DAMRAU, Milena
LMU München

Das Verständnis von Allgemeingültigkeit mathematischer Aussagen – eine experimentelle Studie im Übergang Schule/Hochschule

Mathematische Forschung resultiert überwiegend in Aussagen, die – sobald sie bewiesen wurden – *ohne jegliche Ausnahmen* wahr sind. Diese *uneingeschränkte Allgemeingültigkeit* sowie die Methode, der *Beweis*, mit der entsprechende Aussagen gesichert werden, sind für die Mathematik zentral. Aufgrund dieser fundamentalen Rolle in der Mathematik ist das Beweisen seit vielen Jahrzehnten ein Forschungsschwerpunkt in der Mathematikdidaktik. In der Literatur dabei bisher nicht systematisch untersucht wurde das *Verständnis der Allgemeingültigkeit von Aussagen* von Lernenden, also das Verständnis, dass es zu wahren Allaussagen kein Gegenbeispiel gibt. Dieses ist jedoch für das Verständnis mathematischer (All-)Aussagen und Beweise bedeutsam, da es wie erwähnt ebendiese Allgemeingültigkeit ist, die allgemeingültige Beweise überhaupt notwendig macht und als ein wesentliches Kennzeichen von Mathematik gelten kann. Die Bedeutung des Verständnisses von Allgemeingültigkeit von Lernenden wird entsprechend in der Literatur immer wieder betont (z.B. Conner, 2022; Fischbein, 1982). Bisher gibt es jedoch praktisch keine Studien, die das Verständnis von Allgemeingültigkeit von Aussagen explizit untersucht haben. Die wenigen Studien, die bisher durchgeführt wurden (die meisten von ihnen rein beschreibend) setzen das Verständnis von Allgemeingültigkeit mathematischer Aussagen direkt mit (dem Verständnis der Allgemeingültigkeit von) Beweisen in Beziehung (z.B. Chazan, 1993; Knuth, 2002; Healy & Hoyles, 2000). Die Allgemeingültigkeit von Beweisen meint dabei, dass die Allgemeingültigkeit einer entsprechenden Aussage abgesichert wird, es also keinerlei Gegenbeispiele zu dieser geben kann. In Bezug auf ein angemessenes Beweisverständnis argumentieren einige Forschende, dass die Verwendung oder Überzeugung von empirischen Argumenten auf ein unzureichendes Verständnis von Allgemeingültigkeit hinweisen kann (z.B. Conner, 2022). Der konkrete Zusammenhang wurde allerdings bisher nicht untersucht, insbesondere bezogen auf das Verständnis von Allgemeingültigkeit mathematischer *Aussagen*.

Forschungsinteresse

Das Hauptziel der vorliegenden Studie ist es, das Verständnis der Allgemeingültigkeit mathematischer Aussagen von Studienanfänger:innen und den Bezug zum Lesen und Konstruieren von verschiedenen Arten von Argumenten (keine Argumente, empirische Argumente, generischer und traditioneller Beweis) theoretisch zu fassen und empirisch zu untersuchen. Darüber hinaus

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

wurden die Vertrautheit mit der Aussage und ihre Gültigkeit in einer Rahmentheorie als wichtige Merkmale berücksichtigt, da diese ebenfalls die Leistung von Studierenden bei beweisbezogenen Aktivitäten beeinflussen können (siehe z.B. Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002; Hanna, 1989; Stylianides, 2007). Konkret wurden im abgeschlossenen Dissertationsprojekt (Damrau, im Druck) unter anderem folgende Fragen untersucht:

- Wie groß ist der Anteil der Studierenden, die nicht davon überzeugt sind, dass es keine Gegenbeispiele zu einer wahren Allaussage gibt?
- Welchen Einfluss hat das Lesen verschiedener Arten von Argumenten auf das Verständnis von Allgemeingültigkeit einer mathematischen Aussage?
- Wie beeinflusst die Art der Aussage das Verständnis der Allgemeingültigkeit der Aussage?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Verständnis von Allgemeingültigkeit von Aussagen und der Nutzung von sowie der Überzeugung durch empirische Argumente?

Methodik

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine experimentelle Fragebogenstudie konzipiert, die in zwei Erstsemestervorlesungen im November 2020 online durchgeführt wurde. 430 Lehramts- und Mathematikstudierende einer deutschen Universität in Nordrhein-Westfalen nahmen an der Untersuchung teil. Die Teilnehmenden wurden zufällig in vier Gruppen eingeteilt: Gruppe A erhielt keine Argumente zur Begründung der Aussagen, Gruppe B erhielt empirische Argumente in Form von drei bzw. vier Beispielen, Gruppe C generische Beweise und Gruppe D traditionelle Beweise (wie sie typischerweise von Mathematiker:innen konstruiert würden).

Alle Studienteilnehmenden – unabhängig von ihrer Gruppe – mussten dann jeweils zwei Fragen zu denselben fünf Allaussagen (zwei von ihnen aus der Geometrie und aus der Schule *bekannt*, zwei von ihnen aus der elementaren Zahlentheorie und *unbekannt* und eine *falsch*) beantworten. In den Fragen ging es um die Einschätzung der Gültigkeit der Aussagen (gefragt wurde im Item nach der *Richtigkeit*) und darum, ob sie überzeugt davon sind, dass es keine Gegenbeispiele geben kann (letzteres wurde so ausgedrückt, dass der Begriff *Gegenbeispiele* nicht verwendet wurde, indem die Umkehrungen der Aussagen betrachtet wurde).

Darüber hinaus wurden die Teilnehmenden der Gruppe A dazu aufgefordert, selbst zu begründen, warum die Aussagen richtig/falsch sind. Diese Antworten wurden mit Hilfe eines Kodierungsschemas basierend auf Harel und Sowder (1998) kodiert. Die Teilnehmenden der anderen drei Gruppen wurden zudem zu ihrer Überzeugung der jeweiligen Begründungen befragt.

Ein korrektes Verständnis von Allgemeingültigkeit von Aussagen (im Sinne eines States) wurde als *konsistente Antwort* auf die Fragen zur Einschätzung der Richtigkeit der Aussage und der Existenz von Gegenbeispielen definiert. Außerdem wurde das *Wissen* über die Bedeutung von allgemeingültigen Aussagen (im Sinne eines Traits) am Ende des Fragebogens über ein geschlossenes Item erhoben.

Für die Auswertung der Daten wurden neben deskriptiven Analysen vor allem logistische Regressionsanalysen mit GLMMs durchgeführt.

Ergebnisse

In etwa einem Drittel der Beobachtungen zeigten die Studienteilnehmenden kein korrektes Verständnis von Allgemeingültigkeit von Aussagen. Die durchgeführten Regressionsanalysen ergaben, dass das *Wissen* der Studierenden über die Bedeutung mathematischer Allgemeingültigkeit am prädiktivsten für ein korrektes Verständnis von Allgemeingültigkeit konkreter mathematischer Aussagen ist. Darüber hinaus beeinflusst sowohl der Wahrheitswert als auch die Vertrautheit mit der Aussage das Verständnis von Allgemeingültigkeit der Studierenden. Während das Lesen von Argumenten einen signifikant positiven Einfluss darauf hatte, dass die Teilnehmenden überhaupt auf die beiden relevanten Fragen (Einschätzung des Wahrheitswertes der Aussage und Existenz von Gegenbeispielen) antworteten, zeigten die verschiedenen Arten von Argumenten keinen signifikant unterschiedlichen Einfluss auf das Verständnis der Allgemeingültigkeit der mathematischen Aussagen. Allerdings konnten Zusammenhänge zwischen dem Verständnis der Allgemeingültigkeit konkreter mathematischer Aussagen und der Überzeugung und Nutzung empirischer Argumente festgestellt werden: Studierende, die angaben, von den empirischen Argumenten überhaupt nicht überzeugt zu sein, hatten mit größerer Wahrscheinlichkeit ein korrektes Verständnis von Allgemeingültigkeit für die entsprechende Aussage als diejenigen, die angaben, teilweise (oder vollständig) von diesen Argumenten überzeugt zu sein. Zudem hatten Teilnehmende, die empirische Argumente zum Begründen der Richtigkeit der Aussagen nutzten, am häufigsten ein falsches Verständnis von Allgemeingültigkeit spezifischer Aussagen (ca. 38 %). Unter den Teilnehmenden, die deduktive Argumente nutzten, war der Prozentsatz derjenigen mit einem falschen Verständnis von Allgemeingültigkeit von Aussagen mit ca. 16 % am geringsten.

Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der vorliegenden Studie zeigen, dass einem nicht unerheblicher Anteil der Studienanfänger:innen ein grundlegendes Verständnis von Allgemeingültigkeit fehlt und diese Thematik entsprechend hinsichtlich verschiedener Arten von Aussagen (wahre/falsche, bekannte/unbekannte) in

Lehrveranstaltungen aufgegriffen werden sollte. Insbesondere liefern sie Evidenz für die in der Literatur bisher nur vermuteten Zusammenhänge zwischen der Konstruktion von und Überzeugung durch empirische Argumente und einem fehlenden Verständnis von Allgemeingültigkeit. Dies verdeutlicht, dass es bedeutsam ist, den Nutzen, aber insbesondere auch die Grenzen empirischer Argumente und warum Beweise notwendig sind, um die Allgemeingültigkeit mathematischer Aussagen zu begründen, zu thematisieren. Die in dieser Studie eingeführte Konzeptionalisierung bietet die Möglichkeit, das Verständnis von Allgemeingültigkeit von Aussagen systematisch sowohl übergreifend als auch bzgl. konkreter Aussagen (im Sinne eines *States*) zu erfassen, dies auf andere Inhaltsbereiche auszuweiten und Zusammenhänge zu Voraussetzungen für den Umgang mit Beweisen, zu weiteren beweisbezogenen Aktivitäten und Prozessen, die hierbei zu beobachten sind, sowie Leistungen, die daraus resultieren, zu untersuchen.

Literatur

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In A. Cockburn & E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, S. 57–64). PME.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359–387.

Conner, K. A. (2022). A multi-faceted framework for identifying students' understanding of the generality requirement of proof. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 17*(4), em0702. https://doi.org/10.29333/iejme/12270

Damrau, M. (im Druck). Understanding the generality of universal statements. An experimental study at the transition from school to university. Springer.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9–24.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20–23.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (Vol. 7, S. 234–283). American Mathematical Society.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396–428.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379–405.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289–321.