PETR EISENMANN, Usti n. L., Tschechische Republik

Ein toller Körper und eine komische Kurve

Bei der Behandlung der Themen *Zahlenfolgen* und *Der Grenzwertbegriff* in der gymnasialen Oberstufe werden die Schüler auch mit der geometrischen Reihe bekannt gemacht (s. z. B. das Lehrbuch Jahnke, 1991). Der folgende Beitrag schildert zwei Aufgaben, bei deren Lösung wir zu einem komischen Paradox gelangten, der in der Klasse eine lebhafte Diskussion hervorrief.

Die Aufgabe 1:

Es sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 (die Figur K_0 in Abb. 1). Teilen wir jede Seite dieses Dreiecks in drei gleich lange Strecken und über der mittleren Strecke errichten wir ein neues gleichseitiges Dreieck. Die mittlere Strecke lassen wir dann weg. So entsteht die Kurve K_1. An allen zwölf Strecken dieser Kurve führen wir denselben Vorgang durch. So entsteht die Kurve K_2. Dieses Verfahren können wir weiterhin wiederholen. Bestimmen Sie die Länge l_1 der Kurve K_1, l_2 und l_n (der Kurve K_n).

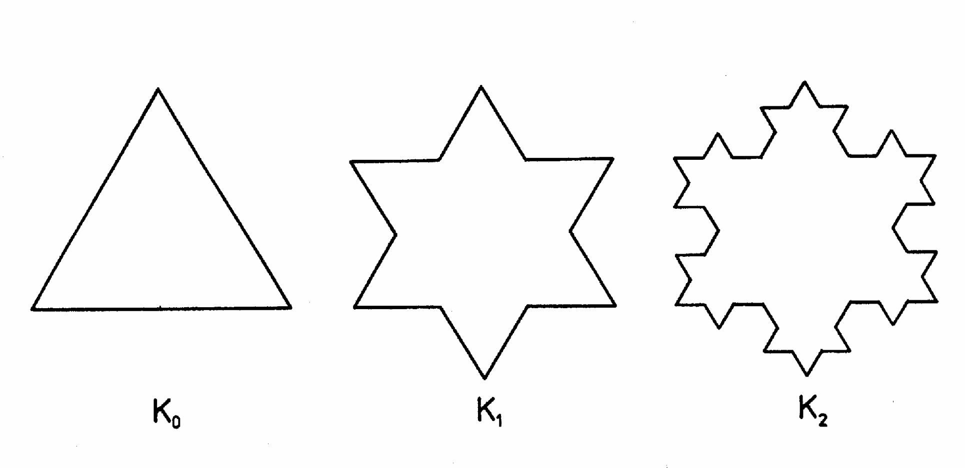

Abb.1

Den Schülern bereitete die Lösung dieser Aufgabe keine große Schwierigkeiten. Es gilt

$$l_0 = 3$$
$$l_1 = 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$
$$l_2 = 3 \cdot \left(4 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{9}\right)\right) = 3 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{3}$$

$$l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Mit den Schülern diskutierten wir über die Eigenschaften der Folge l_n. Schon aus der Konstruktion der Folge der Kurven K_n ist offensichtlich, dass jede nächste Kurve eine größere Länge als die vorhergehende hat – die Folge l_n sollte streng monoton steigend sein. Das stimmt - l_n ist eine geometrische Folge und ihr Faktor ist größer als 1. Das bedeutet aber, dass l_n beliebig groß sein kann. Wenn das Ausgangsdreieck K_0 die Seitenlänge 1m hätte, wäre z. B. die Kurve K_{10} ungefähr 53 m lang und K_{69} hätte die Länge cca 1,2 Million km. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty .$$

Wenn man in dem oben beschriebenen Vorgang weiter unbegrenzt fortfährt, wird als Grenzwert der Folge K_n eine komische Kurve entstehen. Sie hat eine unendliche Länge und dabei ist sie geschlossen und liegt in einem begrenzten Teil der Ebene!

Dazu meldete sich Stefan mit einer Frage:

Wenn aber diese Kurve eine unendliche Länge haben soll, muß sie unedlich viele Strecken enthalten. Oder nicht?

Einige Schüler stimmten mit ihm überein, aber Lisa opponierte:

Nein, wir zerdritteln doch nach und nach jede von ihrer Strecken und immer errichten wir über ihr in der Mitte ein kleines Dreieck.

Da entstehen Dir aber doch wieder Strecken – vier neue Strecken

reagierte Stefan erregt.

Na ja, aber diese Strecken teile ich wieder in drei neue und über der mittleren … und so weiter und so weiter

unterbrach ihn Lisa schroff. Da eilte dem Stefan sein Freund Fritz zu Hilfe:

Und woraus setzt sich also eigentlich die Kurve zusammen? Wenn nicht aus den Strecken, woraus denn dann?

Lisa schwieg betroffen und so sprach Fritz, schon etwas linder, weiter:

Da bleiben dort also nur die Punkte, in denen die Kurve bricht? Da setzt sie sich nur aus diesen Punkten zusammen, sie hat also nur diese Brüche und Stacheln? Das wäre eine komische Kurve, nicht wahr?

Nun musste ich schon in die Diskussion eingreifen. Ich erklärte den Schülern, dass die Kurve wirklich überraschende Eigenschaften hat. Im Jahre

1906 publizierte sie der schwedische Mathematiker Niels Fabian Helge von Koch (1870 – 1924). Es handelt sich um eine ebene, geschlossene Kurve unendlicher Länge, zu der in keinem Punkt eine Tangente angebracht werden kann. Sie enthält also wirklich keine Strecken, sie ist überall stachelig.

Die Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Volumen eines Körpers, der in Abb. 2 von der Seitensicht angedeutet ist. Der Körper besteht aus Zylindern, wobei der erste den Halbmesser $\frac{1}{2}$ und die Höhe 2 hat. Der zweite Zylinder hat den halben Halbmesser und die doppelte Höhe, und so geht es unbegrenzt weiter.

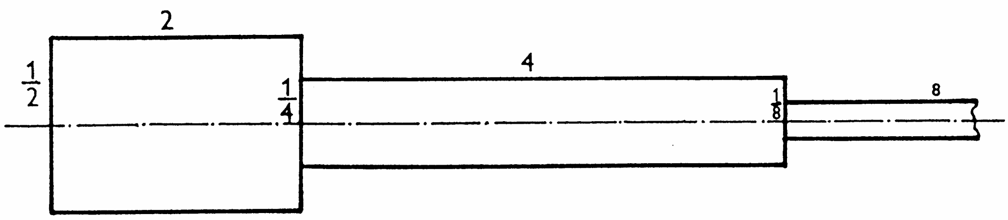

Abb. 2

Der Halbmesser des n-ten Zylinders gleicht 2^{-n}, die Höhe 2^n und das Volumen

$$V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot 2^n = \frac{\pi}{2^n}.$$

Der ganze Körper hat also das Volumen

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \pi.$$

Das Ergebnis rief in der Klasse Verwunderung hervor. Dieser unendlich lange Körper hat ein endliches Volumen! Das ist komisch. Ein Mädchen meldete sich mit folgender Frage: „Und der Oberflächeninhalt? Hat der Körper auch einen endlichen Oberflächeninhalt?“

Das stellten wir schnell fest:

Der Mantelflächeninhalt des n-ten Zylinders ist

$$S_n = 2\pi \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 2\pi.$$

Der Oberflächeninhalt des ganzen Körpers ist also größer als

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi = 2\pi + 2\pi + 2\pi + ... \quad ,$$

was keine endliche reelle Zahl ist. Darauf reagierte ein Junge:

Das ist ein toller Körper! Er hat einen unendlichen Oberflächeninhalt. Wir könnten ihn zum Beispiel nie färben, weil es in der Welt so viel Farbe einfach nicht gibt. Aber – wenn der Körper hohl wäre, könnten wir doch sein Inneres einfach durch Eingießen von π Liter Farbe färben. Das ist unglaublich!

Genauere Reaktionen der Gymnasialschülern beschreiben die Ergebnisse der Forschung (Eisenmann 2000).

Literatur

Eisenmann, P. (2000). Test des infinitesimalen Denkens. *mathematica didactica*, *23*, 63 – 71.

Jahnke, Th. (1991). *Mathematik, Vorstufe des Kurssystems*. Düsseldorf: Cornelsen.