HOPPE, Helmer & KAISER, Julia T.
Essen

Grundvorstellungen und Aspekte des Stetigkeitsbegriffs im Übergang von der Schule zur Hochschule

Stetigkeit ist ein Begriff, der sowohl für die gymnasiale Oberstufe als auch für die Hochschule relevant ist – immerhin sehen 40% der Hochschullehrenden ein formales Stetigkeitsverständnis als Lernvoraussetzung an (vgl. Pigge et al., 2019). Dennoch stellt die systematische Untersuchung des Stetigkeitsbegriffs, gerade in Bezug auf die Schule, ein Forschungsdesiderat dar.

Das Grundvorstellungskonzept geht auf vom Hofe (1995) zurück und ist seitdem vielfach rezipiert und weiterentwickelt worden. Salle und Clüver (2021) geben einen Überblick über die aktuelle Diskussion zu Grundvorstellungen und betonen die normative Perspektive des Grundvorstellungskonzepts, die im Gegensatz zu der Theorie des *concept image* steht. Aus den Grundvorstellungen eines Gegenstands ergeben sich demnach unterrichtspraktische Bedeutungen in Bezug auf Lehrpläne, Schulbücher und fachdidaktische Lehrwerke (vgl. Salle & Clüver, 2021).

Im Rahmen dieses Beitrags werden Grundvorstellungen und Aspekte des Stetigkeitsbegriffs hergeleitet. Das methodische Vorgehen orientiert sich dabei an dem von Salle und Clüver (2021) vorgestellten Verfahrensrahmen. Aufgrund der Komplexität des Stetigkeitsbegriffs sind aus der Definition herausgelöste Kernelemente (wie bspw. konvergierende Urbildfolgen) jedoch wenig aussagekräftig. Deshalb werden in diesem Beitrag stattdessen Aspekte im Sinne von Greefrath et al. (2016) formuliert.

1. Festlegung des Bezugsrahmens und Klassifizierung der Phänomene

Das Konzept der Stetigkeit soll am Übergang von der gymnasialen Oberstufe zur Studieneingangsphase mit fachmathematischen Anteilen untersucht werden. Daher werden nur Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gegebenenfalls mit eingeschränkten Definitions- und Wertebereichen betrachtet.

Den Bezugsrahmen für die Herleitung der Grundvorstellungen des Stetigkeitsbegriffs, also "diejenigen Kenntnisse, Kompetenzen und (Grund-)Vorstellungen […], die notwendig für den Aufbau dieser Grundvorstellungen sind" (Salle & Clüver, 2021), bildet ein Verständnis des Funktionsbegriffs, welches mindestens eine ausgeprägte Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung umfasst, sowie des (propädeutischen) Grenzwertbegriffs für Funktionen. Somit werden die folgenden Definitionen zugrunde gelegt:

- Folgenstetigkeit: Eine Funktion f heißt stetig in x_0, wenn für alle Folgen mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

- Umgebungsstetigkeit: Eine Funktion f heißt stetig in x_0, wenn für jede Umgebung V von $f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 existiert, sodass $f(U) \subseteq V$.
- Globale Stetigkeit: Eine Funktion f heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

Die gebräuchlichste Formulierung der Umgebungsstetigkeit für Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die ε-δ-Stetigkeit. Weitere Definitionen, bspw. Urbildstetigkeit, werden als nicht relevant im Sinne des betrachteten Bezugsrahmens angesehen. Auf dieser Grundlage sollen die folgenden Phänomene des Stetigkeitsbegriffs klassifiziert werden:

- Zusammenhang/Durchzeichenbarkeit des Graphen, Sprungfreiheit
- Untersuchung gegebener Funktionen auf Stetigkeit bzw. stetige Fortsetzbarkeit
- Vorhersagbarkeit: Kleine Änderungen von x führen nur zu kleinen Änderungen von f.
- Berechenbarkeit: Änderungen von f können beliebig klein gehalten werden, wenn nur die Änderungen von x klein genug gehalten werden.
- Approximierbarkeit: Nähert man sich x, nährt man sich $f(x)$.
- Notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Zwischenwertsatz, Nullstellensatz
- Vektorraum der stetigen Funktionen

Erste Klasse: Zusammenhang des Graphen. Den Phänomenen dieser Klasse liegt eine dynamische Sicht der Erzeugung bzw. des Durchlaufens des Graphen zugrunde: Hierunter fallen Phänomene wie Durchzeichenbarkeit, Sprungfreiheit, sowie Approximierbarkeit, stetige Fortsetzbarkeit und Untersuchung von Funktionen an Nahtstellen, aber auch der Zwischenwert- und Nullstellensatz und der Zusammenhang mit der Differenzierbarkeit. Phänomene dieser Art erfordern meist globale Stetigkeit.

Zweite Klasse: Störungen von x. In dieser Klasse von Phänomenen steht die kleine Abweichung der x-Werte von einem festen Wert x_0 und die daraus resultierende kleine Abweichung der Funktionswerte von $f(x_0)$ im Vordergrund. Diese wird aus dem Konvergenzverhalten der Bildpunkte bei Konvergenz der Urbildpunkte begründet. Hauptvertreter dieser Klasse sind die Phänomene der Vorhersagbarkeit.

Dritte Klasse: Genauigkeit von f. Im Gegensatz zur zweiten Klasse liegt bei diesen Phänomenen der Fokus auf einer geforderten kleinen Abweichung

der Bildpunkte von $f(x_0)$, welche durch Kleinhalten der Abweichungen der Urbildpunkte von x_0 erreicht wird. Diese Sichtweise entspricht der Umgebungsstetigkeit. Gebildet wird diese Klasse von den Phänomenen der Berechenbarkeit, welche bspw. in der Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung eine Rolle spielen.

Vierte Klasse: Kalkül. In diese Klasse fallen Phänomene, in denen mit stetigen Funktionen nach bestimmten Regeln umgegangen wird, ohne sich dabei der Hintergründe und Anschauungen stets bewusst zu sein. Neben Stetigkeitsuntersuchungen mittels Rückführung auf bekannte Prototypen durch Verknüpfung oder Verkettung gehört zu dieser Klasse auch die Anwendung mathematischer Sätze mit Stetigkeit als Voraussetzung.

2. Formulierung von Grundvorstellungen und Aspekten

Die obige Klassifizierung der Phänomene führt zu folgenden Grundvorstellungen und ihnen zugrundeliegenden Aspekten:

Durchzeichenbarkeitsvorstellung: Jeder Punkt des Graphen kann von jedem anderen Punkt des Graphen erreicht werden. Der Graph ist ohne abzusetzen durchzeichenbar – es gibt keine Sprünge im Graphen. Insbesondere handelt es sich um eine globale Sicht der Stetigkeit.

Vorstellung der kleinen Abweichungen…

- **… von x:** Kleine Abweichungen von x führen nur zu kleinen Abweichungen von f.
- **… von f:** Abweichungen von f können beliebig klein gehalten werden, indem die Abweichungen von x klein gehalten werden.

Kalkülvorstellung: Mit Stetigkeit kann als abstrakter mathematischer Eigenschaft agiert werden, z.B. Verknüpfungen und Verkettungen stetiger Funktionen sind wieder stetig.

Folgenstetigkeits- und Umgebungsstetigkeitsaspekt: Da bei der Folgenstetigkeit die dynamische Erzeugung bzw. das Durchlaufen des Graphen gedanklich im Fokus steht, geht dieser Aspekt in die Vorstellung der Durchzeichenbarkeit aber auch in die Vorstellung der kleinen Abweichungen von x ein. Der zentrale Punkt beim Aspekt der Umgebungsstetigkeit ist der Zusammenhang von Bild- und Urbildraum, der in den Grundvorstellungen der kleinen Abweichungen zum Tragen kommt. Natürlich kann auch unter der Perspektive der Umgebungsstetigkeit der Zusammenhang des Graphen und insbesondere die Sprungfreiheit begründet werden, allerdings nicht in dem für die Durchzeichenbarkeitsvorstellung charakteristischen dynamischen Sinn des Erzeugens bzw. Durchlaufens des Graphen.

Da bei der Kalkülvorstellung der abstrakte Umgang mit der mathematischen Eigenschaft im Fokus steht, spielen beide Aspekte hier nur eine untergeordnete Rolle.

3. Fazit und Ausblick

Im vorliegenden Betrag wurden für den Übergang zwischen gymnasialer Oberstufe und mathematischem Hochschulstudium Grundvorstellungen und Aspekte des Stetigkeitsbegriffs auf Grundlage relevanter Definitionen und Phänomene hergeleitet und begründet. Die in der Literatur zu findenden Grundvorstellungen (vgl. bspw. Apel, 2022) werden dadurch systematisch fundiert und um die Kalkülvorstellung ergänzt.

Es ist zu beachten, dass der Aspekt der Umgebungsstetigkeit, selbst in der Form der ε-δ-Stetigkeit, aufgrund seiner hohen Abstraktheit und Komplexität vermutlich keine Berücksichtigung in der gymnasialen Oberstufe findet. Die obigen Betrachtungen haben jedoch gezeigt, dass die Grundvorstellung der kleinen Abweichungen von f nur über diesen Aspekt zugänglich ist und daher dem Hochschulstudium vorbehalten bleibt.

Ausgehend von den hergeleiteten Grundvorstellungen zur Stetigkeit kann nun untersucht werden, welche dieser Grundvorstellungen sich in den Anforderungen der Lehrpläne der einzelnen Bundeländer finden, wie die Umsetzung in den verschiedenen Lehrbüchern geschieht um später zu untersuchen, welche Vorstellungen Schüler*innen zur Stetigkeit entwickeln und wie sich Lernumgebungen (weiter-)entwickeln lassen.

Literatur

Apel, I. M. (2022). *Zum Einfluss von Kenntnisqualitäten auf Beweisprozesse am Beginn eines Mathematikstudiums aus tätigkeitstheoretischer Perspektive – Exemplarische Untersuchung am Beispiel der ε-δ-Definition von Stetigkeit.* [Dissertation]. TU Darmstadt. https://doi.org/10.26083/tuprints-00020705

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Springer Spektrum.

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Spektrum Akademischer Verlag.

Pigge, C., Neumann, I. & Heinze, A. (2019). Notwendige mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge – die Sicht der Hochschullehrenden. In *Der Mathematikunterricht, 2*, 29–38.

Salle, A. & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. In *Journal für Mathematik-Didaktik, 42*, 553–580. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5.