglichen, statt die relativen Anteile zu betrachten. Keines der Cluster zeigte einen Natural Number Bias.

4. Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass Zählstrategien, obwohl sie ineffizient sind, nicht notwendigerweise zu Fehlern führen, wenn sie korrekt angewendet werden. Das war insbesondere der Fall, wenn leistungsstarke Schüler*innen Zählstrategien nutzten, um die visuell dargestellten Brüche in symbolische Brüche zu übersetzen und diese anschließend korrekt zu vergleichen. Diese Vorgehensweise ist zwar korrekt, aber zeitintensiv und damit ineffizient. Überraschenderweise trat in keiner der Gruppen ein Natural Number Bias auf. Wir hatten erwartet, dass leistungsschwache Schüler*innen häufiger Zählstrategien verwenden und daher einen solchen Bias zeigen würden. Anstatt Segmente zu zählen, neigten diese Schüler*innen jedoch eher dazu, absolute Größen zu betrachten (Size Bias), was auf ein mangelndes Verständnis von relativen Anteilen hinweist.

Für den Unterricht bedeutet dies, dass kontinuierliche Visualisierungen gezielt genutzt werden könnten, um bei Zählstrategienutzer*innen größenbasierte Strategien und damit das Verständnis von Bruchgrößen zu fördern (Begolli et al., 2020; Schwarzmeier et al., 2024). Lernende mit geringem Bruchwissen benötigen zusätzlich Unterstützung, um relative Anteile besser zu verstehen. Für den didaktisch sinnvollen Einsatz kontinuierlicher und diskretisierter Bruchvisualisierungen im Klassenzimmer gibt es Vorschläge (z. B. in Schulbuchaufgaben), die aber empirisch untersucht werden sollten.

Literatur

Begolli, K. N., Booth, J. L., Holmes, C. A. & Newcombe, N. S. (2020). How many apples make a quarter? The challenge of discrete proportional formats. *Journal of experimental child psychology, 192*, 104774. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.104774

Booth, J. L., Newton, K. J. & Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of experimental child psychology, 118*, 110–118. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.09.001

Jeong, Y., Levine, S. C. & Huttenlocher, J. (2007). The Development of Proportional Reasoning: Effect of Continuous Versus Discrete Quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237–256. https://doi.org/10.1080/15248370701202471

Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Schwarzmeier, S., Obersteiner, A., Alibali, M. W. & Marupudi, V. (2024). How do people compare visualizations of fraction magnitudes? Evidence from adults' and children's eye movements with continuous and discretized tape diagrams. *The Journal of Mathematical Behavior, 75*, 101160. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101160

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung. (2024). *LehrplanPLUS - Gymnasium - 6 - Mathematik - Fachlehrpläne*. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/6/mathematik