

Silke LADEL, Saarbrücken, Ulrich KORTENKAMP, Halle

„Ist das dann noch ein Zehner oder ist das dann ein Einer?“ – Zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten

Ein flexibles Verständnis von Stellenwerten stellt die Grundlage für das Verständnis vieler weiterer mathematischer Inhalte, wie z.B. der schriftlichen Addition und Subtraktion oder der halbschriftlichen Division dar. In unserem Beitrag diskutieren wir die Ergebnisse einer qualitativen und quantitativen Studie mit Schülerinnen und Schülern der zweiten und dritten Klasse.

1. Kennzeichen unseres Zahlensystems

Große Anzahlen sind unstrukturiert nur schwer zu ermitteln. Die unserem Zahlensystem zugrunde liegende Strukturierung über das *fortgesetzte Bündeln* stellt eine große Hilfe dar. Im g -adischen System werden die Elemente einer Menge in Bündel der Größe g gebündelt, diese Bündel wieder in größere Bündel von je g Bündeln, diese dann wiederum, ... Stets werden gleich große Bündel so lange wiederum gebündelt, bis nicht mehr ausreichend Elemente (oder Bündel) für ein neues Bündel zur Verfügung stehen. So werden üblicherweise 10 einzelne Objekte in einen „Zehner“, 10 Zehner in einen „Hunderter“, usf. gebündelt. Aus der Bündelungsgröße geht der Wert eines Bündels eindeutig hervor, so dass bei der Anzahlangabe die Reihenfolge der Bündel und somit die Stelle, an der ein Bündel steht, keine Rolle spielt. Gibt man nur noch die Anzahl an, so ergibt sich der Wert dann nicht mehr durch die Angabe der Bündelungseinheit, sondern durch die Position, an der eine Ziffer steht (Prinzip des Stellenwerts). Die Stellen einer Zahl sind aufsteigend von rechts nach links den Zehnerpotenzen zugeordnet. Den Zahlenwert einer Ziffer erhält man, indem man die Ziffern mit dem Wert ihrer Stelle multipliziert (*multiplikatives Prinzip*) und die einzelnen Werte anschließend addiert (*additives Prinzip*) (vgl. Ross 1989). Die Zahl 324 ergibt sich also aus $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$. Das Bündeln stellt dabei eine notwendige Voraussetzung für die Beachtung von Stellenwerten dar, ist jedoch von diesem separiert zu betrachten. Betrachtet man unterschiedliche Zahldarstellungen, wie Zahlen unter Angabe von Bündelungseinheiten, Zahlwörter, Punkte oder Zahlen in der Stellenwerttafel und letztlich die Zahlen, so ist festzuhalten, dass die Stelle ausschließlich bei den Zahlen von Bedeutung ist, da alle anderen Darstellungen den Wert über andere Hilfsmittel angeben (z.B. mit E, Z, H als Angabe entweder in der Stellentafel oder als Suffix zur Zahl). Ausschließlich bei der – dann eindeutigen! – Zahldarstellung ist es auch notwendig, die Stellen einziffrig zu besetzen.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 699–702).
Münster: WTM-Verlag

Eine Angabe wie 35E 13Z 2H verdeutlicht die in anderen Darstellungen vorhandene Flexibilität. Je nach Zahl kann es viele Möglichkeiten geben diese darzustellen, z.B. 14E 7Z = 7Z 14E = 8Z 4E – in der Tat sind nur die Zahlen 0 bis 9 in jeder Darstellung eindeutig! Die Relevanz solcher flexiblen Darstellungen wird auch dadurch unterstrichen, dass solche Darstellungen im Rahmen einer Schulbuchanalyse zu jeder Zahldarstellungsart in Schulbüchern gefunden wurden.

2. Arbeitsmittel

Da das Prinzip des Stellenwerts zwar auf dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung aufbaut, dennoch aber getrennt von ihm, als eigenständiges Prinzip zu betrachten ist, stellt sich die Frage, wie dieser Übergang für die Kinder verständnisvoll erarbeitet werden kann. Als geeignetes Arbeitsmittel zur Erarbeitung der fortgesetzten Bündelung bietet sich Mehrsystemmaterial an; für die Stellenwerte die Stellenwerttafel. Beim Übergang zwischen diesen Darstellungen werden häufig die Bündelungsmaterialien in die Stellenwerttafel gelegt. Das kann zum Einen zu mathematischen Fehlvorstellungen der Kinder führen und ist zum andern nach Anwendung des multiplikativen sowie additiven Prinzips (2 Platten in der H-Spalte, 3 Stangen in der Z-Spalte und 6 Würfel in der E-Spalte ergeben $200 \cdot 10^2 + 30 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 = 200306$) nicht korrekt. Da die Spalten in der Stellenwerttafel die Bündelgröße ersetzen, sollten sich diese schlussendlich nicht mehr im Volumen des Materials widerspiegeln. Eine Möglichkeit ist es über verschiedenfarbige Zählmarken, je nach Bündelungseinheit, in der Stellenwerttafel zu gleichartigen Zählmarken überzugehen.¹ Bei der Arbeit mit Material können Handlungen ganz unterschiedliche Bedeutung haben (Ladel & Kortenkamp 2013). So kann das Verschieben eines Plättchens in der Stellenwerttafel von einer Spalte in eine andere eine *Wertänderung* bedeuten, wenn das Plättchens erhalten bleibt und sich der Wert des Bündels ändert (z.B. wird aus einem Zehner ein Einer). Mit geeignetem (virtuellen) Material kann aber auch eine werterhaltende Handlung unterstützt werden, bei der ein Zehner-Plättchen automatisch in zehn Einer-Plättchen umgewandelt wird. In Interviews mit Schülerinnen und Schülern der zweiten Klasse fiel auf, dass diese bis auf eine Ausnahme von einer Wertänderung ausgingen, nur eine Schülerin fragte zurück, ob es sich dann noch um einen Zehner handle oder ob es nun ein Einer sei.

¹ Die Unterscheidung zwischen Objekt und Zeichen ist u.E. für Lehrkräfte und Schülerinnen und Schüler schwer zu erfassen. Stehen die beiden Platten in der H-Spalte als zwei Zeichen für jeweils einen Hunderter, so ist die Darstellung korrekt. Stehen sie für die Zahl zweihundert (also in der Objektsicht), so entsteht die Fehlinterpretation. Die von uns beobachteten „Mehrsystemfehler“ unterstreichen diese Schwierigkeit.

3. Untersuchung

Neben der Analyse aktueller Schulbücher wurde eine quantitative Untersuchung mit insgesamt 255 Drittklässlern aus Halle, Luxembourg und Saarbrücken, sowie eine qualitative Untersuchung mit 52 Kindern Ende der zweiten Klasse durchgeführt. In der qualitativen Untersuchung wurden den Kindern Vergleichsaufgaben zu Anzahlen, die über Bündelungen angegeben wurden, gestellt. Aufgrund der gegebenen Begründungen konnten vier Hauptfehlertypen ausgemacht werden: (1) es wird nicht gebündelt, wobei hier häufig die Zehnerziffer nicht beachtet wurde, z.B. 5Z 3E sind größer als 4Z 15E. (2) Das additive Prinzip wird nicht beachtet, z.B. 5Z 3E sind größer als 4Z 15 E, weil 5Z größer sind als 3E. (3) Bündelungseinheiten werden nicht beachtet, z.B. bei der Aufgabe 4Z 9E oder 1Z 29E als Antwort „29 ist am größten.“ Die Kinder haben hier das multiplikative Prinzip nicht angewandt, häufig in Kombination mit (2), der Nicht-Beachtung des additiven Prinzips. (4) Es wird nur die größte Bündelungseinheit betrachtet, z.B. 5Z sind größer als 4Z. Die Begründungen (1) und (4) sind dann korrekt, wenn alle Stellen einziffrig besetzt sind. D.h. hier besteht durchaus die Möglichkeit, dass die Kinder Strategien, die für „Zahlen“ gelten, auf diese flexiblen Zahldarstellungen fälschlicher Weise übertragen haben. In der quantitativen Untersuchung bearbeiteten die Kinder einen dreiteiligen Arbeitsbogen. Für jeden Teil standen 10 Minuten zur Verfügung. Im ersten Teil sollten die Kinder Aufgaben der Art „Was ist mehr? Kreise ein! 34Z 14E oder 3H 7Z 3E?“, sowie Aufgaben, bei denen sie aufgefordert wurden die Zahl aufzuschreiben, z.B. 7E 31Z, bearbeiten. Die Aufgaben unterschieden sich dabei in der Anzahl der zu tätigen Bündelungen (0-2 Mal bündeln) und darin, ob nach dem Bündeln noch addiert werden musste (wie z.B. bei $5Z\ 23E = (5+2)Z\ 3E$) oder nicht. Des Weiteren standen die Zahlen unter Angabe der Bündelungseinheiten nicht immer der Größe nach, sondern mussten teilweise erst noch in die korrekte Stellung gebracht werden. Nicht-besetzte Stellen bzw. Bündelungseinheiten stellten eine weitere Schwierigkeit dar. Im zweiten Teil sollten sie Zahlen aus Darstellungen in der Stellenwerttafel ablesen sowie selbst Zahlen in Stellenwerttafeln eintragen. Dabei kamen flexible Stellenwertdarstellungen zum Einsatz und es wurde explizit danach gefragt, ob auch andere Darstellungen möglich seien. Der Hälfte der Kinder stand für die Bearbeitung dieser Aufgaben eine Stellenwert-App als Hilfsmittel (Ladel & Kortenkamp 2013; 2014) zur Verfügung, allerdings ohne weitere Anleitung oder Instruktionen. Im dritten Teil wurden die gleichen Aufgaben wie im ersten Teil mit anderen Zahlen gestellt.

4. Auswertung

Für die Auswertung der quantitativen Untersuchung wurden die Darstellungen von Zahlen in der Stellenwerttafel in Kategorien eingeteilt. Hierbei traten die folgenden Typen auf: flexibel (56), flexibel mit Fehlern (31), Mehrsystemfehler (19), andere Symbole (24), Vertauschung (69), eine Darstellung (16), nicht bearbeitet (5), andere Anordnung (5), wertverändernd (4), wirre Fehler (26). Die Kategorien und die Bearbeitung der anderen Aufgaben wurden mittels *statistical implicative analysis* (Gras 2008) analysiert. Die Untersuchung ergab, neben der inneren Konsistenz der Items in Teil 1 und 3, dass es wenig überraschend ist, wenn Schülerinnen und Schüler in den Kategorien „Flexibel“ und „Flexibel mit Fehlern“ die Items in Teil 1 und 3 korrekt lösen, sowie Schülerinnen und Schüler aus der Kategorie „Vertauschung“ (hier wurden 3 1 4 und Vertauschungen dieser Ziffern in die Stellenwerttafel eingetragen) diese falsch beantworten.

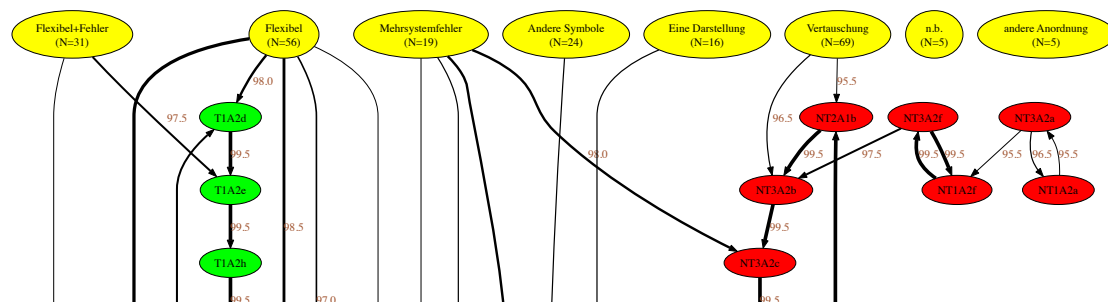


Abbildung 1: Auszug aus der statistischen Analyse

Die Kategorie „Mehrsystemfehler“ beinhaltet Schülerinnen und Schüler, die bei der Zahl 314 zehn einzelne Plättchen in die Zehnerstelle der Stellenwerttafel gemalt haben. Dieses Fehlverständnis führt laut statistischer Analyse ebenfalls zur erwartbar falschen Beantwortung der anderen Items, was die oben angesprochene Verständnisschwierigkeit zwischen Zeichen und Objekt bei der Verwendung von Mehrsystemmaterial in einer Stellenwerttafel illustriert.

Ausgewählte Literatur

- Gras, R. et al. (2008). *Statistical Implicative Analysis*. New York: Springer.
- Ross, S.H. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. In *The Arithmetic Teacher*, Vol. 36. No. 6 (S. 47-51).
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2013). Designing a technology based learning environment for place value using artifact-centric Activity Theory. *Research Forum Activity Theory*, In: Lindmeier, A. M. & Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of PME 37*, Vol. 1. Kiel, Germany: PME (S. 188-192).
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). Flexible use and understanding of place value via traditional and digital tools. (*submitted*)