

Daniela BEHRENS, Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Die digitale Stellenwerttafel: Aufgabendesign zur Einführung von Dezimalbrüchen

Empirische Untersuchungen belegen, dass viele Schülerinnen & Schüler Fehlvorstellungen im Umgang mit Dezimalbrüchen entwickeln, deren Hauptursachen in falschen Übertragungen aus den natürlichen Zahlen und den Brüchen sowie in einem überwiegend verfahrensbasierten Umgang mit Dezimalbrüchen im Mathematikunterricht verortet werden (Heckmann, 2006). Insgesamt müssen verschiedene Vorstellungsumbrüche in der Zahlbereichserweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen geleistet werden, die insbesondere durch ein Verständnis des Aufbaus des dezimalen Stellenwertsystems erreicht werden können (ebd.).

Wie diese Zahlbereichserweiterung innerhalb des dezimalen Stellenwertsystems mit Hilfe einer digitalen Stellenwerttafel auf dem iPad stattfinden kann, wird im Rahmen einer Design-Based Research Studie im Projekt DeciPlace (Kooperationsprojekt mit der Universität Potsdam & der Universität des Saarlandes) untersucht. Im vorliegenden Beitrag wird ein Einblick in das entwickelte Aufgabendesign gegeben und der Frage nachgegangen:

Wie setzen Schüler_innen die Stellenwerttafel nach rechts fort?

Zur Beantwortung dieser Frage werden Strategien vorgestellt, die zehn Schülerpaare des fünften Jahrgangs einer Bremer Gesamtschule in ersten Designexperimenten genutzt haben, um die Stellenwerttafel nach rechts zu erweitern.

Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems um Dezimalstellen

Ein zentrales Prinzip für Zahlbereichserweiterungen ist das Permanenzprinzip, mit dem eine mathematische Struktur unter Erhalt bestimmter Strukturelemente erweitert wird. Die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den rationalen Zahlen in der dezimalen Zahldarstellung erhält man z.B. durch Fortsetzen der Anwendung des Bündelungsprinzips zur Basis 10 (Ross, 1989, S. 47). Dabei bleibt die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems, gekennzeichnet durch das Positionsprinzip, das Bündelungsprinzip sowie das additive & multiplikative Prinzip (ebd.), erhalten.

Hintereinanderausführungen der Transformationen „Bündeln“ und „Entbündeln“ stellen eine Äquivalenzrelation in der Menge aller dezimalen Standard- und Nicht-Standard-Zerlegungen (vgl. Ladel & Kortenkamp, 2016, S. 293) von Brüchen dar, z.B. als Darstellungen in der (auch unendlichen) dezimalen Stellenwerttafel. Zwei dezimale Zerlegungen sind dann

In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. x–y). Münster: WTM-Verlag

äquivalent, wenn sie sich durch eine endliche oder unendliche Anzahl von „Bündelungen“ und „Entbündelungen“ gemäß des Bündelungsprinzips ineinander überführen lassen. Mit der Äquivalenzrelation gewinnen wir eine Klasseneinteilung. Eine Klasse ist durch einen festen Wert gekennzeichnet, der eindeutig als vollständig entbündelter Dezimalbruch angegeben werden kann.

Die digitale Stellenwerttafel auf dem iPad (Ladel & Kortenkamp, 2013) ermöglicht eine visuell-dynamische Darstellung dieser zentralen Transformationen des Bündelns und Entbündelns. Sie unterscheidet sich von der traditionellen Stellenwerttafel, indem der Wert der dargestellten Zahl bei Veränderung der Darstellung invariant bleibt und dadurch Erkundungsaktivitäten auf das Erschließen der Struktur gerichtet werden können.

Zusammenfassend kann aus den vorherigen Überlegungen ein Designprinzip für die hier vorgestellten Aufgaben zur Einführung von Dezimalbrüchen formuliert werden: Anschauliche Aktivitäten des Bündelns und Entbündelns in der digitalen Stellenwerttafel sollen genutzt werden, um die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems erkunden und die Stellenwerttafel um Dezimalstellen fortsetzen zu können.

Design der Aufgaben

Die Kernaufgabe des Aufgabendesigns besteht darin, möglichst viele verschiedene Darstellungen zu einer festgelegten Zahl in der (digitalen) Stellenwerttafel zu finden:

Wie viele verschiedene Darstellungen findet ihr für die Zahl 52 in der Stellenwerttafel?

Durch die in der Aufgabe geforderten Bündelungs- und Entbündelungsaktivitäten wird das Bündelungsprinzip des dezimalen Stellenwertsystems erfahrbar gemacht. Um dabei an das Vorwissen der Schülerinnen & Schüler anzuknüpfen und die Fortsetzung der Anwendung des Bündelungsprinzips vorzubereiten, sammeln sie zunächst verschiedene Zerlegungen zu zwei- und dreistelligen natürlichen Zahlen wie 52 und 101 in der Stellenwerttafel [HZE]. Als Hinführung auf eine Erweiterung der Stellenwerttafel nach rechts erhalten sie die gleiche Aufgabe für die Zahl 4 und sollen anschließend kurz erklären, warum zunächst nur eine Darstellung für die Zahl 4 gefunden werden kann. Folgende Aufgabenstellung soll dann die Erweiterung initiieren:

Zeichnet dann eine erweiterte Stellenwerttafel auf, mit der ihr mehrere Darstellungen für die Zahl 4 finden könnt.

Empirische Einblicke in Erweiterungsstrategien

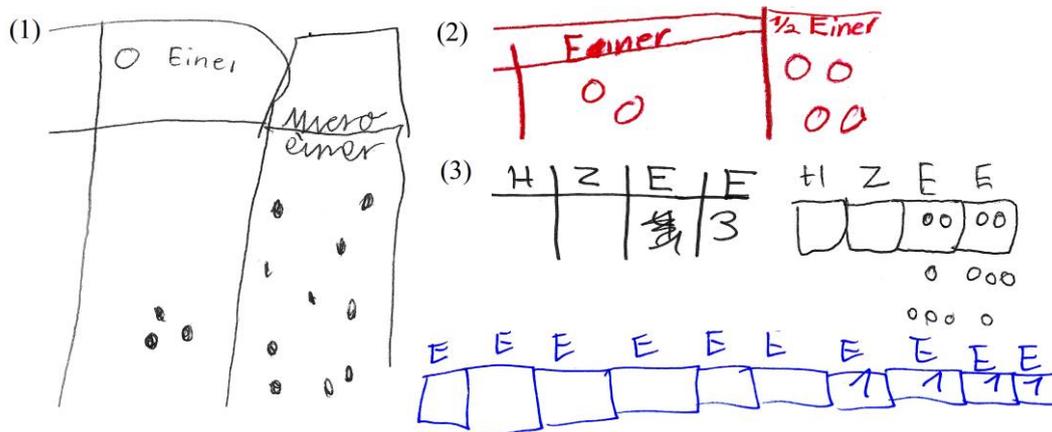
In ihren Begründungen, warum es für die Zahl 4 nur eine Darstellung in der Stellenwerttafel gibt, beschreiben die Schülerpaare, dass...

- 1) ... sich die Zahl beim Verschieben von Plättchen verändert, denn „wenn wir einen Einer verschieben, dann haben wir eine andere Zahl“.
- 2) ... Bündeln nicht möglich, denn „man kann keine Einer zu Zehner wandeln, nur wenn man zehn Einer hat“.
- 3) ... Entbündeln nicht möglich ist, da „es nur Einer sind und keine Zehner“.
- 4) ... Entbündeln nicht möglich ist, denn „kleinere Stellen als die Einer gibt es nicht“.

Während die erste Beschreibung sich auf die Darstellungsweise in der traditionellen Stellenwerttafel bezieht, verweisen die Beschreibungen 2) – 4) auf die Erfahrungen mit dem Bündelungsprinzip in der digitalen Stellenwerttafel. Die letzte Aussage deutet außerdem darauf hin, dass man eine „kleinere Stelle als die Einer“ bräuchte, um auch für die Zahl 4 weitere Darstellungen zu finden.

Für die Erweiterung der Stellenwerttafel haben sich drei unterschiedliche Strategien gezeigt (vier Schülerpaare haben keine Erweiterung angegeben):

- (1) Ein Schülerpaar erweitert die Stellenwerttafel um die Stelle „Microeiner“ gemäß dem Permanenzprinzip, indem die Prinzipien des Stellenwertsystems und somit auch die Anwendung des Bündelungsprinzips zur Basis 10 fortgesetzt werden (siehe Abbildung).
- (2) Zwei Schülerpaare schlagen eine Zerlegung der Einer in „Halbe Einer“ vor (siehe Abbildung). Dabei nehmen sie den Aspekt des Entbündelns eines Einers gemäß dem Bündelungsprinzip zwar auf, setzen diese Entbündelung jedoch nicht dezimal, sondern alltagsbezogen fort.
- (3) Anstatt die Einer in kleinere Einheiten zu entbündeln, reproduzieren drei Schülerpaare die Einerstelle und nutzen somit die Lage in der visuellen Gestaltung als entscheidendes Kriterium für die Variation von Darstellungen (siehe Abbildung). Sie haben erkannt, dass der Wert eines Plättchens von dessen Lage in der Stellenwerttafel abhängig ist. Das Bündelungsprinzip wird in dieser Fortsetzung der Stellenwerttafel nicht berücksichtigt.



Schlussfolgerungen

Diese drei Erweiterungsstrategien können Hinweise geben, inwiefern die Struktur des dezimalen Stellenwertsystems im Hinblick auf die fortsetzbare Anwendung des Bündelungsprinzips bereits verstanden wurde und tatsächlich ausgeführt werden kann. Dabei haben alle drei Erweiterungsstrategien ihre Berechtigung, denn sie alle setzen die Stellenwerttafel fort: visuell, in einer Alltagszerlegung und nach der Struktur des dezimalen Stellenwertsystems. Es stellt sich die für eine Unterrichtsgestaltung wichtige Frage, ob es weitere Strategien gibt und wenn ja, welche.

Die Diversität dieser Strategien, die Lernende zur Erweiterung der Stellenwerttafel nutzen, bietet Potenzial für die Entwicklung eines Lehr-Lernarrangements im Klassensetting: *Einen Namen für die Strategien erfinden* sorgt dafür, dass sich Lernende ihres Vorgehens bewusst werden; *diese der Klasse vorzustellen*, verlangt, dass man seine Idee mitteilt; *die Strategien zu vergleichen*, bietet die Chance den Kern der Struktur des Stellenwertsystems in einem fachlichen Diskurs für alle sichtbar herauszubilden.

Literatur

- Heckmann, K. (2006). Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern – Theoretische Analyse und empirische Befunde. Berlin: Logos Verlag.
- Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artefact-centric activity theory. In A.M. Lindmaier, & A. Heinze (Hrsg.), Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1 (S. 188-192). Kiel, Germany: PME.
- Ladel, S., & Kortenkamp, U. (2016). Development of a Flexible Understanding of Place Value. In T. Meaney, O. Helenius, M.L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Hrsg.): Mathematics Education in the Early Years. Results from the POEM2 Conference (S. 289-309). Cham: Springer International Publishing.
- Ross, S.H. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, 36 (6), 47–51.