

MONZ, Laura
Saarbrücken

Sprachlich-logische Bildung im Mathematikunterricht - (m)ein Dissertationsprojekt

Aktuelle Bestandsaufnahme

Eine präzise und sprachlich korrekte Ausdrucksweise sowie folgerichtiges, logisches Argumentieren stellen wesentliche Ziele des Mathematikunterrichts (MU) dar (z. B. Reiss, 2009). Dies zeigt sich nicht zuletzt durch eine Verankerung der Kompetenzen *Mathematisch Argumentieren* und *Mathematisch Kommunizieren* (u. a. Verwendung der mathematischen (math.) Fachsprache) in den Bildungsstandards (KMK, 2022). Die Kernidee math. Argumentierens besteht darin, „von gegebenen Prämissen auf logisch zwingende Konsequenzen [zu] schließen“ (Bruder & Pinkernell, 2011, S. 2). Im jahrgangübergreifenden Teil des saarländischen gymnasialen Lehrplans wird als ein zentrales Ziel des MU bis zum Abitur angeführt: "Der Unterricht erzieht zu begrifflicher Präzision; er vermittelt die Fähigkeit, Aussagen exakt zu formulieren und logische Schlussfolgerungen zu ziehen." (MBK, 2014, S. 7). Die für die Mathematik äußerst bedeutsame Disziplin der Logik (Prediger, 2000) beschäftigt sich mit folgerichtigem Denken, gültigem Schließen bzw. Argumentieren. Besondere Bedeutung haben Sprache und Logik beim Beweisen. Die Behauptung muss exakt formuliert und „aus gegebenen Voraussetzungen mit Hilfe schon bewiesener Sätze oder Axiome nach bestimmten logischen Schlussregeln [...] her[ge]leitet" werden (Tietze et al., 1997, S. 151). Im MU soll den Lernenden die Mathematik u. a. als deduktive Wissenschaft (KMK, 2022; eine der *Grunderfahrungen* nach Winter, 1995) und das Beweisen als ein Grundprinzip (Mathematik als *beweisende Disziplin*, z. B. Heintz, 2000; Reiss, 2009) erfahrbar gemacht werden. Dies soll von Anfang an geschehen, angepasst an die jeweilige Alters- bzw. Entwicklungsstufe der Lernenden (Wittmann, 1974). Der MU stellt *die* „Institution zur Vermittlung des logischen Denkens" dar (Kollosche, 2013, S. 38).

Sprachlich-logische Schwierigkeiten

Jedoch wird im MU eine sprachlich-logische Bildung sowie eine Thematisierung logischer Schlussweisen oft vernachlässigt (z. B. Bruder & Pinkernell, 2011; Oldenburg, 2022). Dies erweist sich u. a. als problematisch, da Schwierigkeiten von Lernenden beim Beweisen meist nicht nur auf inhaltlichen Verständnisschwierigkeiten zum Kontext der konkreten Beweisaufgabe beruhen. Stattdessen sind sie häufig auf Probleme bei der Versprachlichung des Beweises (Brunner, 2014) sowie mit – aus math.

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Perspektive – gültigem logischen Schließen zurückzuführen (Bruder & Pinkernell, 2011). So wird in der Literatur einerseits auf typische Probleme bei der Interpretation logischer Operatoren hingewiesen, wie z. B.:

- die Verwechslung von *oder* und *entweder-oder* (Oldenburg, 2022),
- die Auffassung von *wenn-dann* als *genau dann-wenn* bzw. die Annahme, dass mit der Wahrheit einer Implikation immer auch ihre Rückrichtung wahr sei (Bruder & Pinkernell, 2011),
- die Auffassung von *ein* als *genau ein* (Goldberg, 2002) oder
- die Auffassung von *nicht alle* als *kein(e)* (Schupp, 1976).

Der Gebrauch logischer Operatoren in der Mathematik weicht z. T. von dem in der Alltagssprache ab, welcher zudem oft mehrdeutig ist (Schupp, 1970). Andererseits werden auch im Alltag häufig – aus *math.*-logischer Sicht – Fehlschlüsse gezogen (z. B. Bruder & Pinkernell, 2011; Knauff, 2005). Dazu zählen u. a. die Ableitung von Schlüssen aus der Bejahung der Konsequenz (*AC*, *affirmation of consequent*) bzw. aus der Verneinung des Antezedens (*DA*, *denial of antecedent*) bei Implikationen (s. Tabelle 1). Diese Schlüsse sind nur gültig bei Äquivalenz von Antezedens und Konsequenz.

AC

Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
Die Straße ist nass.
Also: Es regnet.

DA

Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.
Es regnet nicht.
Also: Die Straße ist nicht nass.

Tabelle 1: Beispiel für logische Fehlschlüsse (vgl. Knauff, 2005)

Ein typischer Fehler besteht in der Annahme einer kausalen Beziehung zwischen Antezedens und Konsequenz (Knauff, 2005). Auch das Nachvollziehen von Beweistechniken (bspw. des in der Mathematik essenziellen Widerspruchsbeweises; Bruder & Pinkernell, 2011) ist anspruchsvoll. Bereits die Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Behauptung fällt vielen Lernenden schwer und kann zu Zirkelschlüssen führen (Brunner, 2014).

Forschungsinteresse

Mein Forschungsprojekt widmet sich der Frage, wie math. Logik, genauer eine logische Sprachbildung sowie das Lehren und Lernen korrekten logischen Schließens v. a. im Kontext des Beweisens, in den zukünftigen MU integriert werden kann. Folgende Aspekte sollen u. a. beleuchtet werden:

- Welche Gründe legitimieren eine sprachlich-logische Bildung im MU? (Weshalb) sollte Logik (nicht) nur in der Informatik unterrichtet werden?

- Welche inhaltlichen Aspekte der Logik sind im MU von Bedeutung? Fokussiert wird ein verständnisorientierter sprachlicher Gebrauch logischer Operatoren, der der formalen Verwendung der Operatoren vorausgeht.
- Wie kann Logik integrativ in math. Unterrichtsinhalte unterrichtet werden (Berücksichtigung curricularer Vorgaben; fächerübergreifendes Lernen mit Informatik)?
- In welchem Umfang soll Logik explizit gelernt bzw. kann logisches Denken implizit erworben werden (vgl. Entwicklungsstufen logischen Denkens nach Bock & Walsch, 1975)?
- Wie hat sich das Maß an Strenge in Argumentationen in verschiedenen didaktischen Epochen (z. B. Meraner Reform, New Math, Kompetenzorientierung) gewandelt?

Forschungsparadigma

Um diese Aspekte zu adressieren, werden stoffdidaktische Forschung und fachdidaktische Entwicklungsforschung miteinander kombiniert. Aufbauend auf einer theoretischen Fundierung des Forschungsgegenstands (s. obige Fragestellungen) werden exemplarische Unterrichtseinheiten zur praktischen Umsetzung einer sprachlich-logischen Bildung entwickelt. Diese werden anschließend mit unterschiedlichen Lerngruppen qualitativ getestet und evaluiert. Im Sinne Wittmanns (1974; s. o.) sollen dabei sowohl Lerngruppen aus den Sekundarstufen als auch aus der Primarstufe berücksichtigt werden, um zur Entstehung eines Bilds von Mathematik als beweisende Disziplin bei Lernenden schon von Beginn der Schulzeit an beizutragen.

Ausblick: Argumentieren in der Mathematik und anderen Disziplinen

Während in der math. Community ausschließlich deduktive Beweise akzeptiert werden, ist bspw. in den Naturwissenschaften sowohl induktives als auch reduktives Schließen gängig (Fischer & Malle, 2004). Um Aussagen math. zu beweisen, wird auf standardisierte Beweisverfahren (z. B. Direkter Beweis, Indirekter Beweis) zurückgegriffen (Heintz, 2000; Kuntze, 2006). Das Beweisen im MU sollte sich am Vorgehen in der Fachwissenschaft Mathematik orientieren, dabei jedoch präformale Argumente (Kuntze, 2006) und unterschiedliche Sprachformen (s. Lambert, 2020) zulassen und verständnisbasiert erfolgen. Argumentieren begegnet Lernenden in z. T. unterschiedlicher Form auch in anderen Unterrichtsfächern (z. B. beim Debattieren im Deutschunterricht oder beim Experimentieren in naturwissenschaftlichen Fächern) sowie im Alltag. Durch die Einführung von Informatik als Pflichtfach in mehreren deutschen Bundesländern gewinnt die math. Logik, welche der informatischen Logik entspricht, erneut an Bedeutung.

Literatur

- KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik: Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf
- Bock, H. & Walsch, W. (1975). *Zum logischen Denken im Mathematikunterricht*. Volk und Wissen.
- Bruder, R. & Pinkernell, G. (2011). Die richtigen Argumente finden. *Mathematik lehren*, 168, 2-7.
- Fischer, R. & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik*. Profil.
- Goldberg, E. (2002). Streitend das Begründen lernen. *Mathematik lehren*, 110, 9-11.
- Hamann, T. (2018). Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht: Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland. In R. Krömer & G. Nickel (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*, 9. Universitätsverlag Siegen.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.
- Knauff, M. (2005). Deduktion, logisches Denken. In J. Funke (Hrsg.), *Denken und Problemlösen*. Hogrefe.
- Kollosche, D. (2013). Logik, Gesellschaft, Mathematikunterricht. In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess*. Springer Spektrum.
- Kuntze, S. (2006). *Themenstudienarbeit: Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren* (Dissertation, Ludwig-Maximilians-Universität München). Elektronische Hochschulschriften der LMU München. <https://doi.org/10.5282/edoc.6278>
- Lambert, A. (2020). Mathematik und/oder Mathe (in der Schule) - ein Vorschlag zur Unterscheidung. *Der Mathematikunterricht*, 66(2), 3-15.
- Ministerium für Bildung und Kultur Saarland [MBK] (2014). *Lehrplan Mathematik Gymnasium*. https://www.saarland.de/SharedDocs/Downloads/DE/mbk/Lehrpl%C3%A4ne/Lehrplaene_Gymnasium/Mathe/Mathe_Vorwort_Gym_2014.pdf?__blob=publicationFile&v=4
- Oldenburg, R. (2022). Logisch? - Logisch! *Mathematik lehren*, 234, 44-46.
- Prediger, S. (2000). Mathematische Logik in der Wissensverarbeitung. *Mathematische Semesterberichte*, 47, 165-191. <https://doi.org/10.1007/s005910070002>
- Reiss, K. (2009). Wege zum Beweisen. *Mathematik lehren*, 155, 4-10.
- Schupp, H. (1970). *Elemente der Logik*. Westermann.
- Schupp, H. (1976). *Mathematisches Unterrichtswerk PLUS 7* (hrsg. mit J. Schönbeck). Schöningh.
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Vieweg.
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM* 61, 37-46.
- Wittmann, E. (1974). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg.