

KURTZMANN, Grit
Greifswald

Vorschlag zu einem progressiven Kompetenzaufbau zur Behandlung kombinatorischer Probleme in der Primarstufe

Problemlage

"Im Mathematikunterricht wird ständig auf vorangehende Inhalte und Betrachtungen zurückgegriffen. Für tragfähige Begriffsentwicklung ist es wichtig, dass diese vertikale Vernetzung bewusst gestaltet und für Schülerinnen und Schüler erfahrbar wird." (Büchter, 2014, S. 2). Aus diesem Grund sollte Kindern in jeder Klassenstufe Zeit zum Lösen kombinatorischer Aufgaben zur Verfügung gestellt werden, damit sie im Sinne eines spiralförmigen Curriculums die Lerninhalte wieder aufgreifen und vertiefen können. Das Lösen kombinatorischer Aufgaben stellt aber eine erhebliche Herausforderung für die meisten Lernenden in der Schule dar, denn jede dieser Aufgaben ist auch eine offene Aufgabe und erfordert zunächst einen hohen Grad an Problemlöse- bzw. Modellierungskompetenz. Außerdem lassen sie oft auch unterschiedliche Interpretations- und Lösungsmöglichkeiten zu und erfordern logisches Denken und Kreativität der Lernenden (Sill & Kurtzmann, 2019). Aus diesem Grund werden sie oftmals auch in der Begabtenförderung eingesetzt und dienen als Indikator für mathematisch befähigte Schülerinnen und Schüler (Lack, 2010). Herzog et al. untersuchten bei 548 Drittklässlern Lösungen und Lösungsverhalten zu kombinatorischen Aufgaben. Sie stellten unter anderem fest, dass ca. ein Drittel der Kinder keine der sechs gestellten Aufgaben lösen konnten (Herzog et al., 2017).

In zahlreichen Lehrerfortbildungen zum Thema "Stochastik in der Grundschule" in Mecklenburg-Vorpommern in den letzten Jahren wurden kombinatorische Aufgaben und Lösungsstrategien für den Einsatz im Unterricht besprochen und erprobt. Als Ergebnis einer Befragung der Lehrkräfte während der Fortbildungen wurde festgestellt, dass diese teilweise selbst unsicher beim Lösen kombinatorischer Aufgaben sind und sie deswegen nur wenig im Unterricht einsetzen. Es entstand der Wunsch nach einem progressiven Kompetenzaufbau für die Kombinatorik, so dass die Lernenden im Sinne des Spiralprinzips ihr Wissen in jeder Klassenstufe anreichern und vertiefen können. Mit der Methode der konstruktiven Entwicklungsforschung (Zech & Wellenreuther, 1992) wird im Folgenden ein erster Ansatz aufgezeigt und ein Beitrag im Rahmen stoffdidaktischer Forschung zur Diskussion gestellt. Die Entwicklung eines Konzepts folgt dabei einem zyklischen Prozess in mehreren Schritten. Das Konzept wird getestet angepasst und auf der Grundlage der Erkenntnisse aus der Praxis weiterentwickelt (Wellenreuther, 2000).

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
<https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0>

Zur Behandlung kombinatorischer Aufgaben im Unterricht

Die Bildungsstandards geben die bundesweit zu erreichenden Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe vor. Ziel ist das Lösen einfacher kombinatorischer Fragestellungen durch systematisches Probieren oder andere heuristische Hilfsmittel (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022).

Neben dem progressiven Kompetenzaufbau beim Lösen kombinatorischer Aufgaben, ist dieser auch im Bereich der prozessbezogenen Kompetenzen im Problemlösen und Modellieren notwendig. Durch die unterschiedlich möglichen Deutungen der Aufgabenstellungen liegt ein Fehlerschwerpunkt insbesondere beim Aufbau des Situationsmodells (Franke & Ruwisch, 2010). Die Kinder sollten im Mathematikunterricht Methoden zum "Verstehen des Problems" in der Aufgabe im Sinne des Problemlöseprozesses nach Polya erleben und erlernen (Pólya, 2022). Hierzu finden sich in der didaktischen Literatur eine Vielzahl von Möglichkeiten, die vor der Bearbeitung speziell kombinatorischer Aufgaben den Kindern zur Verfügung stehen sollten (Bongartz & Verboom, 2007).

Vorschlag zum progressiven Kompetenzaufbau

Der kombinatorische Aspekt der Multiplikation ist das erste Modell, welches die Kinder in der zweiten Klasse im Rahmen der verschiedenen Operationsvorstellungen der Multiplikation erlernen (Padberg & Benz, 2011). Diese Vorstellung ist zwar nicht für die Einführung der Multiplikation geeignet, wohl aber für die Einführung in das Gebiet der Kombinatorik.

Das Modell bietet aufgrund der Vielzahl an Aufgabenvarianten, die sowohl schnell differenziert als auch mit realitätsnahen und sinnvollen Inhalten angereichert werden können, einen einfachen Zugang in kombinatorische Problemstellungen. In der ersten Begegnung mit kombinatorischen Aufgaben sollten Kinder zunächst auf enaktiver Ebene erste Erfahrungen sammeln. Dazu können die zu kombinierenden Objekte den Kindern zur Verfügung gestellt werden, damit sie die verschiedenen Möglichkeiten legen können. In der Kombinatorik wird nach der Anzahl der Möglichkeiten mit der Frage "Wie viele Möglichkeiten gibt es?" gefragt. Kinder sind eher daran interessiert, welche Möglichkeiten es gibt. Beispiele sind das Zusammensetzen verschiedener Figuren wie Häuser oder (Fantasie)tiere oder das Bekleiden von Puppen oder Menüzusammenstellungen. Um den Kindern realistische und sinnvolle Aufgabenstellungen zu bieten, ist zeitgemäß auch die Möglichkeit der Erstellung eines Avatars sinnvoll, da dieser aus vielen digitalen Anwendungen und Lernprogrammen bekannt ist. In den Unterrichtserprobungen

stellten wir fest, dass die Kinder häufig beim mehrfachen Probieren schon erste Ideen für ein systematisches Probieren finden.

Nach dieser Phase ist die Hinführung auf ein systematisches Vorgehen sinnvoll, denn mit Erhöhung der Anzahl von Möglichkeiten ergibt sich die Notwendigkeit, diese systematisch festzuhalten, um alle Möglichkeiten zu finden und dabei auch keine Möglichkeit doppelt zu zählen. Es gibt mehrere Möglichkeiten zur Hinführung, zum Beispiel den Streifenschieber, der nach dem Tachometerprinzip arbeitet, das Verbinden der Möglichkeiten als Vorbereitung auf das Baumdiagramm oder eine Tabelle. Sinnvoll ist es, den Kindern verschiedene Varianten anzubieten, damit sie sich einen passenden Weg auswählen können. In dieser Phase entdecken die Kinder meist auch die Multiplikationsaufgabe in ihren ikonischen Darstellungen und der kombinatorische Aspekt der Multiplikation wird als Operationsvorstellung vertieft.

In der weiteren Arbeit mit kombinatorischen Aufgaben wird die Lösungskompetenz mit dem Baumdiagramm ergänzt. Hier erfolgt dann auch der Übergang von der ikonischen in die symbolische Ebene, die Kinder erkennen bei der vielfältigen Bearbeitung der Aufgaben mithilfe des Baumdiagramms wieder die Multiplikationsaufgabe. Ein nächster Schritt könnte dann der Übergang zu anderen Modellen der Kombinatorik wie zum Beispiel Permutation sein. Die Kinder können hier entdecken, dass sie ihre Objekte nun einer und nicht mehrerer Mengen entnehmen. Durch das bereits vorhandene Repertoire an Lösungsstrategien, kann es ihnen leichter fallen, diese nun analog auch auf andere Aufgabentypen zu übertragen.

Eine weitere Möglichkeit ist die Heranführung an eine rechnerische Lösung kombinatorischer Aufgaben mithilfe der Produktregel. Die Strategie des Lösen über das Baumdiagramm ist dabei eine wichtige Voraussetzung, denn hier werden die einzelnen Handlungsschritte bereits zeichnerisch festgehalten. Beim verständnisorientierten Lesen stellen sich die Kinder dabei die einzelnen Handlungsschritte vor aus der Aufgabe vor, um dann die Anzahl der Möglichkeiten zu multiplizieren (Kurtzmann, 2015). Für diese Lösungsstrategie eignen sich neben dem kombinatorischen Aspekt der Multiplikation Aufgaben der Permutation und der Variation mit und ohne Wiederholung.

Fazit

Der Einsatz zunächst nur eines Typs kombinatorischer Aufgaben bietet den Vorteil, dass sich die Kinder im Sinne des Prinzips der Isolation der Schwierigkeiten auf diesen Aufgabentyp konzentrieren und hieran die unterschiedlichen Lösungsstrategien erlernen und festigen können (Montessori, 2012). Für die Lehrkraft bietet es den Vorteil, dass durch die Veränderung der Anzahl der Mengen oder der Anzahl der Objekte in jeder Menge eine schnelle

Differenzierung erfolgen kann, so dass Kinder gerade im inklusiven Unterricht individuell mit einer Aufgabenstellung gefordert und gefördert werden können. Die Kritik an diesem Vorschlag kann darin bestehen, dass mit dem Arbeiten an nur einem Aufgabentyp die Gefahr der schematischen, verständnisarmen Abarbeitung gefördert wird. Dem steht entgegen, dass Kinder zuerst Strategien und Hilfsmittel erlernen und verinnerlichen müssen, damit sie diese analog auf andere Aufgabentypen übertragen können.

Im Prozess der konstruktiven Entwicklungsforschung sind die Vorschläge der erste Schritt in der Erstellung eines Lernkonzepts. Anschließend folgen die Schritte der Begutachtung, Erprobung und Evaluation.

Literatur

- Bongartz, T., & Verboom, L. (2007). *Fundgrube Sachrechnen. Unterrichtsideen, Beispiele und methodische Anregungen für das 1. bis 4. Schuljahr, 1*, 19–27.
- Büchter, A. (2014). Das Spiralprinzip. Begegnen-Wiederaufgreifen-Vertiefen. *Mathematik lehren*, 31(182), 2–9.
- Franke, M., & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl. 2010). Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2695-6>
- Herzog, M., Ehlert, A., & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2(38), 263–289.
- Kurtzmann, G. (2015). Vom Baumdiagramm zur Produktregel. Kombinatorische Aufgabenstellungen rechnerisch lösen. *Mathematik differenziert*, 18–25.
- Lack, C. (2010). *Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. Und 2. Schuljahr*. Vieweg+Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9630-8>
- Montessori, M. (2012). *The absorbent mind*. Lexington, KY.
- Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung* (4. erweiterte, stark überarbeitete Auflage). Spektrum, Akademischer Verlag.
- Pólya, G. (2022). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (second edition, reissued). Penguin Books.
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*.
- Sill, H.-D., & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe* (1. Aufl. 2019). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-59268-7>
- Wellenreuther, M. (2000). *Quantitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft: Eine Einführung*. Juventa.
- Zech, F., & Wellenreuther, M. (1992). Konstruktive Entwicklungsforschung: Eine zentrale Aufgabe der Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(2–3), 143–198. <https://doi.org/10.1007/BF03338777>