

Beschreiben multiplikativer Muster digital unterstützen

Die Herausforderung vieler Lernender, Multiplikationsaufgaben nicht nur rechnerisch zu lösen, sondern auch deren Bündelungsstrukturen zu verstehen, wurde für den Mathematikunterricht mehrfach gezeigt (Siemon, 2019; Prediger, 2019). Durch den sinnvollen Einsatz digitaler, dynamischer Multi-repräsentations-Werkzeuge kann der inhaltliche Verständnisaufbau solcher Strukturen unterstützt werden (Sinclair et al., 2020). Dieser Kurzbeitrag berichtet Teilergebnisse eines Prä-/Posttestdesigns zum Einsatz der digitalen Lernumgebung divomath mit dem dynamischen Punktfeld als Multirepräsentationstool zu folgender Forschungsfrage: *Inwiefern können Kinder der Klasse 5/6 mit dynamischen Punktfeldern lernen, multiplikative Strukturen zu beschreiben?*

Multiplikative Muster und Strukturen in divomath

Für digital gestützten Unterricht bietet divomath Lernumgebungen, in denen dynamische Multirepräsentationstools in einen sukzessiv aufgebauten Lernpfad integriert werden mit dem Ziel, konzeptuelles Verständnis zu fördern. Der Verständnisaufbau wird dabei durch dynamische Darstellungsvernetzungen und den sukzessiven Aufbau bedeutungsbezogener Sprachmittel unterstützt (Abraham et al., 2020). Im Inhaltsbereich *Multiplikation* steht die Vorstellung des *Zählens in Bündeln* (Siemon, 2019) im Fokus. Bündelungsstrukturen können in Alltags- oder Würfelbildern explizit erkannt werden. In andere Darstellungen müssen sie jedoch erst hineingesehen und sprachlich explizit gemacht werden (Renkl et al., 2013). Abb. 1 zeigt Darstellungen der Bündelstruktur zu $3 \cdot 4$ in unterschiedlicher Explizitheit, das dynamische Punktfeld hilft dabei die Bündelungsstrukturen zu explizieren.

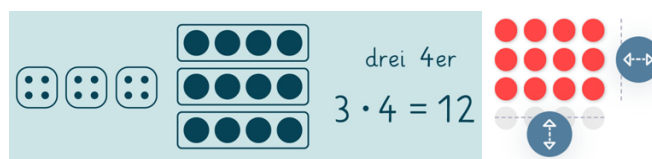


Abb. 1: Drei 4er Bündel in unterschiedlichen Darstellungen: Strukturen hineinsehen

Auf symbolischer Ebene ist die Einteilung in Bündel visuell nicht sichtbar. Im Punktfeld werden die Bündel erst durch das Markieren der 4er-Reihen sichtbar, wohingegen sie bei den Würfeln und auf sprachlicher Ebene direkt erkennbar sind. In divomath wird durch eine dynamische Darstellungsvernetzung zwischen Termen und Punktfeldern die Bedeutung der Multiplikation als *Zählen in Bündeln* durch simultane Veränderungen beider Darstel-

lungen sichtbar gemacht. Dabei manipulieren Lernende das Punktefeld, indem sie per Touchgeste die Anzahl der Reihen oder die Anzahl der Punkte je Reihe variieren. Simultan verändert sich der 1. oder 2. Faktor entsprechend. Die Versprachlichung wird durch Einfordern und Anbieten der bedeutungsbezogenen Sprachmittel ("drei 4er") in den Lernpfad integriert (Götze & Baiker, 2021). Aufbauend auf dem Verständnis multiplikativer mathematischer Beziehungen zwischen den Faktoren, welche durch die Verbalisierung von Strukturen sichtbar gemacht werden können, kann das Erkennen und Fortsetzen von Mustern in den Blick genommen werden (Schulte-Wißing, 2020). Um Muster fortsetzen zu können, sind vier Verstehensschritte relevant (Schulte-Wißing, 2020): (a) Muster erkennen; (b) Muster nutzen und fortsetzen; (c) Muster beschreiben; (d) Muster begründen mithilfe der zugrundeliegenden Strukturen. Anders als bei Strukturen, gelten Muster als Gesetzmäßigkeiten, deren Charakteristika direkt an der Oberfläche sichtbar sind (Schulte-Wißing, 2020). Erst Zusammenbringen der sichtbaren Muster mit dahinterliegenden mathematischen Strukturen ermöglicht eine ausführliche Beschreibung und Begründung des Musters (Link, 2012).

Methode

Datenerhebung und Intervention: Eine erste Evaluation der Wirksamkeit des divomath-Bausteins "Multiplikation verstehen" wurde im Prä- und Posttestdesign durchgeführt. Die Aufgaben des Prä- und Posttests waren für alle Lernenden ($n = 34$) identisch und wurden auf Papier durchgeführt. Nach dem Prätest wurde divomath in vier Unterrichtsstunden unterrichtet:

1. *Würfelbilder beschreiben:* Die Lernenden erklären die Bedeutung der Multiplikation in Würfelbildern als Zählen in Bündeln und nutzen dazu Satzbausteine wie "drei 4er". (45 Minuten)

2.+ 3. *Malaufgaben am Punktefeld darstellen:* Die Lernenden stellen Multiplikationen mit Punktefeldern dar und erklären die Passung zwischen Punktefeldern und Termen mit Bündelstrukturen. (90 Minuten)

4. *Tauschaufgaben:* Die Lernenden erkennen Tauschaufgaben an Punktefeldern und erklären die Bedeutung systematischer Veränderungen am Punktefeld für Tauschaufgaben. (45 Minuten)

Die zu analysierende Aufgabe unterscheidet sich im Prä- und Posttest lediglich durch die gewählten Zahlbeispiele. Abb. 3 zeigt für die Aufgabe zwei typische Aufgabenbearbeitungen. Sie umfasst das Erkennen, Lösen und Fortsetzen eines Zahlenmusters in Form von Multiplikationstermen, sowie den Übertrag der symbolischen Strukturen auf die graphische Darstellung. Das Muster sollte sowohl auf graphischer als auch auf symbolischer Ebene mit bedeutungsbezogenen Sprachmitteln beschrieben werden.


Aufgabe 4) Löse die folgenden Teilaufgaben.

4a) Löse & setze fort:
Wie lautet die nächste Malaufgabe?

$5 \cdot 3 = 15$	$2 \cdot 6 = 12$
$6 \cdot 3 = 18$	$3 \cdot 6 = 18$
$7 \cdot 3 = 21$	$4 \cdot 6 = 24$
$8 \cdot 3 = 24$	$5 \cdot 6 = 30$
$9 \cdot 3 = 27$	$6 \cdot 6 = 36$


PrätestPosttest

4b) Die erste Aufgabe $5 \cdot 3 = 15$ ist hier im Bild dargestellt. Beschreibe: Wie muss man das Punktefeld verändern, um das ganze Rechenpäckchen von oben darzustellen.



Es müssen Punkte hinzukommen.

Prätest



Es müssen Reihen mit jeweils 6 Punkten ergänzt werden.

Posttest

4c) Was verändert sich im Rechenpäckchen oben in jeder Aufgabe? Was verändert sich in den Ergebnissen? Warum verändern sich die Ergebnisse so?

Die erste Zahl erhöht sich immer um 1. Die zweite Zahl bleibt gleich. Das Ergebnis ist anders.

Prätest

Vorne wird es immer 1 höher. Die 6 bleibt gleich. Das Ergebnis wird immer 6 mehr, weil mit 6 mal gerechnet wird.

Posttest

Abb. 3: Aufgabe 4 in Prä- und Posttest

Datenauswertung: Die schriftlichen Antworten wurden mithilfe eines Kodierleitfadens analysiert. Dabei wurde zum einen die mathematische Korrektheit des jeweiligen Aufgabenteils bewertet und bei Aufgabenteil b) und c) auch die Qualität der verwendeten Sprachmittel untersucht. Mit einem t-Test auf 5 %-Niveau wurden die Mittelwerte zu den Kodierungen vor und nach der Unterrichtsreihe verglichen, um die Wirkungshypothese zu prüfen.

Erste Analyseergebnisse

Abbildung 3 enthält neben den Aufgaben auch zwei typische Beschreibungen von Lernenden, die vom Prä- zum Post-Test inhaltlich korrekter und sprachlich expliziter werden bzgl. der multiplikativen Strukturen und ihrer Veränderung. Im Prätest zeichneten viele Lernenden Bilderreihen, um die Veränderung deutlich zu machen, ohne das Hinzufügen ganzer Reihen zu versprachlichen. Im Posttest hingegen beschrieben viele Lernende, dass ganze Reihen hinzugefügt wurden und verbanden dies mit dem aktiv-handelnden Herunterziehen des dynamischen Punktefelds aus der Lernumgebung.

Die Kodierung aller 2 x 34 Aufgabenbearbeitungen ergab Mittelwertunterschiede zwischen Prätest ($m = 3,03$) und Posttest ($m = 3,65$) und hohe Standardabweichungen ($SD = 1,71$ und $SD = 1,72$). Der Zuwachs zeigt sich im t-Test als signifikant ($p = .028$), mit Effektstärke $d = 0,34$. Die inhaltliche Korrektheit und die sprachliche Explikation verbesserte sich also nachweislich.

Im Vergleich der drei Aufgabenteile wuchs die inhaltliche Qualität der Beschreibung der Veränderung des Punktefeldes (Aufgabenteil 4b) am stärksten ($p = < 0,01$, $d = 0,47$).

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der ersten Evaluationsstudie deuten an, dass die divomath-Lernumgebung konzeptuelle und sprachliche Wirkungen aufweist. Die Lernenden beschreiben nach der Intervention Multiplikation als das Bündeln in Form ganzer Reihen. Sie beschreiben die Veränderung von Malaufgaben durch Vernetzung von symbolischer und graphischer Darstellung und greifen dabei auf erinnerte Handlungen am dynamischem Punktefeld zurück. Die Möglichkeit, Veränderungen konzeptuell und sprachlich bedeutungsbezogen beschreiben zu können, wird also durch das Multirepräsentationstool unterstützt.

In der Anschlussforschung ist weiter zu untersuchen, inwiefern die Lernzuwächse stärker sind als in einer Kontrollgruppe, und inwiefern weitere Design-Elemente den konzeptuellen Verständnisaufbau digital unterstützen.

Förderhinweis. Das Projekt divomath wird geleitet von Christoph Selter und Susanne Prediger und gefördert von den Ministerien für Bildung und Schule Nordrhein-Westfalen und Brandenburg.

Literatur

- Abraham, M., Bielinski, S., Kissel, E., Selter, C., Prediger, S. & Vonstein, H. (2023). Designprinzipien in divomath: Digitale verstehensorientierte Lehr-Lern-Umgebungen für alle Unterrichtsphasen. In F. Dilling, D. Thurm & I. Witzke (Hrsg.), *Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis* (S. 1–10). WTM
- Götze, D. & Baiker, A. (2021). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: results of an intervention study in the second grade. *ZDM – Mathematics Education*, 53(2), 263–275. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01206-1>
- Link, M. (2012). Grundschulkindern beschreiben operative Zahlenmuster. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2417-2>
- Prediger, S. (2019). Mathematische und sprachliche Lernschwierigkeiten. *Lernen und Lernstörungen*, 8(4), 247–260. <https://doi.org/10.1024/2235-0977/a000268>
- Renkl, A., Berthold, K., Grosse, C. S. & Schwonke, R. (2013). Making better use of multiple representations: how fostering metacognition can help. In R. Azevedo & V. Aleven (Hrsg.), *International Handbook of Metacognition and Learning Technologies* (S. 397–408). Springer.
- Schulte-Wißing, E.-M. (2020). *Kinder deuten Zahlenmuster*. Springer.
- Siemon, D. (2019). Knowing and building on what students know: The case of multiplicative thinking. In D. Siemon, T. Barkatsas, & R. Seah (Hrsg.), *Researching and Using Progressions (Trajectories) in Mathematics Education* (S. 6–31). Brill.
- Sinclair, N., Chorney, S., Güneş, C., & Bakos, S. (2020). Disruptions in meanings: teachers' experiences of multiplication in TouchTimes. *ZDM – Mathematics Education*, 52(7), 1471–1482. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01163-9>