FISCHER, Michael
Graz

„Ja, also ich meine, - das ist ja - quasi unsere Ableitung“, Erkenntnisse aus einem Forschungsprojekt zum Argumentieren in Analysis

Dem Forschungsfeld des Beweisens, Argumentierens und Begründens im Sekundarbereich wird von Expert*innen Nachholbedarf attestiert (Sommerhoff & Brunner, 2021). Ein Grund kann sein, dass viele Theoreme der Analysis sich nur traditionell (oft auch formal genannt) beweisen lassen und dies nicht im Schulkontext umsetzbar ist, da das notwendige mathematische Werkzeug fehlt. Einige Beweise können dennoch algorithmisch skizziert werden (siehe den Satz vom Minimum und Maximum in Oldenburg, 2022, S. 310), eine weitere Alternative ist der verbreitete, inhaltlich anschauliche Beweis. Darunter werden, nach Wittmann & Müller (1988, S. 249) in der mathematisch-didaktischen Gemeinschaft, beispielsweise Skizzen von Funktionsgraphen verstanden, „von denen intuitiv erkennbar ist, dass sie sich auf eine ganze Klasse von Beispielen anwenden lassen und bestimmte Folgerungen nach sich ziehen“. Empirisch wurde festgestellt, dass Studierende oft die Richtigkeit inhaltlich anschaulicher Beweise besser einschätzen können als die traditioneller (Damrau, in print). Davon ausgehend adaptieren wir das entwickelte Framework von Komatsu (2012) für Strategien und deren zugrundeliegende anschauliche Argumentationen und wenden es auf die Aufgabenstellung des grafischen Differenzierens an, um den Umgang der Studierenden mit passenden Gegenbeispielen zu analysieren.

Theoretischer Hintergrund

In vielen Bereichen der Mathematik kann systematisch nach einer Strategie oder algorithmisch vorgegangen werden. Dabei sollen die einzelnen Schritte idealerweise nicht nur beherrscht, sondern auch ihre Richtigkeit begründet werden können (Oldenburg, 2022). Im Zuge des grafischen Differenzierens schließen Schüler*innen auch auf Zusammenhänge, die dann kritisch auf ihre Allgemeingültigkeit hinterfragt werden müssen. Damit soll im Unterricht das Ziel verfolgt werden, zentralen mathematischen Denkweisen eine größere Bedeutung zukommen zu lassen. Solche Präzisierungen werden auch notwendig, wenn Gegenbeispiele gefunden oder konstruiert werden können (Greefrath et al., 2016). Das Suchen von Ausnahmebedingungen ist dabei ein wesentlicher Bestandteil der Entstehung mathematischer Aussagen (Jahnke et al., 2023; Komatsu, 2012). Balacheff (1991) untersucht, wie Schüler*innen mit Gegenbeispielen umgehen, die ihre mathematischen Vermutungen oder Beweise in Frage stellen. Dabei wird unter anderem auf

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

Lakatos (1976) Bezug genommen, der die Rolle von Widersprüchen und Beweisen in der Entwicklung des mathematischen Denkens betont. Wie bereits ausgeführt, sind in der Schule viele Aussagen der Analysis nicht mehr traditionell beweisbar. Die Thematik des „anschaulichen Beweisens“ in der Oberstufe muss sich daher auf eine andere Weise präsentieren (Blum & Kirsch, 1991). Trotzdem steht die Forschung zur Generierung von mathematischem Wissen im Klassenzimmer durch Begründungen, Widerlegungen und Adaptionen auch im Themengebiet der Analysis im Sekundarbereich noch aus.

Fragestellung

In diesem Beitrag analysiere ich daher die folgende Fragestellung: Auf welche Art können Gegenbeispiele zu kognitiven Konflikten und zum Erwerb neuer mathematischer Argumentationsstrategien in Analysis führen?

Methode

In einer Vollumfrage in Graz bearbeiteten 120 Mathematikstudierende (BEd & BSc) des ersten Semesters unterschiedliche Aufgaben. Aufgrund ihrer Ausarbeitungen wurden sie zu Interviews eingeladen, bei denen sie sich selbstgewählte Studienpartner*innen für eine verbesserte Kommunikation aussuchen konnten. In drei stattgefundenen Interviews sollten diese Aufgabenstellungen zum grafischen Differenzieren und Integrieren bearbeiten, eine Strategie aufstellen und diese argumentativ begründen. Der Interviewer konfrontierte die Studierenden wiederholt mit geeigneten Gegenbeispielen zu ihrer Strategie, sodass diese sowie die zugrundeliegende Argumentation kontinuierlich adaptiert wurden. Als rahmende Aufgabe bearbeiten die Studierenden eine TIMSS-Aufgabe (aus Greefrath et al., 2016, S. 250) sowie im abschließenden Fall zusätzlich eine mögliche formale Verallgemeinerung jener Aufgabe. Beide Aufgaben können nach Blum und Kirsch (1991) „geometric-intuitive“ mit der Flächeninhaltsvorstellung oder mit der Grundvorstellung der Rekonstruktion $[F]' = f$ gelöst werden.

Die aufgabenbezogenen Interviews wurden aufgezeichnet, transkribiert und strukturiert analysiert. Dabei wurde in Einzelbeispiele, die dazugehörenden Adaptionen sowie die Rahmenaufgaben gegliedert. Die Analyse basiert auf Aufzeichnungen, transkribierten Gesprächen und Ausarbeitungen. Aufgrund der Länge des Beitrags fokussieren wir uns in der hier vorgestellten qualitativen Auswertung auf die Anwendung verbesserter und neuer Argumentationen der Studierenden im Bearbeiten der Rahmenaufgaben.

Ergebnisse

Zusammenfassend bestand die Strategie der Studierenden zu Beginn aus unterschiedlichen Merkregeln, die in Kombination erfolgreich auf viele Polynomfunktionen angewandt werden konnten. Die Studierenden nehmen in

Folge jedoch Gegenbeispiele konstruktiv auf und müssen aufgrund geeigneter Problemstellungen schließlich wiederholt auf die anfänglich nicht genannte Tangentensteigung und die damit einhergehende Monotonie als geeignetes Argumentationsmittel zurückgreifen. Einleitend lösen sie die TIMSS-Aufgabenstellung zu Beginn über ein „geometric-intuitive“ Flächenargument, abschließend jedoch auch über die Rekonstruktion von f als erste Ableitung von F, letzteres besitzt bereits eine inferentielle Struktur (Biehler & Kempen, 2016).

S1: - Ja, also ich meine, - das ist ja - quasi unsere Ableitung - und das ist die ganze Zeit im positiven Bereich, wenn - das die ganze Zeit im positiven Bereich ist, - dann muss die Stammfunktion auch die ganze - Zeit steigen.

S2: Genau.

Diese formale Argumentation wird auch im präformalen Beweis, nach erneut einer erfolgreichen inhaltlich-anschaulichen Skizze (Abbildung 1), von sich aus von den Studierenden gesucht:

S1: Ja, aber wir müssen das, glaube ich, mit der - Stammfunktion oder so jetzt begründen. ((…) Die Stammfunktion muss immer - steigen, da die Ableitung - immer Größer ist als 0

S2: Das ist das was ich mein. Und wenn sie immer steigend ist…

S1: Wenn c größer ist als b und unsere Stammfunktion - immer steigt, dann muss - $F(c)$ auch größer sein als - $F(b)$.

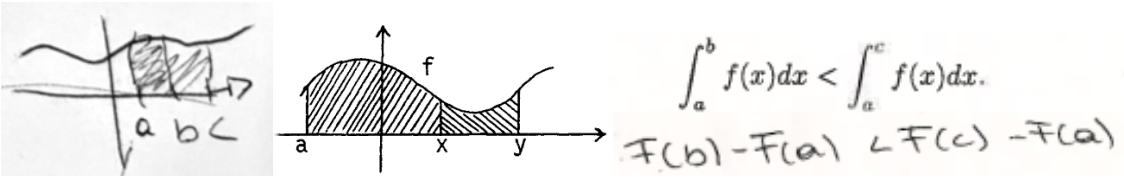

Abb. 1: Links die Lösung der Studierenden zu Beginn; mittig Blum und Kirsch (1991); rechts die formale Argumentation über das Vorzeichen von f.

Diskussion

Wie in bisheriger Forschung festgestellt wurde, verbessern Studierende ihre Argumentation aufgrund von Gegenbeispielen (Komatsu, 2012). Im abschließenden Beispiel übertragen die Studierenden die Argumentation über Zusammenhänge von Funktion und Ableitung intrinsisch auf eine rein formale Aufgabenstellung ohne Funktionsgraph. Dies war weder einleitend in der TIMSS-Aufgabe noch in der ursprünglichen Strategie der Fall. Daraus lässt sich schließen, dass die Auseinandersetzung der Studierenden mit ihrer Strategie aufgrund von Gegenbeispielen geeignet war, spezifisches Wissen – in diesem Fall über die Grundvorstellung der Tangentensteigung – zu festigen und damit die Argumentationsfähigkeiten zu stärken (Jahnke et al., 2023). Die ausgewählte Analyse basierte jedoch auf einer einzigen Aufga-

bensequenz der Analysis in der Sekundarstufe zweier Studienanfänger*innen. Eine Begründung für Einzelfallstudien laut Yin (2009) ist, wenn der Fall für die Theorie wesentlich ist. Ähnliche Abläufe wurden zudem in einem zweiten Interview festgestellt. Daher ergänzen die vorgestellten Resultate bisherige Forschung um relevante Erfahrungen im Themenbereich der Analysis. Es ist jedoch notwendig, die Ergebnisse an anderen Aufgaben und in unterschiedlichen Umgebungen wie dem Klassenzimmer zu überprüfen. Ebenso muss die Rolle der Lehrkraft in diesen Settings untersucht werden. Blum und Kirsch (1991) zeigen, dass geometrische Argumente im Kontext der Analysis erhebliches Professionswissen der Lehrkräfte voraussetzen, um die Richtigkeit der Argumentationen beurteilen zu können.

Literatur

Balacheff, N. (1991). Treatment of Refutations: Aspects of the Complexity of a Constructivist Approach to Mathematics Learning. In E. Von Glasersfeld (Hrsg.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (S. 89–110). Springer Netherlands.

Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *1*(37), 141–179.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(2), 183–203. https://doi.org/10.1007/BF00555722

Damrau, M. (in print). *Understanding the Generality of Mathematical Statements*. Springer. https://link.springer.com/book/9783658437626

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Jahnke, H. N., Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2023). Argumentieren, Begründen und Beweisen. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 369–398). Springer Berlin Heidelberg.

Komatsu, K. (2012). Lakatos' Heuristic Rules as a Framework for Proofs and Refutations in Mathematical Learning: Local-Counterexample and Modification of Proof| Request PDF. *Pre-proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 2838–2847.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press.

Oldenburg, R. (2022). Informatisches Denken im Mathematikunterricht. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 303–323). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_13

Sommerhoff, D., & Brunner, E. (2021). *Forschungsstand Mathematisches Argumentieren und Beweisen vom Elementar- bis zum Hochschulbereich*.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis. *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis*, 237–257.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (Bd. 5). SAGE Publications, Inc.