

HUMENBERGER, Hans
Wien

Warum sind Konfidenzellipsen eigentlich Ellipsen? – Vernetzung zwischen Stochastik und Geometrie

Applets mit Konfidenzellipsen

Wie wir alle wissen, ist es für Lernende gar nicht leicht, den Unterschied zwischen einem Konfidenzintervall und einem Prognoseintervall zu verstehen. Sie sind natürlich verwandt, aber doch nicht dasselbe. Hier leisten Applets wie jenes von Andreas Lindner sehr gute Dienste (Abb. 1), trotzdem bleibt es ein schwieriges Thema für Lernende und Lehrende.

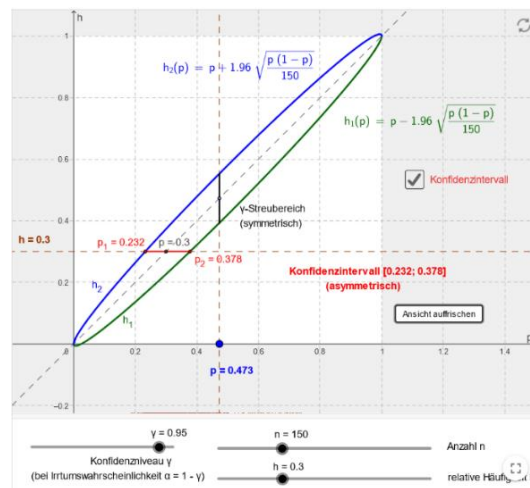


Abb. 1 Konfidenzellipse von <https://www.geogebra.org/m/f7aNTpk3>

Wir wollen uns auf die Frage konzentrieren: Kann man mit elementaren Mitteln einsehen, dass das Objekt wirklich eine Ellipse ist? Meyer (2011) schreibt zwar „Dass es sich tatsächlich um eine Ellipse handelt, kann in diesen kegelschnittfernen Zeiten im Unterricht kein Thema werden.“, aber das Wissen um Kegelschnitte braucht, wie wir sehen werden, auch nicht besonders tief ausgeprägt zu sein, um es verstehen und nachvollziehen zu können. Diese Frage ist für den Gebrauch solcher Applets oder für das Verständnis des Unterschiedes zwischen den einzelnen Intervalltypen eigentlich irrelevant (sozusagen aus stochastischer Sicht), aber aus einer vernetzenden und verständnisorientierten Perspektive (übergeordnet, nicht spezifisch stochastisch) ist das eine berechtigte Frage, nach dem Motto: Sieht zwar aus wie eine Ellipse, aber warum ist es eine Ellipse?

Geometrische Grundlagen

Natürlich ist eine Klärung dieser Frage mittels einer Hauptachsentransformation möglich, aber so eine kann man kaum als elementar bezeichnen, sie

hat auch kaum Erklärungspotential auf der intuitiven Ebene, und für Schülerinnen und Schüler ist so eine sowieso außer Reichweite. Daher machten wir uns Gedanken, ob man das auch anders einsehen könnte, und die Antwort ist: JA. Man braucht dazu im Wesentlichen drei (zusammenhängende) Erkenntnisse, bzw. geometrische Grundlagen:

- Gestauchte Kreise sind Ellipsen.
- Schnitte von Drehzylindern sind Ellipsen (auch Kreise sind Ellipsen).
- Parallelprojektionen von Ellipsen auf andere Ebenen sind wieder Ellipsen.

Wir können diese hier aus Platzgründen nicht begründen (nicht schwierig, siehe Humenberger (2024), ein ausführlicherer Beitrag zu diesem Thema).

Erklärung der Ellipsengestalt einer Konfidenzellipse mittels der erwähnten geometrischen Grundlagen

Auf der 1. Achse solcher Applets ist immer p abgetragen (Wahrscheinlichkeit), und auf der 2. Achse immer eine relative Häufigkeit h (beides Werte zwischen 0 und 1). Im Applet von Abb. 1 ist $h_1(p)$ die Untergrenze des Prognoseintervalls und $h_2(p)$ die zu p symmetrisch liegende Obergrenze des Prognoseintervalls, wobei $h_1(p)$ für p nahe 0 auch < 0 sein kann (analog

$$h_2(p) \text{ für } p \text{ nahe } 1 \text{ auch } > 1): h_{1,2}(p) = p \pm z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Dabei sind z (bestimmtes Quantil der Standardnormalverteilung) und n (Anzahl der Wiederholungen) Konstanten, weshalb man das auch mit einer Konstanten $c = \frac{z}{\sqrt{n}}$ schreiben kann: $h_{1,2}(p) = p \pm c \cdot \sqrt{p \cdot (1-p)}$ ($0 < c < 1$)

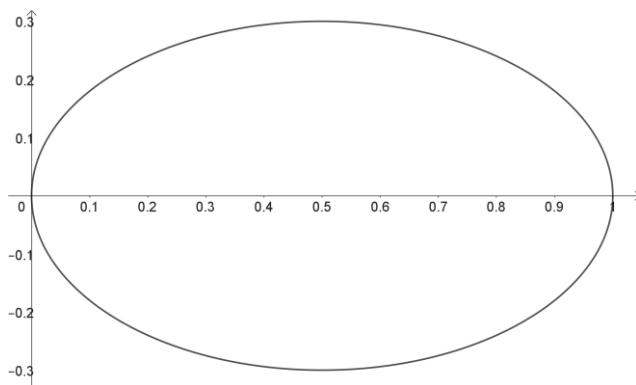
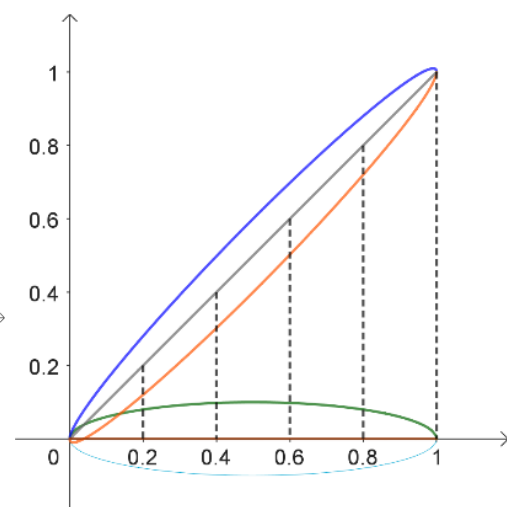


Abb. 2a Ellipse mit Mittelpunkt ($\frac{1}{2} | 0$) und Hauptsehiteilen in $(0 | 0)$ und $(1 | 0)$



2b Gescherte Ellipse

Wir werden jetzt nicht mit p und h als Variablen weiterarbeiten, sondern mit bei Kreis- und Ellipsengleichungen gewohnteren, nämlich x und y . Wir beginnen mit einem Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ durch die Punkte $(0 | 0)$ und $(1 | 0)$, dessen Gleichung durch $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x \cdot (1-x)}$ gegeben ist. Wenn man diesen Kreis mit dem Faktor $0 < c < 1$ vertikal staucht, erhält man $y = \pm c \cdot \sqrt{x \cdot (1-x)}$, und so etwas ist nach a) eine Ellipse (Abb. 2a).

Nun müssen wir aber zu $y = x \pm c \cdot \sqrt{x \cdot (1-x)}$ kommen, und das ist einfach die Addition von x in der y -Koordinate zu jedem Ellipsenpunkt $(x | y)$, mit anderen Worten jeder Ellipsenpunkt wird um seine x -Koordinate „gehoben“; bei dieser Transformation wird aus der x -Achse die 1. Winkelhalbierende (Achtung: auf dieser liegt aber nicht die Hauptachse der neuen Ellipse, Abb. 2b). Es handelt sich dabei, mit einer geometrischen Abbildung gesprochen, um eine gescherte Ellipse (von der wir noch zeigen müssen, dass sie ihrerseits wieder eine Ellipse ist).

Nun könnte man meinen, dass man zur weiteren Begründung tief in die Eigenschaften von *Scherungen* eindringen muss. Wenn das so wäre, wäre dieser Beitrag gar nicht geschrieben worden, denn Scherungen gehören nicht (mehr) zum Repertoire von Schülerinnen, Schülern und durchschnittlichen Studierenden, erklären also für Nicht-Geometrie-Spezialisten kaum etwas. Aber es geht eben auch anders. Dazu muss man sich Abb. 2b nur unwesentlich ergänzt denken, und zwar als Schrägbild (Schrägriss) einer räumlichen Konstellation: Schnitt eines waagrecht stehenden Drehzylinders mit einer 45° -Ebene, genau durch den „Westpunkt“ des Grundkreises (entspricht dem Koordinatenursprung in Abb. 3a). Als Ansicht von vorne („Aufriss“) ergäbe sich einfach das diagonal halbierte Einheitsquadrat (Abb. 3a), wobei der Grundkreis des Drehzylinders hier als Strecke erscheint, auf der x -Achse zwischen 0 und 1, und die Ellipse des schrägen Zylinderschnittes auch als Strecke, als Diagonale von $(0 | 0)$ nach $(1 | 1)$.

Als besonderes Schrägbild ergibt das im Kern genau Abb. 2b, noch einmal ein wenig räumlicher dargestellt in Abb. 3b (das Besondere an diesem Schrägbild ist, dass sich „schräg“ hier nicht auf „seitlich schräg“ bezieht, sondern auf „schräg rein von oben“, keine seitliche Komponente).

Man könnte auch sagen: Der schräg abgeschnittene Drehzylinderstumpf von Abb. 3a wird einfach nicht von „genau vorne“, sondern ein wenig von weiter „oben“ (verschoben parallel zur Bildebene) betrachtet, so entsteht Abb. 3b. Die in Abb. 3a als Strecken entarteten Flächen (Grundkreis und Ellipse) werden als solche sichtbar.

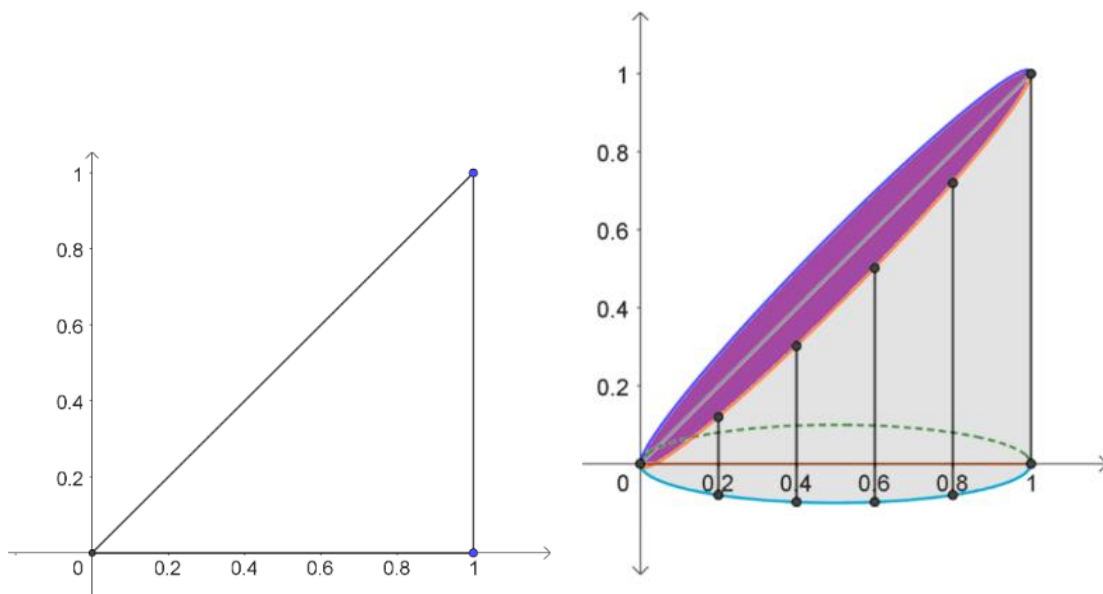


Abb. 3a Ansicht von vorne des Zylinderschnittes mit einer 45°-Ebene, die 3. Achse ist „projizierend“, d. h. sie entartet zu einem Punkt, nämlich (0 | 0)

3b Schrägbild des Zylinderschnittes mit einer 45°-Ebene durch (0 | 0) – die 3. Achse wäre in dieser Darstellung die Verlängerung der senkrecht verlaufenden Achse nach unten, weil dieses Schrägbild ja keine seitliche Komponente haben soll

Dadurch ist eine intuitive Erklärung für die in Rede stehende Konfidenzellipse möglich, denn man kann Abb. 3b so interpretieren: Die Ellipse bei der waagerechten Achse ist das Schrägbild des Drehzylindergrundkreises. Dann ist das „gescherte“ Oval (jeder Punkt $(x | y)$ der Ellipse wurde um x nach oben „geschoben“, d. h. zum Punkt $(x | y + x)$; man beachte, dass alle Höhen x parallel zur vertikalen Bildebene verlaufen und daher im Schrägbild in wahrer Länge erscheinen!) klarerweise das Schrägbild der Schnittfigur des Drehzylinders mit der 45°-Ebene. Diese Schnittfigur ist nach b) *in wahrer Gestalt* eine Ellipse, und da Schrägbilder Parallelprojektionen sind, nach c) auch in diesem eine Ellipse. Fertig.

Auch bei flacheren oder steileren Schnittebenen als 45° ergäben sich natürlich Ellipsen als Schnittfiguren, die zugehörigen Gleichungen wären dann

$y = c_1 \cdot x \pm c_2 \cdot \sqrt{x \cdot (1 - x)}$, d. h. auch für Gleichungen dieses Typs wäre mit dieser Sichtweise die Ellipsengestalt zu erklären.

Literatur

- Meyer, J. (2001). Visualisierung stochastischer Inhalte mit GeoGebra. *Stochastik in der Schule* 31, 2, 18–22.
- Humenberger, H. (2024). Warum sind Konfidenzellipsen eigentlich Ellipsen – Vernetzung zwischen Stochastik und Geometrie. In: *Stochastik in der Schule*, 44, 2, 15-19.