

GUNESCH, Roland
Feldkirch (Österreich)

Mathematikdidaktische Betrachtungen mathematischer Rätsel

Relevanz des Themas

Folgende Probleme der SuS im Mathematikunterricht kommen oft vor: generelles Desinteresse an Mathematik, mangelndes Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten, fehlende Zufriedenheit mit den eigenen mathematischen Leistungen, Abgehängt-Werden sowie Mangel an Erfahrungen im selbstständigen Problemlösen. Dieser Artikel beschreibt, wie der Einsatz von mathematischen Rätseln SuS für Mathematik motivieren kann und wie dies zu verbessertem Lernerfolg in Mathematik führen kann.

Eine lange Tradition mathematischer Rätsel

Mathematische Rätsel werden schon seit Jahrhunderten schriftlich überliefert. Besonders ausgiebig sind z.B. die (über viele Jahre erschienenen) Rätselsammlungen von Martin Gardner, Ian Stewart, Henry Dudeney und Sam Lloyd. Siehe z.B. Singmaster (2010), Berlekamp (2014), Gardner (1998), Peterson (2014), Loyd (1914), Gardner (1959), Townsend (2003), Guy und Woodrow (1994), Smullyan (2015), Loyd (2003).

Beispiele für ein gutes mathematische Rätsel: das Seerosen-Rätsel

Manche Rätsel-Lösungen führen zum Erkennen eines wichtigen allgemeinen Prinzips, das im Leben oft vorkommt; solche Rätsel sind daher besonders wertvoll. Ein Beispiel ist das folgende „Seerosen-Rätsel“:

„In einem Teich wachsen Seerosen. Jeden Tag verdoppelt sich die Fläche, die von den Seerosen bedeckt ist. Nach 100 Tagen ist der Teich erstmals vollständig bedeckt (d.h. auf der gesamten Fläche). Nach wie vielen Tagen war der Teich zur Hälfte bedeckt?“

Das Rätsel klingt unvollständig formuliert, weil nicht gesagt wird, welche Fläche zu Beginn bedeckt ist. Jedoch wird diese Information über den Startzustand nicht benötigt. Der Startzustand ließe sich aus den gegebenen Informationen berechnen, aber das ist schwerer, als das Rätsel zu lösen.

Dieses Rätsel ist deswegen so wertvoll, weil hier das Prinzip des exponentiellen Wachstums modelliert wird, welches in der Welt des täglichen Lebens oft vorkommt und sehr wichtig ist, um Wachstumsprozesse der physikalischen Welt zu verstehen und vorherzusagen. Wichtige Beispiele für solche Prozesse mit exponentiellem Wachstum sind insbesondere:

- Wachstum von Populationen von Lebewesen während einer Phase starker

Ausbreitung (z.B. Seerosen und andere Pflanzen, Bakterien und andere Mikroorganismen, Tiere), solange die Ressourcen der Umgebung (z.B. Nahrungsangebot) das Wachstum noch zulassen;

- Ausbreitung von stark ansteckenden Krankheiten, insbesondere in der Frühphase einer Pandemie, solange noch keine wirksamen immunologischen oder medizinischen Gegenmaßnahmen vorhanden sind;

- das „Moore’sche Gesetz“, welches beschreibt, wie sich Speicherkapazität und Rechengeschwindigkeit von Computern in den vergangenen Jahrzehnten ungefähr auf exponentielle Weise vergrößert haben.

Relevante Kompetenzen und Fähigkeiten

Die Fähigkeiten Denken, Kombinieren, Schlussfolgern, Alternativen prüfen, logisches Schließen sind fundamental im Mathematikunterricht. Diese kommen typischerweise in mathematischen Rätseln vor.

Gründe, warum mathematische Rätsel langfristigen Nutzen für SuS haben können

Die Beschäftigung mit mathematischen Rätseln fördert idealerweise intrinsische Motivation (Freude an der intellektuelle Stimulierung, Selbstbestätigung beim Lösen von Rätselfragen, ggf. Verständnis eines wichtigen Prinzips und Freude am Verstehen dieses Prinzips) im Gegensatz zu extrinsischer Motivation (Noten). Idealerweise verringert diese Beschäftigung hinderliche negative Gefühle, die viele der weniger leistungsstarken SuS im Mathematikunterricht empfinden, insbesondere Frustration, Angst, das Gefühl von Unvermögen und das Gefühl von eigener Inkompetenz.

Erfolgreiche Beschäftigung mit mathematischen Rätseln kann dazu führen, dass die SuS zukünftig Probleme besser lösen können. Insbesondere gewinnen sie Selbstsicherheit, Selbstvertrauen, Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten, sowie mehrere für MINT-Fächer relevante Fähigkeiten (Verständnis von Algorithmen, Erreichen von objektiven Zielen).

Gründe für die Nützlichkeit von Rätseln für die SuS können unter anderem mathematikdidaktisch oder psychologisch sein.

Mathematikdidaktische Gründe könnten sein:

- Das Rätsel hilft, ein wichtiges Prinzip zu verstehen. Ein Beispiel dafür ist das Seerosen-Rätsel.

- Das Rätsel macht Appetit darauf, mehr von einem Thema zu lernen (außerhalb der Beschäftigung mit dem Rätsel). Dies kann zu einer (didaktisch erwünschten) langfristigen Beschäftigung mit einem Thema führen.

- Das Rätsel ermöglicht Anwendung und Einübung von Unterrichtswissen.

Psychologische Gründe könnten sein:

- Verstehen von Rätsellösungen (insbesondere selbst gefundenen) gibt den SuS Selbstvertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten und dürfte zu einer positiveren Einstellung zum Mathematikunterricht führen (und langfristig zu mehr Erfolg).
- Verstehen von Rätsellösungen kann momentane Freude bewirken, welche unmittelbar in derselben Unterrichtsstunde mehr Motivation der SuS bewirken kann.
- SuS könnten durch die Beschäftigung mit mathematischen Rätseln den Wunsch entwickeln, sich mehr mit verwandten Themen zu beschäftigen und ähnliche Probleme selbst zu lösen. In Maslovs Motivationstheorie (Maslov, 1943, 1998) entspricht dies dem Wunsch, eigene Kompetenzen und Fähigkeiten zu entwickeln (das ist in Maslovs Theorie enthalten in der Schicht „Selbstverwirklichung“).

Denkbar ist auch, mathematische Rätsel zwecks Begabtenförderung einzusetzen, z.B. in mentalen Trainings oder in Wettbewerben; siehe z.B. Nolte und Koch (2018), Nolte (2013), Nolte (2010).

Relevanz des Themas in der Zeit künstlicher Intelligenz (AI)

Nach Meinung des Autors wird voraussichtlich Folgendes in Zukunft geschehen: reines Rechnen (ohne Nachdenken) wird noch weniger bedeutsam, als es jetzt schon ist. Die Debatte, ob Taschenrechner im Unterricht zugelassen sein sollen, wird ersetzt werden durch eine Debatte, ob AI-Werkzeuge im Unterricht zugelassen sein sollen. Es wird sich vermehrt die Frage stellen, wie viel Mathematik ein Mensch überhaupt können soll. Im Schulunterricht wird nach Meinung des Autors in Zukunft die Bedeutung von Aufgaben zunehmen, die eigenständiges Denken erfordern (Gunesch, 2018). Methoden visueller Mathematik (Gunesch, 2016) und Methoden des forschenden Lernens (Roth & Weigand, 2014) könnten größere Bedeutung erhalten.

Literatur

- Berlekamp, E. R. (2014). *The Mathematical Legacy of Martin Gardner*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), September 2, 2014.
- Gardner, M. (1998). *A Quarter Century of Recreational Mathematics by Martin Gardner*. Scientific American, August 1998.
- Gardner, M. (1959). "Chapter 9: Sam Loyd: America's Greatest Puzzlist". *Mathematical puzzles & diversions*. New York, N.Y.: Simon and Schuster. S. 84.
- Gunesch, R. (2016). Ein paar Ideen für den Mathematikunterricht zur Einbeziehung von Schüler/innen mit sprachlichen Schwierigkeiten. *F&E Edition - Die Zeitschrift des Zentrums für Forschung, Entwicklung und Wissenstransfer*, 23, 113--120.

- Gunesch, R. (2018). Notwendigkeit von mathematischem Fachwissen — Erläuterungen mittels Geometrie, dynamischen Systemen und Informationstechnik. *Erziehung und Unterricht 3-4*, 296-301.
- Guy, R. K., & Woodrow, R. E. (1994). *The Lighter Side of Mathematics: Proceedings of the Eugène Strens Memorial Conference on Recreational Mathematics and Its History*. Cambridge University Press.
- Loyd, S. (1914). *Cyclopedia of Puzzles*. New York: Lamb Publishing Company.
- Loyd, S. (2003). *Mathematische Rätsel und Spiele: Denksportaufgaben für kluge Köpfe. 283 Aufgaben und Lösungen*.
- Maslov, A. H. (1943). A Theory of Human Motivation. In *Psychological Review.*, Vol. 50 #4, 370–396.
- Maslov, A. H. (1998). *Maslow on Management*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- Nolte, M., Koch, S. M. & Amtsfeld, T. (2018). Problemlösen: Zugänge zu kindlichen Lösungsräumen und fachmathematischem Hintergrund. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM, S. 1323-1326. DOI: 10.17877/DE290R-19553
- Nolte, M. (2013). Mathematische Begabungen: Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. In T. Fritzlar (Hrsg.), *Schriften zur mathematischen Begabungsforschung, Band 4*. Münster: WTM, Verl. für wiss. Texte und Medien, S. 181-190.
- Nolte, M. (2010). Zum Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen in Problemlöseprozessen. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.), *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschul Kinder erkunden und fördern*. Offenburg: Mildenerger, 11-24.
- Peterson, I. (2014). Honoring a Century of Martin Gardner. *MAA Focus*, Vol. 34, No. 5, Oct/Nov 2014.
- Roth, J. & Weigand, H.-G. (2014). Forschendes Lernen – Eine Annäherung an wissenschaftliches Arbeiten. *mathematik lehren*, 184, 2–10.
- Singmaster, D. (2010). *Martin Gardner (1914–2010)*. Nature 465, 884.
- Smullyan, R. M. (2015). *Reflections: The Magic, Music, and Mathematics of Raymond Smullyan*. World Scientific Publishing Company Incorporated.
- Stewart, I. (2006). *How to cut a cake: And Other Mathematical Conundrums*. Oxford University Press, USA.
- Stewart, I. (2004). *Math hysteria: Fun and Games with Mathematics*. Oxford University Press.
- Townsend, C. B. (2003). *The curious book of mind-boggling teasers, tricks, puzzles & games*. Sterling Publishing Company, Inc.