Emese VARGYAS, Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

# Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?

Zu Problemlösen und Begriffsentwicklung stellen wir die Entwicklung einer Lernumgebung für eine Veranstaltung in Fachdidaktik Geometrie vor. Im Zentrum steht das Verhältnis zwischen allgemeinen Methoden der Darstellung und Vermittlung geometrischer Inhalte und ihrer inhaltlichen Durchdringung. Mit Methoden meinen wir sowohl pädagogische als auch mathematische Aspekte einbeziehende Herangehensweisen wie Wahl und Wechsel der Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch), Nutzung von Strukturierungshilfen (z.B. Farben, Symbolik, Anordnung, didaktische Sequenzierung), stoffdidaktische problemorientierte Vorgehensweisen (z.B. Zurückführen auf eine bekannte Aufgabe, Spezialisierung, Verallgemeinerung, Suche nach Invarianten, Variation, Vorwärts-Rückwärtsarbeiten) und stoffdidaktisch begriffsentwicklungsorientierte Sichtweisen (z.B. abbildungsgeometrische und euklidische Sichtweisen).

In vier Vorlesungen und 4 Übungen wurden diese Methoden am Beispiel folgender Satzgruppen erklärt und angewandt:

- Winkelsumme im Dreieck, Basiswinkelsatz
- Satz des Thales, Satz vom Umfangswinkel, Sehnen-Tangenten-Satz
- Sehnensatz, Sekantensatz, Sekanten-Tangenten-Satz
- Umkreis von Drei- und Vierecken, verschiedene Definitionen von Sehnenvierecken
- Satz des Pythagoras, Kathetensatz, Höhensatz
- Quadrieren von Flächen, Kongruenzabbildungen, flächenerhaltende Abbildungen (Scherungen)

In den Übungen wurden Variationen zu ausgewählten Themen in Form von Lernstationen und die Entwicklung eines Themas aus vorgegebenen Variationen (z.B. verschiedene Kontextualisierungen, Darstellungsebenen, Objektgenesen) unter Anleitung erarbeitet. In zwei abschließenden Übungen einschließlich einer Woche Vorbereitungszeit erarbeiteten die Studenten in kleinen Gruppen Variationen zum Thema Sehnensatz.

Der Sehnensatz steht in enger Beziehung zu Zusammenhängen im Sehnenviereck, im rechtwinkligen Dreieck, zu Ähnlichkeit am Kreis, dem geometrischen Wurzelziehen und dem Satz vom Umfangswinkel. Das Thema gab daher die Möglichkeit, die im Vorfeld betrachteten inhaltlichen Zusammenhänge aus der Perspektive des Sehnensatzes zu entwickeln.

Alle Gruppen erarbeiteten interessante Variationen, vor allem in Form verschiedener Darstellungsebenen des Sehnensatzes und arithmetischer (Wertetabellen und Nachmessen) und geometrischer experimenteller Einstiege mit DGS. Entgegen unserer Erwartung waren alle Variationen aus pädagogischer oder allgemein mathematikdidaktischer Perspektive entwickelt worden. Fragestellungen, die aus der inhaltlichen Auseinandersetzung mit dem Sehnensatz resultieren, wie Variation der Daten und des Beweises, geometrische Interpretation der Produkte, Umkehrung der Aussage wurden in den Gruppen nicht diskutiert und konnten auf Nachfrage nicht beantwortet werden.

Freudenthal zitiert in einem etwas anderen Kontext eine Anzeige eines französischen Provinzblattes: Ein Schwimmlehrer gesucht, der selber schwimmen kann (Freudenthal, 1973). Es schien, dass unsere Schwimmübungen nur uns selbst ins Wasser gezwungen, die Studenten aber am Beckenrand in aktiver Beobachterposition belassen hatten. Methodische Untersuchungen und Beschäftigung mit der Vermittlung des Sehnensatzes hatten nicht zwangsläufig zur Auseinandersetzung mit den im Sehnensatz formulierten mathematischen Zusammenhängen geführt.

Für die mathematische problemorientierte Erarbeitung des Sehnensatzes (Nassübung) erwies sich eine klassische stoffdidaktische Herangehensweise als nützlich: Die Formulierung eines guten mathematischen Problems.

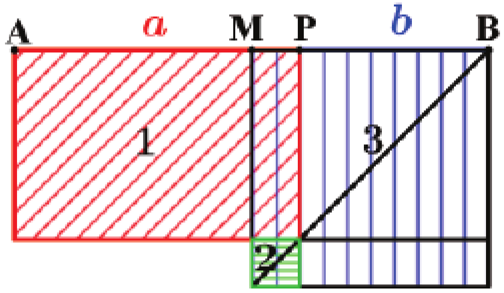
**Um welche Flächen geht es beim Sehnensatz?**

Die Formulierung des Sehnensatzes ist eine Aussage über die Gleichheit der Produkte der Sehnenabschnitte zweier sich schneidender Sehnen eines Kreises. Der Beweis wird meistens durch den Nachweis der Ähnlichkeit der durch die Sehnenabschnitte gebildeten Dreiecke geführt, da diese Methode leicht auf die Situation variierter Schnittpunkte beim Sekantensatz und beim Sekanten-Tangenten-Satz übertragen werden kann.

Für den Ähnlichkeitsbeweis ist die algebraische Umformung der Gleichheit der Produkte der Längen der Sehnenabschnitte in eine Gleichheit ihrer Verhältnisse notwendig. Eine analoge Verfahrensweise ist den Studenten für die Ähnlichkeitsbeweise zur Satzgruppe des Pythagoras bekannt. In der Geometrie werden Produkte von Streckenlängen als Flächen interpretiert. Für den Satz des Pythagoras und die Kathetensätze führen die Interpretationen als Flächen zu anschaulichen Beweisen durch Scherung und Kongruenzaussagen. Die Frage nach einer Beweisführung des Sehnensatzes durch Interpretation der Produkte als Flächen ist also durchaus nachvollziehbar.

## Euklids Elemente inspirieren einen Lösungsansatz

Ein eigener Beweis des Sehnensatzes durch Flächengleichheit der durch die Sehnenabschnitte gebildeten Rechtecke ist anspruchsvoll, wie der interessierte Leser selbst erfahren kann. Der Sehnensatz wird in Euklids Elementen Buch 3 Satz 35 bewiesen (Fitzpatrick, 2007). Als Hilfestellung stellten wir unseren Studierenden Auszüge aus den entsprechenden Büchern zur Verfügung.

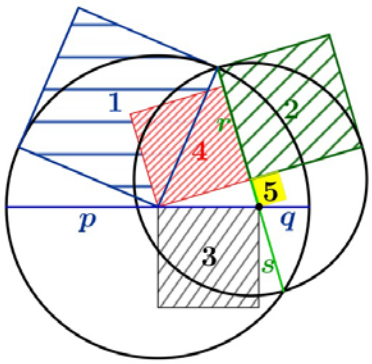



$$Fl_1 + Fl_2 = Fl_3$$

Wesentlich für den Beweis des Sehnensatzes durch Flächengleichheit ist Satz 5 aus Buch 2, welchen unsere Studenten im Kontext des Quadrierens ohne Verweis bereits gesehen hatten. Die Erarbeitung des Euklidischen Beweises anhand historischer Quellen mit der Zielstellung Antwort auf eine aktuelle Fragestellung zu finden, eröffnet neben der historischen eine handlungs- und durch mathematische Probleme motivierte Perspektive. Die aus historischer Sicht unwissenschaftliche Umformulierung des Euklidischen Beweises in moderne Notation gibt den Studierenden die Möglichkeit, vom sorgfältigen Nachvollziehen zu individuellem Verständnis zu kommen:

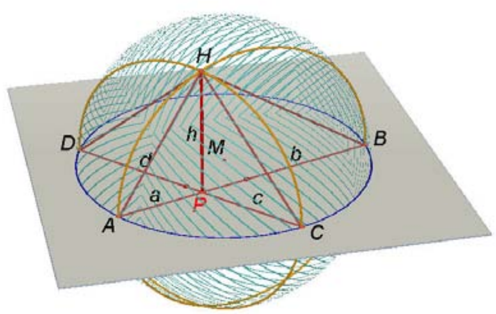
$$Fl_1 + Fl_2 = Fl_3 \Rightarrow a \cdot b + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Die Verwendung von Visualisierungen z.B. mit dynamischer Geometrie ermöglicht einprägsame kompakte Darstellungen der Beweisidee des Sehnensatzes (Abb.rechts).



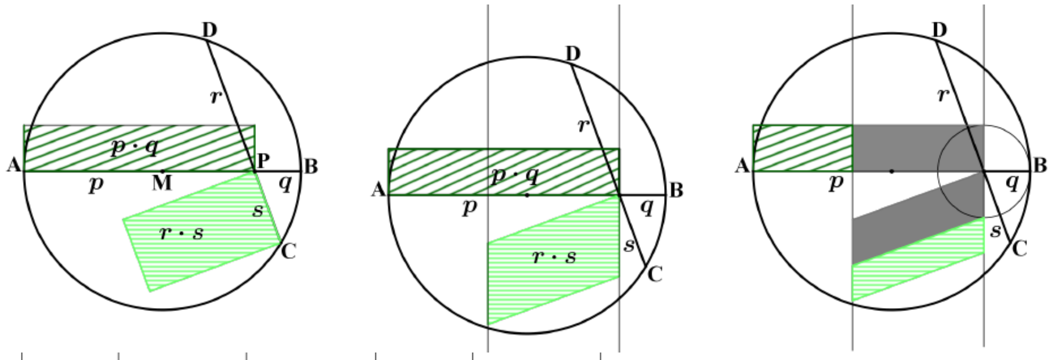

## Andere Quellen der Inspiration für Lösungsansätze

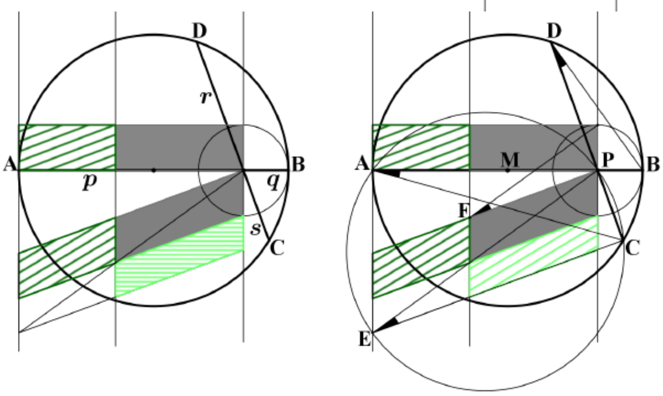
Nachdenken über den Beweis (EE, Buch 3, Satz 35) und Zusammenhänge der Beweisführung über Flächengleichheit und Ähnlichkeit beim Satz des Pythagoras rücken den Höhensatz und Scherungsbeweise ins Blickfeld. Einen schönen Beweis unter Nutzung der dritten Dimension entwickelte Heinrich Bubeck (1994). Beweise für den Sekantensatz und den Sekanten-Tangenten-Satz aus dieser Perspektive



folgten, u.a. von Neubrand (1994), Pickert (1995) und Dirnböck (1995). Der experimentelle Zugang unter Verwendung von Capri 3D von Heinz Schumann (2005, siehe auch vorherige Abb.) ist sehr inspirierend und führt zu neuen Variationen des Themas Sehnensatz.

Die Ausformulierung des in den folgenden Skizzen dargestellten Scherungsbeweises überlassen wir dem interessierten Leser.




Theorien und Methoden des Lehrens und Lernens sind ein wesentlicher und spannender Teil unseres Fachgebiets. Nicht weniger wichtig für unser eigenes Lernen und Lehren ist unsere mathematische Entwicklung. Lassen wir zum Metapher des Schwimmens noch einen anderen Klassiker der Didaktik zu Worte kommen: Wer Schwimmen lernen will, muss ins Wasser gehen und wer Aufgaben lösen lernen will, muss Aufgaben lösen (Polya, 1966).

## Literatur


Bubeck, H. (1994): Ein räumlicher Beweis des Sehnensatzes. In: PM 6/36, 254-255.

Dirnböck, H. (1995): Ein räumlicher Beweis des Sekantensatzes des Kreises. In: PM 4/37, 177-178.

Fitzpatrick, R. (2007) Euclids Elements, Fitzpatrick.

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Klett, 152.

Neubrand, M. (1994): Ergänzung zum Beitrag von Heinrich Bubeck: "Ein räumlicher Beweis des Sehnensatzes“. In: PM 6/36, 255 - 256.

Pickert G. (1995): Zum räumlichen Beweis des Sekantensatzes. In: PM 3/37, 102.

Pólya, G.(1966): Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren, Basel: Birkhäuser, Vorwort.

Schumann, H. (2005): Sätze über Kreise raumgeometrisch beweisen. Online-Ergänzung zu PM 47/6.