

Algebraische Gleichheitsbeziehungen im Kontext des Arithmetikunterrichts der Grundschule

Im Arithmetikunterricht der Grundschule herrscht häufig eine operationale Sichtweise auf Terme vor, denn das Gleichheitszeichen wird überwiegend als Operationszeichen genutzt. Gleichwohl ist es bereits in der Grundschule ein zentrales Ziel, das flexible und möglichst geschickte Rechnen zu fördern, bei dem nicht lediglich vorgegebene Operationen ausgeführt werden, sondern das Erkennen und Nutzen von Beziehungen und Strukturen in den Vordergrund rückt. Dieses Ziel erweitert die Sichtweise auf Terme und das Gleichheitszeichen um eine relationale Perspektive auf Gleichheiten.

1. Verschiedene Sichtweisen auf Gleichheiten

Im Kontext des Aufbaus eines Operationsverständnisses zu den verschiedenen Grundrechenarten wird das Gleichheitszeichen in der Grundschule zu meist als Zeichen eingeführt, das zwischen einer Aufgabe und ihrem Ergebnis steht, wodurch primär eine operationale Sicht auf Terme bzw. Gleichungen angeregt wird. Es wird somit von den Kindern mit der Aufforderung zum Ausrechnen, zum Durchführen von Operationen, assoziiert. Diese durchaus wichtige Deutung des Gleichheitszeichens wird bei der Erarbeitung von Operationsvorstellungen nach und nach gefestigt.

Eine weitere wichtige Sichtweise auf das Gleichheitszeichen, das auch als Zeichen für Gleichheit bzw. Gleichwertigkeit fungiert, wird dabei häufig noch nicht eingenommen (vgl. Winter 1982). Jedoch ist genau diese Vorstellung von gleichwertigen, aber unterschiedlich schwierig zu berechnenden Termen entscheidend für schnelles und geschicktes Rechnen. Zentrale Voraussetzungen für flexibles Rechnen sind z. B. das Erkennen von Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehungen oder das Verfügen über strategische Werkzeuge im Sinne mentaler Hilfsmittel zum operativen Verändern und Vereinfachen von Aufgaben (vgl. Rathgeb-Schnierer 2014). Die Ausbildung eines umfassenden Gleichheitsverständnisses und die Fähigkeit zum flexiblen Rechnen sind daher eng verknüpft. Für die Entwicklung von flexiblem Rechnen muss neben der operationalen auch eine relationale Perspektive auf Gleichheiten eingenommen werden.

Darüber hinaus hat eine solche erweiterte Sichtweise auf Gleichungen auch eine wichtige propädeutische Bedeutung im Hinblick auf den Algebraunterricht der Sekundarstufe. Hier wird das Gleichheitszeichen fast ausschließlich als Relationszeichen genutzt, das die Gleichwertigkeit zweier Terme angibt. Die Terme werden nicht mehr ausgerechnet, was aufgrund der Variablen

auch gar nicht möglich ist, sondern es wird durch geschicktes Umformen der Gleichung der Wert für die enthaltene Variable ermittelt.

Ziel des Mathematikunterrichts der Grundschule sollte daher die Entwicklung eines umfassenden, flexiblen Gleichheitsverständnisses sein, das sowohl die operationale als auch die relationale Perspektive beinhaltet (vgl. Mayer 2015).

2. Gleichheitsverständnis in der Grundschule

Vergleicht man Studien, die sich auf das Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern beziehen, lässt sich feststellen, dass es zum einen Studien gibt, die das Verständnis von Gleichheiten im Kontext substanzieller Aufgabenformate wie z. B. Vermittleraufgaben oder Rechenkettens untersuchen (vgl. u. a. Mayer 2015, Nührenböcker & Schwarzkopf 2013), die das Gleichheitszeichen bewusst vermeiden. Hier zeigt sich, dass die Grundschul Kinder durchaus über ein relationales Gleichheitsverständnis verfügen. Zum anderen gibt es zahlreiche Studien, auch aus dem Sekundarstufenbereich, die sich konkret mit dem Umgang mit Gleichungen, beispielsweise dem Vervollständigen oder Beurteilen von Gleichungen, oder der Bedeutung des Gleichheitszeichens für Schülerinnen und Schüler befassen (vgl. u. a. Borromeo Ferri & Blum 2011, Falkner et al. 1999, McNeil & Alibali 2005). Diese Studien, bei denen das Gleichheitszeichen und sein formaler Gebrauch im Vordergrund stehen, haben ein stark einseitiges operationales Gleichheitsverständnis der Schülerinnen und Schüler ermittelt.

Seo & Ginsburg (2003) sprechen in diesem Zusammenhang von einer „pseudo-flexiblen“ Interpretation von Gleichheiten. Die Schülerinnen und Schüler zeigen kontextabhängig verschiedene Deutungen von Gleichheiten, diese unterschiedlichen Sichtweisen sind aber meistens nicht miteinander verknüpft. Der Kontext gibt vor, welche Sichtweise aktiviert wird (vgl. Seo & Ginsburg 2003). Da in Bezug auf die Verwendung des Gleichheitszeichens häufig der Aufgabe-Ergebnis-Kontext vorherrscht, wird die operationale Sichtweise stark gefördert und ist bei den Schülerinnen und Schülern entsprechend dominant.

3. Forschungsprojekt

Ziel des qualitativen Forschungsprojektes ist es, auf konstruktiver Ebene ein Lehr-Lernarrangement zu entwickeln, das ein umfassendes, flexibles Gleichheitsverständnis bei den Kindern anregen kann, sowohl in Kontexten mit Gleichheitszeichen als auch ohne. Auf rekonstruktiver Ebene steht die Frage im Vordergrund, wie Grundschul Kinder entdeckte Gleichheiten an Termdar-

stellungen begründen und inwiefern sie Vorstellungen, die sie durch die Arbeit mit den Aufgabenformaten aufgebaut haben, auf den generellen Umgang mit Gleichungen übertragen. Dazu wurden, basierend auf den Ergebnissen der angeführten Studien, Lehr-Lernarrangements entwickelt, die eine Kombination aus substanziellem Aufgabenformat und einer formalen Darstellung in Gleichungen beinhalten (vgl. Nührenbörger & Unteregge 2017) (s. auch Abb. 1):

- Einerseits beruhen sie auf einem substanziellen Aufgabenformat (Zahlenfolgen bzw. Rechendreiecke), das das Betrachten von Gleichheiten ermöglicht, aber ohne das Gleichheitszeichen auskommt,
- andererseits nutzen sie aber auch die formale Darstellung in Gleichungen, wobei diese immer aus Termen bestehen, die sich aus dem Aufgabenformat ergeben.

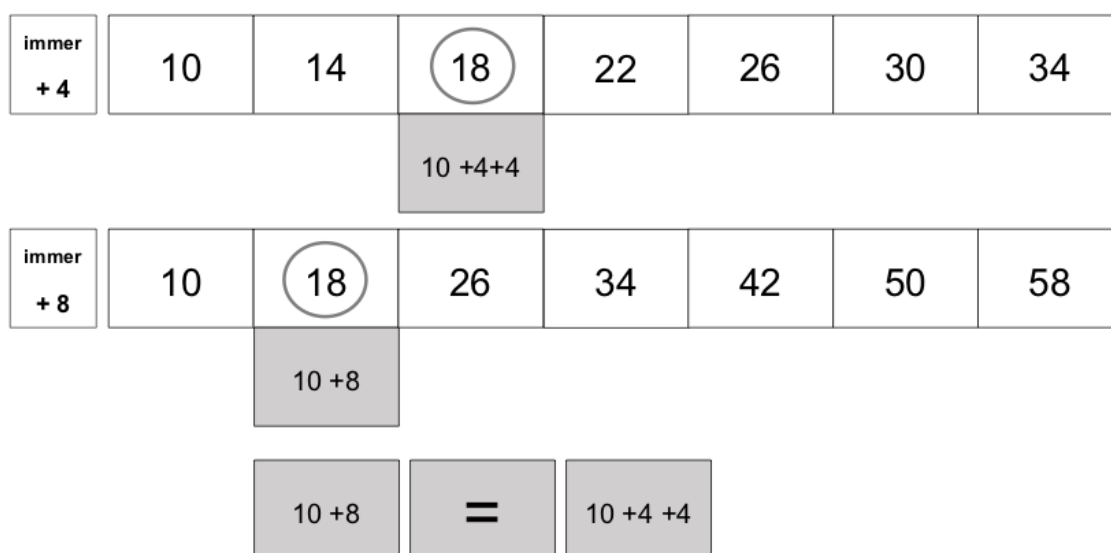


Abb. 1: Formal dargestellte Gleichung zu den gleichen Feldern (18) der Zahlenfolgen

Zu den entwickelten Lehr-Lernarrangements wurde jeweils eine Reihe anregender Partnerinterviews mit Viertklässlern durchgeführt, diese videografiert, gesichtet und teilweise transkribiert.

Bezüglich der verschiedenartigen Begründungen der Kinder hat sich aus den bisherigen Analysen ein Modell ergeben, das die Begründungen in einer Spanne zwischen Ergebnis- und Strukturorientierung verortet (s. Abb. 2).



- Begründung über**
1. berechnete **Gesamtergebnisse der Terme**
 2. berechnete **Zwischenergebnisse**
 3. Struktur der **Terme**
 4. Struktur der **Terme mit verallgemeinernden Ansätzen**

Abb. 2: Begründungen für Gleichheiten in der Spanne zwischen Ergebnisorientierung und Strukturorientierung

4. Ausblick

Eine genaue Charakterisierung der Begründungsprozesse in der Interaktion soll mit Hilfe epistemologischer Analysen erfolgen. Hier wird vermutet, dass es einen deutlichen Zusammenhang zwischen den Referenzkontexten der Kinder und der Verortung ihrer Begründungen in der Spanne zwischen Ergebnis- und Strukturorientierung gibt.

Literatur

- Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2011). Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 127-130. Münster: WTM-Verlag.
- Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6 (4), 232-236.
- Mayer, C. (2015). Argumentativ geprägte Lernsituationen zur Erkundung arithmetischer Gleichheiten. In A. S. Steinweg (Hrsg.): *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten von Kindern im Grundschulalter*. Bamberg: University Press, 87-90.
- McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2005). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. *Journal of Cognition and Development*, 6 (2), 285-306.
- Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2013). Gleichungen zwischen „Ausrechnen“ und „Umrechnen“. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 716-719. Münster: WTM-Verlag.
- Nührenbörger, M. & Unteregge, S. (2017). Aufgaben vergleichen in der Grundschule – Entdecken und Begründen algebraischer Gleichheitsbeziehungen im Kontext der Arithmetik. *Die Grundschulzeitschrift*, 31 (306), 30-35.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2014). Flexibel Rechnen lernen. Erkennen und nutzen von Aufgabenmerkmalen und Zahlbeziehungen. *Die Grundschulzeitschrift*, 28 (280), 28-33.
- Seo, K. & Ginsburg, H. (2003). Classroom context and children's interpretations of the equals sign. In: A. Baroody & A. Dowker (Hrsg.): *The Development of Arithmetic Concepts and Skills*. London: LEA, 161-187.
- Winter, H. (1982). Das Gleichheitszeichen im Mathematikunterricht der Primarstufe. *Mathematica didactica*, 5 (4), 185-211.