

Andreas PRÖMMEL, Rolf BIEHLER, Kassel

Exponentielle Prozesse und Daten – didaktische Komplexität einer einfachen Idee

Leitideen bilden den Orientierungsrahmen für mathematische Bildung in der Schule. Wesentlich ist, dass die Leitideen nicht isoliert nebeneinander stehen, sondern miteinander im Kontext des Mathematikunterrichts vernetzt werden. Bei einem Thema, das sich mit Daten und Funktionen beschäftigt, sind dies naturgemäß die Leitideen „Daten und Zufall“ und „Funktionaler Zusammenhang“, deren zentrale Ideen so in idealer Weise in einem Unterrichtskonzept zusammenfließen können.

1. Kontext des Projektes

In einem Kooperationsprojekt der Universität Kassel (Arbeitsgruppe Rolf Biehler) mit dem Albert-Schweitzer-Gymnasium Kassel (Jürgen Wagner) wurden unter Einbeziehung von Studierenden im Rahmen von SPS (Barbara Böhmer, Anne Voorgang) Materialien zur Umsetzung der Vernetzung der Leitideen „Daten und Zufall“ und „Funktionaler Zusammenhang“ in der Sek. I entwickelt und erprobt. Im Zusammenhang damit wurde das Potential der Software Fathom in diesem Vernetzungsprozess untersucht.

Im Unterrichtskontext lag der Fokus auf der mathematischen Modellbildung bei Wachstums- und Zerfallsvorgängen auf der Grundlage real erhobener Daten in der Jahrgangsstufe 10. Die Ziele unseres Zugangs lassen sich wie folgt beschreiben:

- Grundvorstellungen stärken (Zuordnungsaspekt, Kovariationsaspekt, Objektaspekt),
- mathematische Modelle auf reale Daten anwenden,
- dynamische Modellierung durch iteratives Modellbilden und Parametervariation erfahren,
- Validierung von mathematischen Modellen - Güte von Anpassungen funktionaler Modelle an real erhobene Daten qualitativ bewerten.

2. Anpassung von Funktionen an Daten: Das Newtonsche Abkühlungsgesetz

Nach Behandlung von Wachstumsprozessen sollen die Schüler ein mathematisches Modell an real erhobene Daten anpassen. Die Schüler bekommen auf einem Arbeitsblatt Daten und Informationen zum Newtonschen Abkühlungsgesetz. Das Gesetz soll anhand der Daten geprüft werden, die Konstanten gemessen und geschätzt werden.

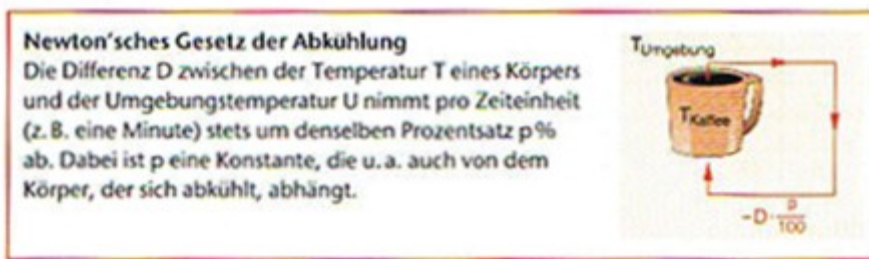


Abb. 1 aus
 Neue Wege 10

Aufgabe für die Schüler ist es zunächst, das Gesetz in einen Funktionsterm umzusetzen und anschließend mit Softwareunterstützung den Term an die Daten anzupassen. Die Daten stammen aus einer Versuchsreihe zur Messung der Abkühlung von Tee in einem Gefäß mit Deckel (aus: B.Böhmer, A.Voorgang (2006). Seminararbeit Universität Kassel).

Eine optimale Arbeitsumgebung in FATHOM ermöglicht das Experimentieren mit den Parametern $D0$ für die anfängliche Temperaturdifferenz und p für die prozentuale Abnahme in einer Zeiteinheit.

Eine optisch bestmögliche Anpassung ergibt sich anschaulich aus dem Einsatz eines Residuendiagramms, dass in Fathom in der Grafik dazugeschaltet werden kann.

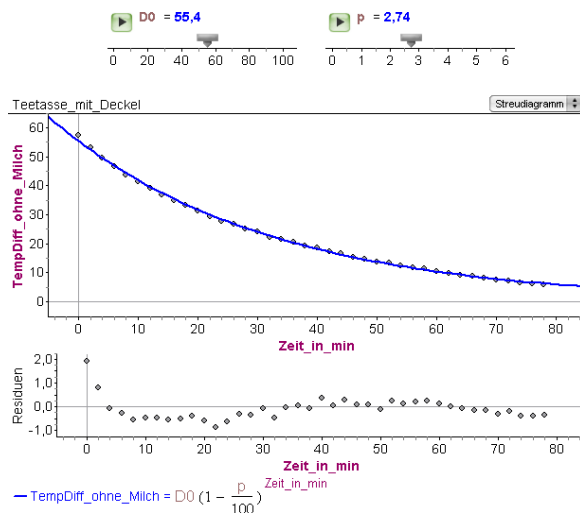


Abb.2 Streudiagramm mit optimal angepasstem funktionalen Modell

Residuen sind Abweichungen der realen Daten vom mathematischen Modell. Anders formuliert lassen sich Daten durch eine Funktion plus Streuung modellieren: $y_i = f(x_i) + r_i$.

Man benutzt Residuen, um die Verträglichkeit eines mathematischen Modells mit Daten grundsätzlich zu prüfen. In einem ersten Schritt kann man das Ergebnis der Modellierung folgendermaßen zusammenfassen: Die Abweichungen bewegen sich zwischen -0,6 und +0,6 Grad, verglichen mit dem beobachteten Temperaturbereich von 10 bis 60 ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Die Temperaturdifferenz nimmt um 2,74% pro Minute ab.

Wenn noch keine befriedigende Übereinstimmung durch die Anpassung nach Augenmaß erzielt wurde, kann man auch das Residuendiagramm zur Verfeinerung einsetzen, um nach bestimmten Strategien Anpassungsverbesserungen vorzunehmen. (Strategie ausgezeichneter Werte, die exakt passen sollen, z.B. der Startwert; Strategie von gleich vielen Werten oberhalb bzw. unterhalb der Nulllinie). Schüler arbeiten sehr verständlich und intuitiv mit dem Werkzeug des Residuendiagramms. Als didaktische Alternative zur bestmöglichen Anpassung per Knopfdruck sollte diese Möglichkeit nicht unterschätzt werden, gerade weil die Schüler aktiv in dieser Phase der Modelloptimierung experimentieren können.

Für erfahrene Datenanalytiker sind hingegen die systematischen Abweichungen in den Residuen auffällig. In einem nächsten Schritt könnte man mehrere verschiedene Exponentialfunktionen anpassen in verschiedenen Zeitphasen. Alternativ wäre eine Anpassung an Geraden bei logarithmierten Daten, wenn der Logarithmus bereits behandelt ist. Anhand des Residuendiagramms kann eine nächste Modellierungsphase starten.

3. Alternative Zugänge – Erweiterungen

Als didaktische Alternative zum vorgestellten Vorgehen wäre auch ein diskreter Ansatz denkbar. Man fragt sich: Liegt überhaupt eine gleiche prozentuale Abnahme in gleichen Zeitabschnitten vor? Man bestimmt durch Quotientenbildung die prozentuale Abnahme in den Temperaturdifferenzdaten, und festigt so eine Grundvorstellung zu exponentiellen Prozessen.

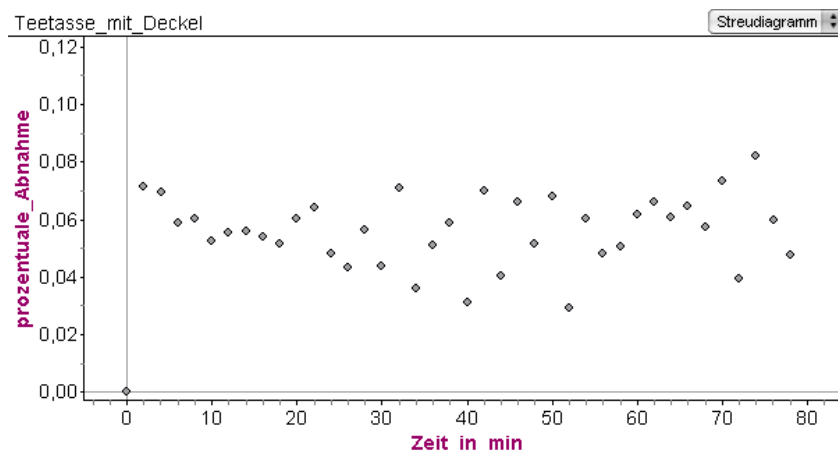


Abb.3 prozentuale Abnahme im Messzeitraum

Man sieht in Abb. 3 , dass die Daten relativ unregelmäßig um den Mittelwert von 0,055 schwanken. In einzelnen Phasen kann man aber doch leicht unterschiedliche prozentuale Abnahmen erkennen. Eine kleine Schwierigkeit ist noch, dass es sich hierbei um die prozentuale Abnahme p_2 in 2 Minuten handelt (die Daten wurden alle 2 Minuten gemessen.) mit den Schülern muss dann noch die Beziehung $(1 - \pi_1)^2 = (1 - \pi_2)$ erarbeitet werden, was

eine gute Gelegenheit ist, um die Umrechnung von Wachstumsfaktoren auf verschiedene Zeitspannen anzuwenden.

4. Exemplarische Schülerschwierigkeiten und Resümees

Erste Rückschlüsse, die in die Optimierung des erstellten Materials einfließen werden, seien an dieser Stelle zusammenfassend genannt.

- Die Umsetzung der Beschreibung des Newtongesetzes in einen anzu-passenden Funktionsterm war schwieriger als erwartet. Unterschiede in den Bezeichnungen in der Software und im Modell wirkten störend.
- Nach der optimalen Parameteranpassung musste gezielt Arbeit investiert werden, um eine Interpretation im Sachkontext vorzunehmen, die nicht allen offensichtlich waren
- Es zeigten sich unterschiedliche, nicht immer optimale Anpassungsstrategien, z.B. wurde am Anfangswert auch dann festgehalten, wenn dadurch die Anpassung schlechter wurde.
- Dass die systematischen Abweichungen im Residuendiagramm interessante Informationen neben der Größe der Abweichung beinhalten, war nicht selbstverständlich. Ein Vergleich mit durch Messfehler hervorgerufenen zufälligen Streuungen wäre als Interpretationshilfe nützlich.
- Die Verbindung zwischen diskreter und kontinuierlicher Sicht der exponentiellen Prozesse muss noch tiefer hergestellt werden und auf die Daten bezogen werden..

Software: Fathom 2. Key Curriculum Press. Deutsche Adaption: AG Rolf Biehler. Springer 2006 [Testversion zum Download und Infos: [http://www-mathematik.uni-kassel.de/~fathom](http://www.mathematik.uni-kassel.de/~fathom)]

Literatur:

- [1] R. Biehler, A. Prömmel, T. Hofmann: Optimales Papierfalten – Ein Beispiel zum Thema „Funktionen und Daten“, erscheint in Der Mathematikunterricht, 53(3), 2007
- [2] A. Kirsch: Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht: In DdM4 (257-284), 1976
- [3] A. Lergenmüller, G. Schmidt: Mathematik Neue Wege 10.Schuljahr, Schroedel, 2004