

BINDER, Karin; RÖSSNER, Michael; EICHLER, Andreas & BÜCHTER, Theresa
München, Kassel

"Da geht es mir kalt den Rücken runter" - Typische Fehler bei Bayesianischen Situationen

Das Zitat "Da geht es mir kalt den Rücken runter" stammt von Markus Lanz und verdeutlicht eine Fehlinterpretation, der er und seine Gäste in der ZDF-Talkshow "Markus Lanz" am 10. November 2021 erlegen sind. Sie verwechselten die Wahrscheinlichkeit, geimpft zu sein, wenn man mit Corona infiziert ist, mit der Wahrscheinlichkeit, sich mit Corona zu infizieren, wenn man geimpft ist (FAZ, 16.11.2021). Fehlinterpretationen im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten sind in Medien, Politik und Wirtschaft keine Seltenheit und finden sich auch regelmäßig in der sogenannten "Unstatistik des Monats" (<https://www.rwi-essen.de/presse/wissenschaftskommunikation/unstatistik>). Einige der Verwechslungen entstehen im Zusammenhang mit sogenannten Bayesianischen Situationen, die vor allem in der Kognitionspsychologie intensiv beforscht werden (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; McDowell & Jacobs, 2017, Barbey & Slomen, 2007). Aus mathematikdidaktischer Sicht ist jedoch nicht nur interessant, aufgaben- und personenspezifische Merkmale zu untersuchen, die Bayesianisches Denken verbessern können, sondern auch zu untersuchen, welche Fehler unter welchen Bedingungen häufig in Bayesianischen Aufgaben passieren, um darauf basierend "Fehlerwissen" lernförderlich einsetzen zu können.

Im *DFG-Projekt FehlBa* (http://www.bayesian-reasoning.de/br_fehl-bayes.html) werden typische Fehler in Bayesianischen Situationen systematisch analysiert. Kern des Forschungsprojekts, an dem ca. 2.400 Versuchspersonen teilnehmen, ist die Frage, wie typische Fehler durch verschiedene Aufgabencharakteristika beeinflusst werden.

Theoretischer Hintergrund

Eine typische Bayesianische Aufgabe (Mammographie-Problem) ist in Abbildung 1 dargestellt. Empirische Befunde zeigen, dass Bayesianische Aufgaben, die im Häufigkeitsformat gestellt werden, häufiger korrekt gelöst werden als Aufgaben im Wahrscheinlichkeitsformat (Gigerenzer & Hoffrage, 1995; McDowell & Jacobs, 2017). Überdies unterstützen bestimmte (aber nicht alle) Visualisierungen Bayesianisches Denken (Binder et al., 2015, Eichler et al., 2020).

Trotz aller Strategien zur Steigerung der Performanz in Bayesianischen Situationen bleibt in allen untersuchten Populationen eine hohe Quote an fehlerhaften Lösungen (Zhu & Gigerenzer, 2006). Dennoch sind Studien, die

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),

Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.

57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.

<https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0>

Muster fehlerhafter Lösungen untersuchen, bislang sehr selten. Empirisch abgesicherte Erkenntnisse zu Fehlermustern sind jedoch zentral, da sie Bestandteil jedes Lernprozesses sind. Fehler sind wichtig für die Steuerung des Lernens und für erfolgreiches Lernen. Für Lehrende wird das Wissen zu Fehlern daher als Teil der professionellen Kompetenz verstanden (Baumert & Kunter, 2011). Für Lernende sind sie schließlich ein wirksamer Lernstoff im Sinne von “Fehlerwissen” (Oser, Hascher & Spychinger, 1999).

Wahrscheinlichkeiten	Natürliche Häufigkeiten
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau Brustkrebs hat, beträgt 2% .	200 von 10.000 Frauen haben Brustkrebs.
Wenn eine Frau Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält 80% .	160 von 200 Frauen, die Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.
Wenn eine Frau keinen Brustkrebs hat, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sie ein positives Testergebnis erhält 10% .	980 von 9.800 Frauen, die keinen Brustkrebs haben, erhalten ein positives Testergebnis.
Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau, die ein positives Testergebnis erhält, tatsächlich Brustkrebs hat?	Frage: Wie viele der Frauen, die ein positives Testergebnis erhalten, haben Brustkrebs?
Antwort: ca. 14 %	Antwort: 160 von 1.140

Abbildung 1: Beispiel einer Bayesianischen Aufgabe in beiden Formaten

Die wenigen Arbeiten zu Fehlern in Bayesianischen Situationen haben gezeigt, dass bei den Antworten von Versuchspersonen typische Fehlermuster unterschieden werden können (Zhu & Gigerenzer, 2006). Ein häufiger Fehler beim Bestimmen einer bedingten Wahrscheinlichkeit aus einer Wahrscheinlichkeits-Vierfeldertafel ist beispielsweise der sogenannte *joint occurrence Fehler* (damit ist die Verwechslung der gesuchten Wahrscheinlichkeit mit der zugehörigen Schnittwahrscheinlichkeit gemeint - im obigem Beispiel $P(B \cap T+)$), der nahezu vollständig verschwindet, wenn in der Vierfeldertafel absolute Häufigkeiten statt Wahrscheinlichkeiten abgebildet werden. Baumdiagramme mit Wahrscheinlichkeiten provozieren hingegen die sogenannte *inverse fallacy* (damit ist die Verwechslung mit der invertierten bedingten Wahrscheinlichkeit gemeint - im obigem Beispiel $P(T+|\text{Brustkrebs})$).

Allerdings haben sich in verschiedenen Studien zum Teil widersprüchliche Ergebnisse gezeigt, die durch unterschiedliche Kontexte in Bayesianischen Situationen, Formate der statistischen Informationen, Visualisierungen oder Frageformate bedingt sein könnten (Binder et al., 2020; Eichler et al., 2020; Gigerenzer & Hoffrage, 1995, Zhu & Gigerenzer, 2006). So ist beispielsweise der Fehler *Pre-Bayes* (nämlich die Berechnung von $P(B)/P(T+)$) erst bei bestimmten Zahlenangaben im Häufigkeitsformat möglich, die in den Aufgabenstellungen früherer Studien nicht immer gegeben waren, da sie zu einer Wahrscheinlichkeit > 1 geführt hätten (diese Antwort wird allerdings

nur äußerst selten gegeben).

Auch die eingesetzten Visualisierungen unterscheiden sich in den bisherigen Studien. Selbst wenn in verschiedenen Studien ein Baumdiagramm fokussiert wurde, wurden teils implizite und teils explizite Baumdiagramme verwendet (siehe Abb. 2), um nur einige Probleme der Vergleichbarkeit bei bisherigen Studien zu nennen, die auch für die teils abweichenden Studienergebnisse verantwortlich sein dürften.

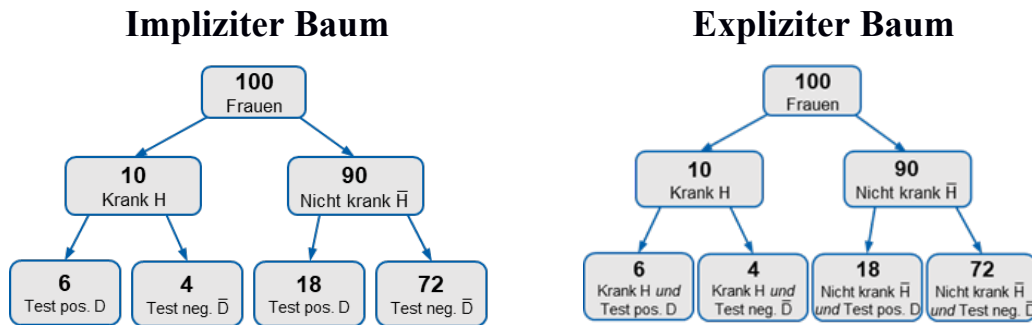


Abbildung 2: Impliziter Baum (links) und expliziter Baum (rechts). Während im expliziten Baum in der untersten Ebene beide Merkmalsausprägungen explizit benannt werden, erfolgt die Nennung der ersten Merkmalsausprägung beim impliziten Baum dadurch nur implizit, dass die Verbindung zur Ebene davor mithilfe eines Astes die Ausprägung des ersten Merkmals beinhaltet.

Design der Studie

Im vorliegenden Projekt soll daher das bestehende Wissen zu Fehlermustern in Bayesianischen Situationen systematisiert und erweitert werden. Hierzu werden in einer Studie mit 2.400 Versuchspersonen (Studierende unterschiedlicher Fachrichtungen) verschiedene Parameter variiert, z.B.:

- Informationsformat (Wahrscheinlichkeiten vs. Häufigkeiten)
- Visualisierung (keine, impliziter Baum, expliziter Baum, Doppelbaum, Netz, typische Vierfeldertafel, grafische Vierfeldertafel, Einheitsquadrat)
- Zahlensets (drei verschiedene Zahlensets, in die drei gegebenen Wahrscheinlichkeiten aus Abbildung 1 systematisch variiert werden)
- Antwortformat in der Häufigkeitsversion (als Anteil in einem Bruch anzugeben vs. als natürliche Häufigkeit, also z.B. "80 von 100" anzugeben)
- Kontext (zwei verschiedene neutral formulierte Kontexte)

Darüber hinaus werden weitere Merkmale der Studierenden erhoben (z.B. Numeracy oder die Präferenz für intuitive oder deliberate Entscheidungen).

Aktueller Stand

Inzwischen liegen die Daten von über 1.700 Versuchspersonen vor. Die Erhebung der weiteren 700 Versuchspersonen soll im Sommer 2024 abgeschlossen werden. Im Vortrag werden die bisherigen (teils widersprüchlichen) Forschungsbefunde aus früheren Studien berichtet, das Studiendesign und Hypothesen vorgestellt. Außerdem werden bereits erste Zwischenergebnisse aus der bisherigen Untersuchung berichtet.

Literatur

- Barbey, A. K., & Sloman, S. A. (2007). Base-rate respect: From ecological rationality to dual processes. *Behavioral and Brain Sciences*, 30(3), 241-254. <https://doi.org/10.1017/S0140525X07001653>
- Baumert, J., & Kunter, M. (2011). Das mathematikspezifische Wissen von Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, 163-192.
- Binder, K., Krauss, S. & Bruckmaier, G. (2015). Effects of visualizing statistical information – an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. *Frontiers in psychology*, 6(1186). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186>
- Binder, K., Krauss, S. & Wiesner, P. (2020). A new visualization for probabilistic situations containing two binary events – the frequency net. *Frontiers in psychology*, 11(750). <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00750>
- Eichler, A., Böcherer-Linder, K., & Vogel, M. (2020). Different visualizations cause different strategies when dealing with Bayesian situations. *Frontiers in Psychology*, 11, 1897. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.01897>
- FAZ (2021). Lanz führt mit Grafik in die Irre - Impfchaos im ZDF. 16.11.2021 (abgerufen am 20.12.2023), <https://www.faz.net/aktuell/feuilleton/medien/markus-lanz-fuehrt-mit-corona-grafik-bei-zdf-talkshow-in-die-irre-17637286.html>
- Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. *Psychological Review*, 102(4), 684–704. <http://dx.doi.org/10.1037/0033-295X.102.4.684>
- McDowell, M., & Jacobs, P. (2017). Meta-analysis of the effect of natural frequencies on Bayesian reasoning. *Psychological bulletin*, 143(12), 1273. <http://dx.doi.org/10.1037/bul0000126>
- Oser, F., Hascher, T., & Spychiger, M. (1999). Lernen aus Fehlern Zur Psychologie des „negativen“ Wissens. In *Fehlerwelten: Vom Fehlermachen und Lernen aus Fehlern. Beiträge und Nachträge zu einem interdisziplinären Symposium aus Anlaß des 60. Geburtstags von Fritz Oser* (pp. 11-41). VS Verlag für Sozialwissenschaften
- Zhu, L., & Gigerenzer, G. (2006). Children can solve Bayesian problems: The role of representation in mental computation. *Cognition*, 98(3), 287-308. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2004.12.003>