

Mit Repräsentationen rechnen – Vorstellungsentwicklung zwischen Sprache und Material

Um Grundschulkindern bei der Entwicklung von Rechenstrategien zu unterstützen, wird ihnen insbesondere in den Zahlräumen bis 20 und bis 100 für gewöhnlich didaktisches Material angeboten. Sie sollen damit konkrete Aufgaben lösen, zunehmend tragfähigere Grundvorstellungen entwickeln und es zur Kommunikation mit anderen nutzen. Damit verbunden wird die Hoffnung, dass die Kinder die im Material repräsentierten mathematischen Strukturen verinnerlichen. Der Übergang von der konkreten Darstellung am Material zur mentalen Repräsentation stellt jedoch für einige Kinder eine immense Hürde dar (vgl. Wartha & Schulz, 2012). Um das Überwinden dieser Hürde zu erleichtern, wird in Förderansätzen nicht selten die Sprache als besonderes Unterstützungsmittel genutzt.

In diesem Beitrag gehen wir der Frage nach, wie Kinder unter Nutzung von Sprache und Material mathematische Grundvorstellungen entwickeln. Dabei analysieren wir eine Szene aus einer Einzelfördersitzung und diskutieren diese im Hinblick auf die funktionale Verwendung von Sprache.

1. Kontext der Förderung

Die ausgewählte Fördersitzung stammt aus einer Einzelförderung, die von zwei Studierenden des Grundschullehramts für die Dauer eines Semesters in der Beratungsstelle für Kinder mit Rechenstörungen an der Universität Bielefeld mit Förderkind Malte durchgeführt wurde. Schwerpunkte der Förderarbeit liegen in der Entwicklung nicht-zählender Rechenstrategien für die Addition und Subtraktion bis 100 sowie im Aufbau eines tragfähigen Stellenwertverständnisses (vgl. Rottmann & Peter-Koop, 2015). Zu Beginn der gemeinsamen Arbeit steht die Strategie „Schrittweises Rechnen“ bei Aufgaben des Typs „Mischzahl \pm Einer“ (z.B. $18+7$ über $18+2=20$ und $20+5=25$) im Mittelpunkt. Dieser Aufgabentyp wird in den Förderungen am Rechenrahmen erarbeitet.

2. Aufbau von Grundvorstellungen

Grundvorstellungen können als mentale Modelle für mathematische Begriffe angesehen werden, die einen Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungen eines Begriffs ermöglichen (vgl. vom Hofe & Blum, 2016). So sind Grundvorstellungen relevant, um z.B. zu einer symbolisch vorgegebenen Aufgabe (z.B. $18+7$) eine passende Handlung am Material (z.B. Schieben von 18 Kugeln am Rechenrahmen und anschließendes Hinzufügen von

zwei Kugeln auf der 2. Stange und weiteren fünf Kugeln auf der 3. Stange) durchführen und das Resultat dieser Handlung als Ergebnis der Aufgabe interpretieren zu können.

Die Entwicklung von Grundvorstellungen wird in der Beratungsstelle durch einen Prozess der stufenweisen Ablösung von der Materialhandlung unterstützt, welchen Wartha und Schulz (2012) mit einem Vierphasenmodell beschreiben. Während das Kind in Phase 1 selbst am Material handelt und seine Handlung dabei verbal beschreibt, steht das Material dem Kind ab der 2. Phase nicht mehr für eigene Handlungen zur Verfügung. Stattdessen beschreibt das Kind einer Partnerin bzw. der Förderin die Materialhandlung, welche diese dann stellvertretend für das Kind durchführt. Dabei hat das Kind entweder freie Sicht auf das Material und kann damit die (fremd ausgeführte) Materialhandlung beobachten (Phase 2) oder die Handlung wird für das Kind verdeckt hinter einem Sichtschutz durchgeführt, sodass dem Kind nur noch ein Überprüfen des Ergebnisses möglich ist (Phase 3). In Phase 4 wird vollständig auf die Ausführung einer konkreten Handlung verzichtet; die Materialhandlung findet (bei Bedarf) ausschließlich in der Vorstellung statt.

3. Zur Rolle der Sprache

Bei der Umsetzung des Vierphasenmodells kommen der Sprache unterschiedliche Bedeutungen zu. Besonders in der ersten Phase begleitet die Verbalisierung die Materialhandlung. Sprache wird hier u.a. genutzt, um den Lösungsprozess zu strukturieren, und bekommt so eine handlungssteuernde Funktion (vgl. auch Lompscher, 1972). Zudem kann eine sprachliche Begleitung eine Fokussierung der Aufmerksamkeit auf die Handlung bewirken: „Handlungen am Material werden durch Versprachlichungen bewusster“ (Schipper, 2003, S. 225).

Wichtig erscheint an dieser Stelle, dass die Aufmerksamkeitsfokussierung nicht unbedingt in allgemeiner Weise auf die gesamte Handlung stattfindet, sondern dass mit einer Fokussierung auf verschiedene (Teil-) Aspekte der Materialhandlung auch ein Fokus auf unterschiedliche mathematische Aspekte bzw. Themen gerichtet werden kann. Dies soll anhand des nachfolgenden Fallbeispiels veranschaulicht werden.

4. Beispiel: Malte, 2. Schuljahr

Das Beispiel ist der dritten Förderstunde entnommen. Malte und die beiden Studierenden beschäftigen sich zunächst mit den Zerlegungen der 7, bevor sie mehrere Aufgaben des Typs „Mischzahl \pm Einer“ mit Zehnerübergang am Rechenrahmen bearbeiten. Die dritte zu lösende Aufgabe lautet: „acht-

zehn plus sieben“. Dabei wird Malte aufgefordert, auch „immer genau die Zwischenschritte [zu] sagen“, „wie du wo du bist“. Dieser Instruktion kommt Malte nach; er beschreibt:

Malte: (*10 Perlen auf der 1. Stange schiebend:*) Also, ich schiebe jetzt acht... äh, zehn. [...]

Malte: (*8 Perlen auf der 2. Stange schiebend:*) Dann noch achtzehn dazu.. Sind.. äh, zehn und dann noch acht dazu.. Sind achtzehn. [...]

Malte: Plus sieben.. (*2 Perlen auf der 2. Stange schiebend:*) Da schieb ich noch zwei.

In seinem Beschreiben wird Malte von der fördernden Studentin ausschließlich mit bejahenden Einwüfen begleitet: „ja“, „aha“, „klasse“. Als er nun zu dem ersten Summanden 18 zwei Perlen hinzuschiebt, formuliert sie zum ersten Mal eine inhaltliche Nachfrage und es entsteht der folgende kurze Dialog:

Studentin: Wo bist du dann?

Malte: Ähm.. Bei der ... Zehn. Oh, ähm... bei zwanzig.

Studentin: Genau, zwanzig. Klasse.

Malte: Plus sieben?

Studentin: Genau, achtzehn plus sieben heißt die Aufgabe.

Die Konventionen, die in der Förderarbeit mit dem Material Rechenrahmen verknüpft wurden, erfordern es, dass Malte den zweiten Summanden 7 bei dieser Aufgabe in 2 und 5 zerlegt: $18+2=20$ und $20+5=25$. Das Hinzufügen der 7 Perlen wird am Material also in Form von zwei Teilhandlungen realisiert. Das Hintereinander-Ausführen dieser beiden Teilhandlungen unterbricht die Studentin, indem sie Malte nach dem Zwischenergebnis fragt: „Wo bist du dann?“ Auf diese Weise wird das Addieren des zweiten Summanden nicht nur am Material, sondern auch sprachlich deutlich in zwei Teile gegliedert.

Dieser ganz kurze Ausschnitt illustriert, dass mit der Sprache hier nicht auf die Materialhandlung im Allgemeinen fokussiert wird, sondern auf einen Teilaspekt der Handlung. Und es ist gerade dieser Teilaspekt, der aus mathematischer Sicht von besonderer Relevanz ist. Denn die Strategie des schrittweisen Rechnens, die Malte erlernen soll, besteht darin, bis zum nächsten Zehner und dann weiterzurechnen. In der Interaktion mit Malte arbeitet die Studentin also sprachlich an der Bewusstmachung eines wichtigen Teilschritts: Die Herausforderung des Schrittweisen Rechnens besteht darin, nicht nur den zweiten Summanden passend zu zerlegen, sondern zusätzlich den nachfolgenden Zehner korrekt zu bestimmen. Im Dialog zwischen Malte und der Studentin wird die Materialhandlung somit nicht auf beliebige Weise strukturiert, sondern in einer mathematisch tragfähigen.

Die Studentin fragt an dieser Stelle zum ersten Mal nach einem Teilaspekt, den sie in der weiteren Förderarbeit zunehmend in den Mittelpunkt rücken wird. Zusätzlich zu dieser Fokussierung auf die Benennung des passenden Zehners werden in der sprachlichen Interaktion zwischen Förderin und Malte in weiteren Fördersitzungen andere Teilaspekte in den Fokus genommen (z.B. In welche Teile wird der 2. Summand zerlegt?). Es kann vermutet werden, dass es gerade diese gezielte Aufmerksamkeitsfokussierung ist, die Malte das Entwickeln von Grundvorstellungen (in diesem Fall: zur Addition) und das Voranschreiten im Vierphasenmodell erleichtert.

5. Fazit und Ausblick

Das kurze Beispiel gibt (in Übereinstimmung mit weiteren Analysen) aus unserer Sicht einen Hinweis darauf, dass das genaue Herausarbeiten und Unterscheiden von Funktionen, die die Sprache beim Übergang von der konkreten Materialhandlung zur mentalen Repräsentation erfüllt, fachdidaktisch nützlich sein kann.

Denn es zeigt sich, dass durch den Gebrauch der Sprache die Aufmerksamkeit auf das Material als solches gelenkt werden kann (vgl. Schipper 2003). Im Dialog zwischen Malte und der Studentin wird darüber hinaus aber auch deutlich, dass nicht fortwährend das Material an sich im Mittelpunkt steht, sondern dass die Aufmerksamkeit auch gezielt auf Teilaspekte gerichtet werden kann (und aus fachdidaktischer Perspektive auch sollte), die dem mathematischen Inhalt – in diesem Fall der Strategie des schrittweisen Rechnens – entsprechen. Auf diese Weise wird die auszuführende Materialhandlung im besten Fall in ihre verallgemeinerbaren Bestandteile gegliedert und damit zum Ausgangspunkt für die Entwicklung von Grundvorstellungen.

Literatur

Lompscher, J. (1972). Wesen und Struktur geistiger Fähigkeiten. In J. Lompscher (Hrsg.), *Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten* (S. 17-73). Berlin: Volk und Wissen.

Rottmann, T. & Peter-Koop, A. (2015). Difficulties with whole number learning and respective teaching strategies. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (Hrsg.), *Proceedings of ICMI-Study 23 „Primary Mathematics Study on Whole Numbers“* (S. 362-370). Macau (China): University of Macau.

Schipper, W. (2003). Lernen mit Material im arithmetischen Anfangsunterricht. In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule – Ein Arbeitsbuch* (S. 221-237). Seelze: Kallmeyer.

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen“ as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37 (Suppl. 1), 225-254.

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen.