

Johanna ZÖLLNER, Karlsruhe

Prozedurale und konzeptuelle Wissensaspekte der unit iteration im Größenbereich Länge

Die unit iteration nimmt bei der Entwicklung von Längenkzepten eine zentrale Rolle ein, da sie die Grundlage für eine Quantifizierung von Längen darstellt. In der unit iteration sind zwei Kernideen des Messens (Peter-Koop & Nührenböcker 2011, 92) vereint, das Vervielfachen von bzw. Zerlegen in Einheiten und Zählen der Anzahl an Einheiten und Untereinheiten. Durch die Unterteilung von Längen in Einheiten und die Bestimmung oder den Vergleich deren Anzahl ermöglicht die unit iteration indirekte Vergleiche und bildet die Grundlage für Messprozesse. Smith III et al. (2013, S. 391) erkennen in den schwachen Leistungen von Schüler*innen bezüglich des Längenkzeptes die fehlende Entwicklung von konzeptuellem Verständnis bezüglich der unit iteration. Als problematisch wird die Fokussierung auf Prozeduren im Lernprozess ohne Förderung der zugrunde liegenden Konzepte benannt (vgl. auch Ruwisch 2020).

Eine intensive Auseinandersetzung mit beiden Wissensaspekten der unit iteration, dem prozeduralen und dem konzeptuellen, fehlt bislang weitgehend, bietet aber das Potenzial, in der Praxis dazu beizutragen, dass die Schüler*innen sowohl prozedurales als auch konzeptuelles Wissen entwickeln können. Dieser Artikel bietet eine umfassende Analyse der prozeduralen und der konzeptuellen Wissensaspekte der unit iteration. Dabei bezeichnet prozedurales Wissen Handlungswissen und Fertigkeiten, während konzeptuelles Wissen ein abstraktes, beziehungsreiches und generalisierbares Wissen bezeichnet (Hiebert & Lefevre 1986, Smith III et al. 2013).

Für die Analyse sollte zwischen zwei Komponenten der unit iteration unterscheiden werden:

1. Unterteilung der Ursprungslänge in Einheiten
2. Bestimmung bzw. Vergleich der Anzahl der entstandenen Einheiten

Im Folgenden werden die jeweiligen Prozeduren und die zugrundeliegenden Konzepte beider Komponenten analysiert.

1. Unterteilung der Ursprungslänge in Einheiten

Das zugrundeliegende Konzept entspricht der Generierung von Einheiten. Dies geht mit dem Verständnis dafür einher, dass Längen geteilt bzw. zusammengefügt werden können und dass die Teillängen die gleiche Länge besitzen müssen, so dass sie im Messprozess bzw. bei einem indirekten Vergleich als Einheiten gezählt und die Anzahl verglichen werden kann.

Für die Prozedur der Unterteilung der Länge in Einheiten gibt es zwei Möglichkeiten: die Unterteilung kann mit einem oder mit mehreren Einheitsrepräsentanten (ER) durchgeführt werden. Werden mehrere ER verwendet, so werden diese so aneinandergereiht, dass die Ursprungslänge damit vollständig ausgelegt und

somit anhand der Länge der Repräsentanten in Einheiten geteilt wird. Wird lediglich ein Mittler als ER verwendet, wird dieser wiederholt auf der Ursprungslänge abgetragen, wodurch sie ebenfalls in Einheiten geteilt wird. Damit das gelingt, muss die jeweils abgetragene Einheit markiert werden, so dass die folgende direkt daran anschließen kann. Damit die Ursprungslänge tatsächlich in Einheiten geteilt wird, also in gleich lange Teillängen, müssen die ER unabhängig von ihrer Anzahl so angelegt werden, dass keine Lücken, Überlappungen oder „Umwege“ entstehen. Neben dem prozeduralen Wissen über diese Vorgehensweise muss auch die entsprechende motorische Fertigkeit vorhanden sein (vgl. Abb. 2).

2. Bestimmung bzw. Vergleich der Anzahl der entstandenen Einheiten

Einige Autor*innen integrieren die Bestimmung der Anzahl der entstandenen Einheiten nicht in die Beschreibung der unit iteration. Die Generierung von Einheiten ist aber nur dann sinnvoll, wenn die Anzahl der Einheiten bestimmt wird, um über die Quantifizierung der Länge eine Maßzahl zu erhalten. Die Anzahl der entstandenen Einheiten kann dann mit der Anzahl der gleichen Einheiten einer anderen Länge verglichen werden, um so zum Ergebnis eines indirekten Vergleichs zu kommen. Dabei müssen die entstandenen Einheiten nicht zwingend gezählt werden, es könnte z. B. auch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung vorgenommen werden.

Das zugrundeliegende Konzept dieser zweiten Komponente entspricht dem Verständnis, dass es durch die Einteilung der Längen in Einheiten möglich ist, deren Anzahl als Maßzahl zu bestimmen und zu vergleichen. Die Umsetzung erfordert Prozeduren wie Anzahlbestimmung und Anzahlvergleich (Zahlwortreihe, Zählprinzipien, Ordnungsrelation bei Zahlen; vgl. Abb. 2). Wenn ein einzelner ER genutzt wird, müssen die Prozesse des Einteilens und Abzählens der Einheiten zusammenfallen. Das ist ein Grund dafür, dass die unit iteration mit nur einem Repräsentanten zumeist erst von älteren Kindern erfolgreich durchgeführt wird (vgl. Becker 2009).

Ergebnisse einer empirischen Studie

In einer Studie zu kindlichen Längenkonzepten mit 40 Kindern im Alter von vier bis sechs Jahren (Zöllner 2020), wurde zur Operationalisierung der unit iteration ein indirekter Vergleich der Länge zweier Linien gefordert (Anordnung vgl. Abb. 1). Den Kindern standen bei einer Aufgabe ausreichend Streichhölzer als Einheitsrepräsentanten zur Verfügung, bei einer zweiten, ähnlichen Aufgabe stand lediglich ein Streichholz zur Verfügung.

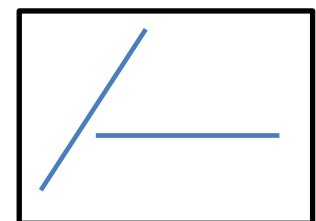


Abb. 1: ungefähre Position der Linien

Es konnte gezeigt werden, dass viele Kinder in diesem Alter ER aneinanderlegen, um einen indirekten Vergleich durchzuführen, wenn ihnen keine längeren Mittler zur Verfügung stehen. Dennoch gelingt nicht all diesen Kindern der indirekte Vergleich. Im Folgenden werden die nicht erfolgreichen Vorgehensweisen beschrieben, um die Komplexität der unit iteration sowohl auf prozeduraler als auch auf konzeptueller Ebene zu veranschaulichen.

Einheiten lediglich auf einem Objekt: Einige Kinder legen die ER an eines der beiden Objekte an. Sie gehen dabei teilweise so vor, dass keine Lücken, Überlappungen oder „Umwege“ entstehen. Allerdings gelingt ihnen der vollständige indirekte Vergleich nicht, da sie nach dem Auslegen keine Strategie für den weiteren Vergleich kennen bzw. anwenden. Weder legen sie das zweite Objekt aus, noch zählen sie die entstandenen Einheiten.

Kein Anzahlvergleich: Es gibt auch Kinder, die beide Objekte mit den ER auslegen, dann jedoch ebenfalls keinen Anzahlvergleich vornehmen. Auch diese Vorgehensweise kann sowohl bei Kindern beobachtet werden, die die ER lückenlos und überlappungsfrei aneinanderreihen, als auch bei solchen, die dies nicht tun. Allein von der Prozedur – korrektes Anlegen der ER – kann also nicht auf ein konzeptuelles Verständnis für das Einteilen der Länge in Einheiten und dessen Zweck geschlossen werden.

Anfangspunkt nicht beachtet: Einigen Kindern gelingt die Einteilung in Einheiten nicht, obwohl sie die ER lückenlos und überlappungsfrei aneinanderreihen, weil sie den Anfangspunkt des ersten ER nicht passend an den Anfangspunkt des jeweiligen Objekts legen. Um tatsächlich Einheiten zu generieren, müssen also ebenfalls die Endpunkte beachtet werden (vgl. Abb. 2).

Lücken und Überlappungen: Dass einige Kinder die ER nicht lückenlos anlegen, wurde bereits erwähnt. Diese Vorgehensweise kann mehrere Gründe haben: Eventuell haben die Kinder tatsächlich kein Verständnis für die Notwendigkeit, Einheiten zu generieren. Ebenso könnten motorische Schwierigkeiten die Kinder daran hindern, die ER genau aneinander zu reihen. Es könnte aber auch sein, dass erkannt wird, dass ein gewisses Maß an Ungenauigkeit akzeptabel ist, um zum richtigen Ergebnis zu gelangen. In diesem Fall kann nicht von einem fehlenden konzeptuellen Verständnis für die Einteilung der Länge in Einheiten ausgegangen werden.

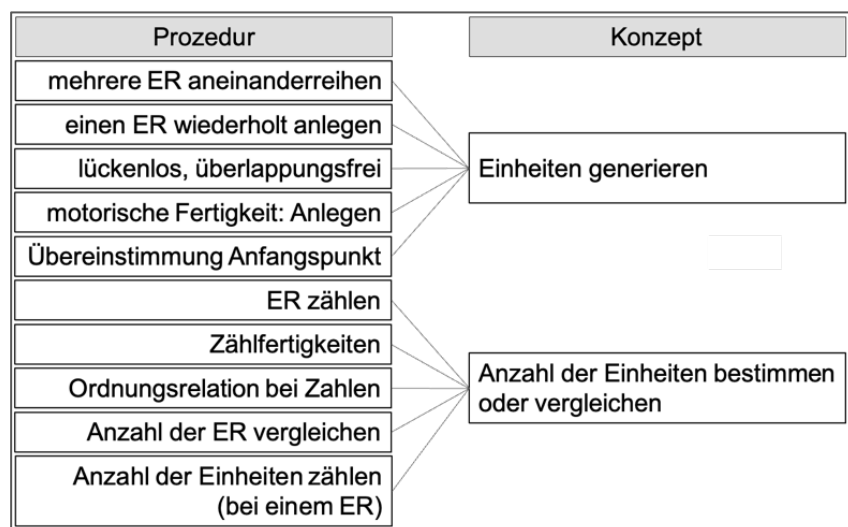


Abb. 2: Prozeduren und zugrundeliegende Konzepte der unit iteration

Keine Einheiten mit einem ER: Kein Kind im Alter von 4 bis 6 Jahren nimmt eine Einteilung in Einheiten vor, wenn nur ein einzelner ER zur Verfügung steht, auch nicht die Kinder, denen der indirekte Vergleich mit mehreren ER gelingt. Einige der Kinder nehmen in diesem Fall eine grobe Einteilung vor oder zählen „imaginäre Einheiten“, d. h. sie tippen mit dem Finger mehrmals auf die zu vergleichenden Objekte und zählen dabei. Diese Kinder nehmen also den Anzahlbestimmungsprozess vor, ohne jedoch *Einheiten* generiert zu haben. Es wäre also möglich, dass sie ein Konzept für die unit iteration haben, allerdings noch kein prozedurales Wissen um Einheiten auf den Längen generieren zu können.

Fazit

Die differenzierte Betrachtung der prozeduralen und konzeptionellen Wissensaspekte der unit iteration hat die Komplexität dieser Komponente von Längenkonzepthen verdeutlicht (vgl. Abb. 2), zugleich schafft sie eine Grundlage für didaktische Forschung und Praxis. Eine angemessene Diagnose und eine darauf aufbauende Förderung sollten die aufgezeigte Komplexität berücksichtigen.

Die Ausführungen zur empirischen Untersuchung zeigen, dass einige konzeptuelle und prozedurale Aspekte bereits bei Kindern vor der Schule beobachtbar sind, dass aber weder von einer gleichzeitigen, noch von einer stufenartigen Entwicklung dieser Aspekte ausgegangen werden kann. Es besteht nicht zwingend ein Zusammenhang zwischen dem Zeigen einer Prozedur und dem Vorhandensein des dazugehörigen Konzepts.

Ein differenziertes Bild der prozeduralen und konzeptuellen Wissensaspekte der unit iteration ermöglicht eine Unterrichts- und Aufgabengestaltung, in deren Rahmen noch fehlende Aspekte auf der Grundlage bereits vorhandener Fähigkeiten gezielt gefördert werden können, was den Kindern den Aufbau eines umfassenden Konzepts der unit iteration ermöglicht.

Literatur

- Becker, N. (2009). Entwicklung des Größenverständnisses von Vor- und Grundschulkindern: Konzeption und Erprobung eines diagnostischen Interviews. Offenburg: Mildenerger.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, New Jersey Lawrence Erlbaum Associates, 1-27.
- Peter-Koop, A. & Nührenbörger, M. (2011). Größen und Messen. In G. Walther, M. v. d. Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor GmbH.
- Ruwisch, S. (2020). Konzeptuelles und prozedurales Wissen beim Längenverständnis - eine Schulbuchanalyse. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020*. Münster: WTM-Verlag, 1273–1276.
- Smith III, J. P., Males, L. M., Dietiker, L. C., Lee, K., & Mosier, A. (2013). Curricular Treatments of Length Measurement in the United States: Do They Address Known Learning Challenges? *Cognition and Instruction*, 31(4), 388–433.
- Zöllner, J. (2020). *Längenkonzepthe von Kindern im Elementarbereich*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.