PARAVICINI, Walther; SPRATTE, Verena & RIEHL, Friederike
Tübingen, Rostock, Göttingen

Weiterentwicklung zweier Skalen für axiombezogene Selbstwirksamkeitserwartungen von Mathematikstudierenden

Der Umgang mit Axiomen und Axiomensystemen stellt eine wichtige Facette eines gültigen Bildes von Geschichte und Aufbau der Mathematik dar und ist verknüpft mit dem kompetenten Umgang mit Beweisen. Im BzMU-Beitrag von Paravicini und Spratte (im Druck) und im zugehörigen Vortrag wurde eine vorläufige Version eines Fragebogens präsentiert, mit welchem die Selbstwirksamkeitserwartungen (SWEen) von Studierenden in Bezug auf Axiome erhoben werden sollen, um so Veranstaltungsevaluationen im Hinblick auf den Umgang mit Axiome(nsysteme)n zu ermöglichen (siehe Abb. 1). Der vorliegende Beitrag knüpft an den Vortrag und die fruchtbaren Diskussionen im letztjährigen Minisymposium zum Argumentieren und Beweisen in der Hochschulmathematik an, indem er die Weiterentwicklung des Fragebogens zu einer validen und reliablen Skala nachzeichnet. Wir unternehmen damit zugleich einen ersten Schritt in Richtung des von Street et al. (2024) festgestellten Forschungsdefizits zu Zusammenhängen verschiedener SWEen innerhalb der (Hochschul-)Mathematik.

Dabei beschreiben SWEen das Vertrauen einer Person in die eigenen Fähigkeiten, bestimmte (auch schwierige oder neue) Aufgaben in spezifischen Anforderungssituationen auszuführen (Bandura, 1997; Meinhardt, 2018). Unter Axiomen verstehen wir Aussagen, die als (nicht weiter in Frage gestellte) Grundlage für späteres logisches Schließen akzeptiert werden (Davis und Hersh, 1996). Ein kompetenter Umgang mit Axiomen geht dabei für uns über den historischen Zugang zu Axiomen als selbstevidente Wahrheiten hinaus. So ist etwa auch der Hilbertsche Blick auf Axiome als formale Setzungen ohne ontologische Bindung wichtig, bei dem Fragen der Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit relevant werden.

Validierung der Anforderungssituationen beim Umgang mit Axiomen

Ausgangspunkt für die Skala zu axiomenbezogenen SWEen ist eine entsprechende beweisbezogene Skala von Kempen (2018). Fünf ihrer Items wurden auf Axiome übertragen und mit 74 Studierenden pilotiert. Anhand ihrer Antworten zu ergänzenden, offenen Fragen zum Umgang mit und zum Blickwinkel auf Axiome wurde der Fragebogen auf zwölf Items erweitert. Die Items wurden jeweils mit einer sechs-stufigen Likert-Skala von "1 – stimmt gar nicht" bis "6 – stimmt völlig" angesetzt.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

Selbstwirksamkeitserwartungen zum Umgang mit Axiomen	Mittel	Std	korr. Trennschärfe
Ich weiß, was ein Axiom ausmacht.	3.89 (4.69)	1.38 (1.17)	0.67 (0.68)
Ich weiß, warum in der Mathematik Axiome verwendet werden.	4.95 (5.36)	1.15 (0.98)	0.69 (0.40)
Ich verstehe Axiome, wenn ich sie lese.	4.61 (4.32)	1.04 (1.01)	0.74 (0.69)
Ich weiß, wie man ein Axiom formuliert.	3.54 (4.36)	1.34 (1.05)	0.67 (0.72)
Ich kann beurteilen, ob ein Axiom plausibel ist.	3.41 (3.86)	1.17 (1.24)	0.55 (0.76)
Ich kann Axiome in Beweisen sinnvoll einsetzen.	-	-	-
Ich kann beurteilen, ob ein Axiom geeignet ist, wichtige Aspekte einer Situation abzubilden.	-	-	-
Ich kann (widerspruchsfreie) Modelle für ein gegebenes Axiomensystem finden.	-	-	-
Ich kann die logische Unabhängigkeit von Axiomen prüfen.	-	-	-
Ich kann Gründe für und gegen die Wahl bestimmter Axiome angeben.	-	-	-
Ich kann die Wahl bestimmter Axiome begründen.	-	-	-
Ich kann mir Axiome gut merken.	-	-	-

Abb. 1: Pilotierung und Erweiterung der 5-Item-Skala zu axiombezogenen SWEen aus dem Vortrag von Paravicini und Spratte (im Druck)

Aufbauend auf diesen zwölf Items wurden 36 (von 305 eingeladenen) Dozierenden in einer Online-Umfrage zu axiomenbezogenen Anforderungssituationen befragt. Diese Lehrpersonen bewerteten die zwölf Items hinsichtlich ihrer Relevanz in zwei ihrer Veranstaltungen und gaben weitere veranstaltungsspezifische Anforderungen an. Mit diesen Angaben wurde im Sinne einer Inhaltsvalidierung überprüft, ob alle wesentlichen Bereiche im Umgang mit Axiomen von unseren Items abgedeckt sind und umgekehrt alle genannten Bereiche tatsächlich relevante Anforderungen darstellen. Die Ergebnisse zeigen eine hohe Spannweite der Relevanz einzelner Anforderungssituationen zwischen den Veranstaltungen. Allerdings zeigt sich, dass jedes der zwölf Items für mehrere Lehrveranstaltungen hoch relevant ist und somit grundsätzlich eine sinnvolle Anforderung abbildet. Aus den von den Dozierenden ergänzten Anforderungen konnten zudem neun ergänzende Items generiert werden (vgl. Abb. 2).

Pilotierung des erweiterten Erhebungsinstruments

Die Pilotierung des resultierenden Instruments mit 21 Items wurde als Online-Umfrage mit 86 (Fach- und Lehramts-)Mathematikstudierenden dreier Universitäten im Rahmen von vier Lehrveranstaltungen des zweiten Semesters durchgeführt. Eine explorative Faktoranalyse zeigt eine zweidimensionale Struktur der Items, wobei eines auszuschließen ist (siehe Abb. 2). Die beiden Skalen zeigen jeweils gute Skalenwerte mit leichter Tendenz zur Itemredundanz (Cronbachs $\alpha = 0.91$ bzw. 0.88 für F1 bzw. F2). Folglich handelt es sich um ein reliables Erhebungsinstrument.

Faktor 1: SWEen zum Umgang mit gegebenen Axiomen(systemen)	F1	F2	Mittel	Std	TrS
Ich weiß, was ein Axiom ausmacht.	**0.62**	0.01	3.72	1.22	0.59
Ich weiß, warum in der Mathematik Axiome verwendet werden.	**0.68**	−0.05	4.73	1.23	0.60
Ich verstehe Axiome, wenn ich sie lese.	**0.53**	0.15	4.16	1.24	0.61
Ich weiß, wie man ein Axiom formuliert.	**0.68**	0.03	4.44	1.32	0.65
Ich kann beurteilen, ob ein Axiom plausibel ist.	**0.61**	0.19	3.73	1.13	0.68
Ich kann Axiome in Beweisen sinnvoll einsetzen.	**0.72**	0.04	4.03	1.30	0.69
Ich kann mir Axiome gut merken.	**0.78**	−0.23	3.70	1.35	0.57
Ich kann prüfen, ob Axiome in Beweisen richtig verwendet werden.	**0.71**	0.11	4.03	1.24	0.75
Ich kann Beispiele von Strukturen nennen, in denen bestimmte Axiome erfüllt sind.	**0.53**	0.08	4.03	1.25	0.57
Ich kann Beispiele von Strukturen nennen, in denen bestimmte Axiome nicht erfüllt sind.	**0.48**	0.20	3.79	1.28	0.61
Ich kann Axiome mit bekannten Beispielen verknüpfen.	**0.75**	0.02	4.01	1.10	0.75
Ich kann Axiome mit neuen Beispielen verknüpfen.	**0.45**	0.37	3.72	1.08	0.65
Faktor 2: SWEen zum Aufstellen von Axiomen(systemen)	**F1**	**F2**	**Mittel**	**Std**	**TrS**
Ich kann beurteilen, ob ein Axiom geeignet ist, wichtige Aspekte einer Situation abzubilden.	0.23	**0.57**	3.29	1.04	0.68
Ich kann (widerspruchsfreie) Modelle für ein gegebenes Axiomensystem finden.	−0.12	**0.92**	2.81	1.22	0.76
Ich kann die logische Unabhängigkeit von Axiomen prüfen.	0.25	**0.54**	3.27	1.27	0.68
Ich kann Gründe für und gegen die Wahl bestimmter Axiome angeben.	0.12	**0.58**	3.24	1.17	0.64
Ich kann die Wahl bestimmter Axiome begründen.	0.31	**0.55**	3.52	1.27	0.72
Ich kann nachweisen, dass Axiome zueinander widerspruchsfrei sind.	0.04	**0.68**	3.43	1.27	0.67
Ich kann nachweisen, dass Axiome sich widersprechen.	0.06	**0.57**	3.3	1.23	0.53
Ich kann selbst Axiome aufstellen.	0.04	**0.61**	2.52	1.35	0.57
Wegen unklarer Faktorladung ausgeschlossene Items	**F1**	**F2**	**Mittel**	**Std**	**TrS**
Ich kann Axiome als Objekte metamathematischer Untersuchungen begreifen.	0.31	0.28	3.53	1.42	–

Abb. 2: Pilotierung des 21-Item-Instruments zu axiombezogenen SWEen mit zwei Teilskalen, zugehörigen Faktorladungen, Itemmittelwerten und –standardabweichungen sowie korrigierten Trennschärfen der Teilskalen

Zur Prüfung der Konstruktvalidität wurden zusätzlich die beweisbezogenen SWEen nach Kempen (2018) und das universitäre, mathematische Selbstkonzept nach Rach et al. (2021) erhoben. Hier ergeben sich erwartungskonform höhere Korrelationen der axiomebezogenen SWEen mit den beweisbezogenen SWEen (F1: $r = 0.734$; F2: $r = 0.567$, jeweils $p < 0.001$) als mit dem universitären, mathematischen Selbstkonzept (F1: $r = 0.499$; F2: $r = 0.510$, jeweils $p < 0.001$).

Ausblick

Mit den beiden in Abbildung 2 präsentierten Skalen steht nun ein reliables und valides Instrument zur Erhebung der axiombezogenen SWEen zur Verfügung. Die Items machen eine weitere, in zwei Faktoren unterscheidbare Facette mathematikspezifischer SWEen messbar und ermöglichen somit

Zusammenhänge verschiedener SWEen innerhalb der (Hochschul-)Mathematik zu analysieren (Street et al., 2024). Mit den beiden Skalen kann zudem der Einfluss etwa von Lehrveranstaltungen auf die axiomenbezogenen SWEen untersucht werden. Da SWEen der Studierenden unter anderem ihre Wahl von Lernangeboten und die Ausgestaltung ihres Lernverhaltens (z. B. Ausdauer) beeinflussen (Bandura, 1997), kann das neue Messinstrument zu einem besseren Verständnis von Lernbiografien und zur Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik beitragen.

Im obengenannten Minisymposium des vergangenen Jahres wurde bereits diskutiert, dass man die Unterscheidung von fundamental-charakterisierenden Axiomensystemen (etwa für die euklidische Geometrie) und solchen, die eine Vielzahl von Phänomenen abstrahierend beschreiben (etwa Ringe, Körper oder topologische Räume), im Blick behalten sollte (Freudenthal, 1963, S. 7). Aus pragmatischen Gründen untersuchen wir SWEen bislang gleichzeitig für beide Arten von Axiomensystemen. Die Unterscheidung erscheint uns aber für die didaktische Behandlung in Vorlesungen hoch relevant und im gesammelten Datensatz sind hierzu weitere, noch nicht ausgewertete Informationen enthalten, welche Eingang in eine weiterreichende Untersuchung gemeinsam mit Martin Sauer finden sollen.

Literatur

Bandura, A. (1997). *Self-Efficacy: The Exercise of Control*. W. H. Freeman and Company.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1996). *Erfahrung Mathematik* (2., korrigierter Nachdr. der Sonderausg). Birkhäuser.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht 9*(4), 5–29.

Kempen, L. (2018). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. https://digital.ub.uni-paderborn.de/ubpb/urn/urn:nbn:de:hbz:466:2-30405

Meinhardt, C. (2018). *Entwicklung und Validierung eines Testinstruments zu Selbstwirksamkeitserwartungen von (angehenden) Physiklehrkräften in physikdidaktischen Handlungsfeldern*. https://doi.org/10.30819/4712

Paravicini, W. & Spratte, V. (im Druck). Axiome als Grundlage mathematischer Beweise – Annäherung an die Perspektive von Studierenden. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2024.

Rach, S., Ufer, S. & Kosiol, T. (2021). Die Rolle des Selbstkonzepts im Mathematikstudium – Wie fit fühlen sich Studierende in Mathematik? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 24*(6), 1549–1571. https://doi.org/10.1007/s11618-021-01058-9

Street, K. E. S., Malmberg, L.-E. & Schukajlow, S. (2024). Students' mathematics self-efficacy: a scoping review. *ZDM – Mathematics Education*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01548-0