

## **Die Verwendung von Beweisoperatoren im Abitur – ein Erklärungsansatz für operatorspezifische Aufgabenbearbeitungen durch Erstsemester**

Warum hängt die Bearbeitung von Beweisaufgaben vom verwendeten Operator ab? Im Projekt *O.B.d.A. Operatoren in Beweisaufgaben – eine didaktische Analyse* fanden sich bei Beachtung der verwendeten Operatoren (u.a. *beweisen, zeigen, begründen*) systematische Bearbeitungsunterschiede in Beweisproduktionen von Erstsemesterstudierenden (Kempen, Krieger & Tebaartz 2016). Ein möglicher Erklärungsansatz sind aus der Schule mitgebrachte Bedeutungszuschreibungen. Deshalb wurde exemplarisch für das Land Hessen die Verwendung von Beweisoperatoren im Abitur untersucht. Im Folgenden wird am Beispiel der Operatoren *zeigen* und *begründen* zuerst ein Einblick in die Ergebnisse des Projekts *O.B.d.A.* gegeben und anschließend der Frage nachgegangen, ob die operatorspezifischen Bearbeitungsunterschiede eventuell durch die Definitionen der Operatoren des hessischen Kultusministeriums (2015) und deren Verwendung in den Landesabiturprüfungen mit hervorgerufen werden.

### **Operatorspezifische Aufgabenbearbeitungen durch Erstsemester**

Viele Lernende und insbesondere auch StudienanfängerInnen haben Schwierigkeiten beim mathematischen Beweisen (z.B. Gueudet 2008, Selden 2012). Dreyfus (1999) sieht einen Grund dafür in der mangelnden Transparenz der Erwartungen, die mit verschiedenen Operatoren wie *zeigen* und *erklären* verschlüsselt werden. Im Projekt *O.B.d.A.* wurde erforscht, inwiefern sich bei Beachtung der verwendeten Operatoren systematische Unterschiede in Beweisbearbeitungen von Erstsemesterstudierenden ausmachen lassen (Kempen, Krieger & Tebaartz 2016). Dazu wurden Mathematik-Lehramtsstudierende zu Studienbeginn in einem Paper-Pencil-Test mit den systematisch permutierten Operatoren *beweisen, zeigen, begründen* und *erklären* zum Bearbeiten folgender zwei Aussagen aufgefordert: (A1) *Die Summe aus einer ungeraden natürlichen Zahl und ihrem Doppelten ist immer ungerade.* (A2) *Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist immer durch sechs teilbar.* An der Erhebung haben 214 Erstsemesterstudierende teilgenommen, die ihr Abitur in Hessen abgelegt und ohne Vorkurs das Studium begonnen haben. In Bezug auf die Operatoren *zeigen* und *begründen* fällt auf, dass beim Operator *zeigen* jeweils ein größerer Anteil der Probanden die vorgegebene Aussage ausschließlich rechnerisch überprüft hat, beim Operator *begründen* die Schlussweise zu einem größeren Anteil deduktiv ist. Dieser Unterschied ist bei der zweiten Aufgabe (A2) statistisch signifikant (siehe Abb. 1). Weiterhin bestehen bei den Bearbeitungen mit deduktiver

Schlussweise hoch signifikante operatorspezifische Unterschiede hinsichtlich der Variablennutzung und der Anzahl an verwendeten Wörtern. Von den Bearbeitungen der ersten Aufgabe (A1) mit deduktiver Schlussweise enthalten beim Operator *zeigen* 56% eine Buchstabenvariable, bei *begründen* 23% (siehe Abb. 2). Die arithmetischen Mittel der bei deduktiver Schlussweise in A1 verwendeten Wörter hingegen betragen beim Operator *zeigen* 17,33, bei *begründen* 32,75 (siehe Abb. 2). Damit wurden in Bearbeitungen mit deduktiver Schlussweise beim Operator *begründen* statistisch hoch signifikant mehr Wörter verwendet als bei *zeigen*. Die Ergebnisse deuten somit an, dass sich Bearbeitungen zu den Operatoren *zeigen* und *begründen* systematisch hinsichtlich der Schlussweise und der Darstellungsweise unterscheiden.

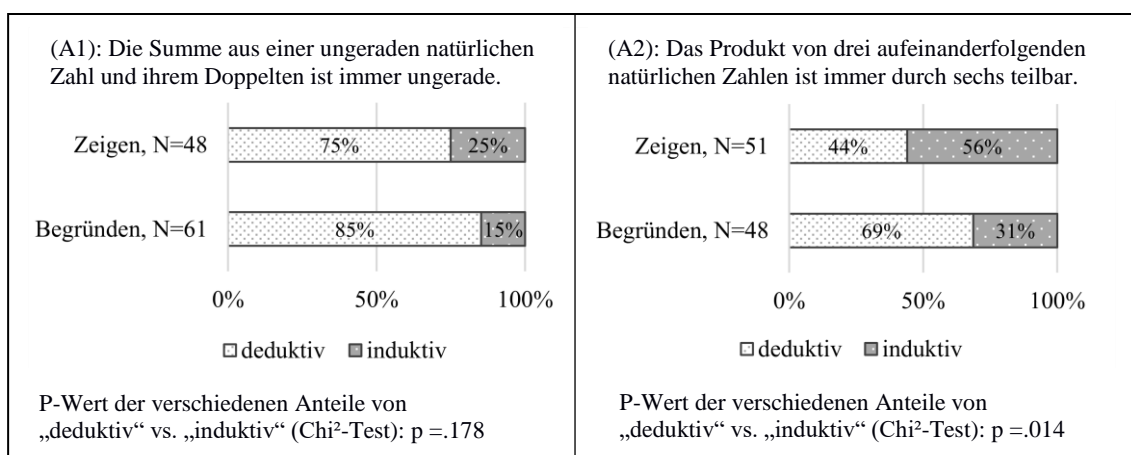


Abb. 1: Verwendete Schlussweise differenziert nach Operatoren

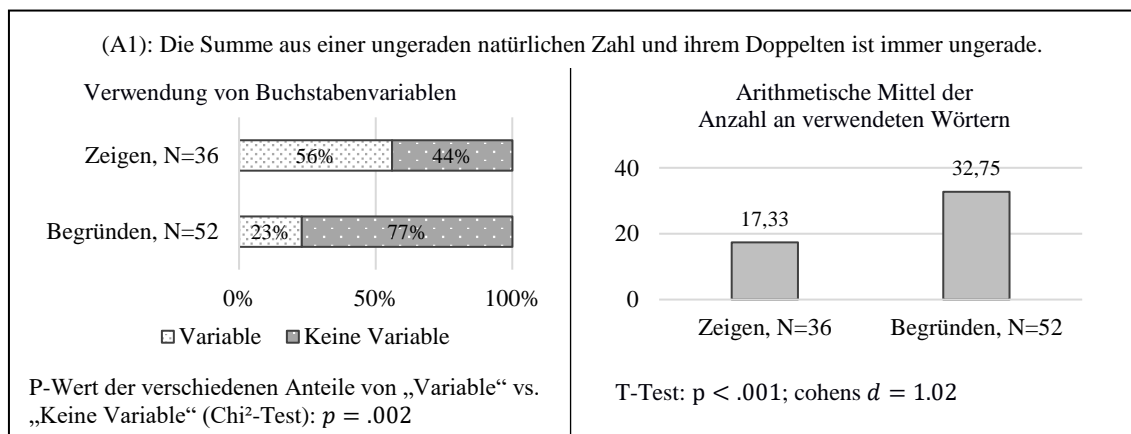


Abb. 2: Darstellungsweise der Bearbeitungen mit deduktiver Schlussweise

## Beweisoperatoren im hessischen Landesabitur

Die operatorspezifischen Unterschiede in Bearbeitungen von Erstsemesterstudierenden legen die Frage nahe, ob diese eventuell durch die Definitionen der Operatoren des Hessischen Kultusministeriums (2015) und deren Verwendung in den Landesabiturprüfungen mit hervorgerufen werden. Um sich

dieser Frage zu nähern, wurde untersucht, welche Erwartungen an Aufgabenbearbeitungen mit den verschiedenen Operatoren in den hessischen Landesabiturprüfungen formuliert werden und inwiefern Ähnlichkeiten zwischen dieser Verwendung der Operatoren im Landesabitur und den Aufgabenbearbeitungen der Erstsemesterstudierenden bestehen. Zudem wurde erhoben, wie häufig die Operatoren in den Landesabiturprüfungen vorkommen, um die Relevanz derselben für die Lernenden einzuschätzen.

Bei der Untersuchung der Verwendung der Operatoren im Landesabitur wurden die Definitionen der Operatoren durch das HKM (2015) und alle Landesabituraufgaben der Jahre 2007 bis 2014, bei denen nur ein wissenschaftlicher Taschenrechner verwendet werden durfte, berücksichtigt. Abb. 3 zeigt die Definitionen der Operatoren *zeigen* und *begründen* sowie Abituraufgaben, die der Analyse zufolge für diese Operatoren typisch sind.

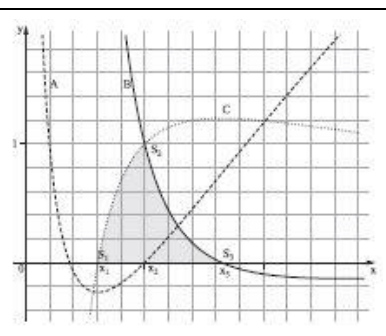
<p><b>Zeigen</b></p> <p><i>Definition:</i> einen Sachverhalt oder eine Behauptung unter Verwendung gültiger Schlussregeln oder Berechnungen auf bekannte, gültige Aussagen zurückführen (HKM 2015, 5)</p> <p><i>Abituraufgabe:</i> Zur Beschattung einer Terrasse wird ein dreieckförmiges Sonnensegel aufgespannt, dessen Befestigungen durch die Punkte <math>P_1(5 0 7)</math>, <math>P_2(5 6 1)</math>, <math>P_3(-1 6 7)</math> dargestellt werden. [...] Zeigen Sie, dass das Sonnensegel die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat. (WP Wissensportal GmbH 2017)</p>	
<p><b>Begründen</b></p> <p><i>Definition:</i> einen Sachverhalt oder eine Aussage argumentativ auf Gesetzmäßigkeiten oder kausale Zusammenhänge zurückführen (HKM 2015, 3)</p> <p><i>Abituraufgabe:</i> Gegeben ist die Funktion <math>f</math> mit <math>f = (\ln(x))^2 + \ln(x)</math>, <math>x \in \mathbb{R}^+</math>. [...] Geben Sie an, welcher der Graphen A, B bzw. C jeweils zu <math>f</math>, <math>f'</math> bzw. <math>f''</math> gehört. Begründen Sie dies ohne Rechnung mithilfe der Eigenschaften der drei Graphen. (WP Wissensportal GmbH 2017)</p>	

Abb. 3: Ausgewählte Beweisoperatoren – Definitionen, Beispielaufgaben des Landesabiturs Hessen

Beim Operator *zeigen* sind vorgegebene Aussagen im Wesentlichen mittels Berechnungen zu verifizieren. So sind im Aufgabenbeispiel in Abb. 3 nur die paarweisen Punktabstände zu berechnen. Bei Aussagen mit größerem Gültigkeitsbereich sind in den Berechnungen häufig Variablen zu verwenden. Mit dem Operator *zeigen* werden die Lernenden folglich meistens zum Rechnen, ggf. unter Variablennutzung aufgefordert. Inhaltlich-anschauliche Überlegungen sind hierbei i.d.R. kaum erforderlich.

Beim Operator *begründen* hingegen deutet der Begriff „argumentativ“ in der Definition des HKM (2015) an, dass eine logisch korrekte Argumentkette und zwar in primär narrativer Darstellungsweise erwartet wird. In der Beispielaufgabe sind die drei Graphen einer Funktion und ihren ersten beiden Ableitungen z.B. mithilfe von Kenntnissen über Extrema und Wendepunkte begründet zuzuordnen. Die Argumentkette soll keine Rechnungen enthalten.

Vergleicht man diese Verwendung der Operatoren *zeigen* und *begründen* mit den Aufgabenbearbeitungen der Erstsemesterstudierenden, so sind Ähnlichkeiten offensichtlich. Andererseits wurde keine Korrelation nachgewiesen und ein Kausalzusammenhang erscheint fraglich. Erstens kommen die Beweisoperatoren in den Landesabituraufgaben nur selten vor. Von den 849 in den Jahren 2007 bis 2014 verwendeten Operatoren waren 120 (12%) einer der Operatoren *beweisen*, *zeigen*, *begründen* und *erklären*. In der Hälfte der Fälle handelte es sich um den Operator *zeigen*, gefolgt von *begründen*. *Beweisen* wurde ausschließlich zweimal in Leistungskursaufgaben eingesetzt. Zweitens kommen Aussagen, die sich so wie die Aussagen im Projekt *O.B.d.A.* auf alle natürlichen Zahlen beziehen, im Landesabitur kaum vor. Auch das Themengebiet der elementaren Zahlentheorie ist im Unterricht in der Sekundarstufe II nur marginal relevant, sodass ein großer Unterschied zwischen den Abitur- und den Testaufgaben bestand.

## Fazit

Insgesamt betrachtet bestehen Ähnlichkeiten zwischen der Verwendung der Operatoren im Landesabitur und den Charakteristika der Aufgabenbearbeitungen der Erstsemesterstudierenden, von einem Kausalzusammenhang ist jedoch nicht auszugehen. Mit Blick auf die Arbeit mit Erstsemesterstudierenden lässt sich trotzdem bereits festhalten, dass von den Studierenden kaum Vorerfahrungen mit den Beweisoperatoren erwartet werden können. Um Unklarheiten und Missverständnisse vorzubeugen, sollten die mit den verschiedenen Operatoren verbundenen Erwartungen festgelegt und den Studierenden gut verständlich kommuniziert werden.

## Literatur

- Hessisches Kultusministerium (2015). *Operatoren in den Fächern Biologie, Chemie, Informatik, Mathematik und Physik*. Verfügbar unter <https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/hkm/la17-operatoren-fbiii.pdf> [25.11.2016].
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1), 85-109.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (3), 237-254.
- Kempen, L., Krieger, M. & Tebaartz, P.C. (2016). Über die Auswirkungen von Operatoren in Beweisaufgaben. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *BzMU 2016* (S. 521-524). Münster: WTM.
- Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 391-422). Heidelberg u.a.: Springer Science, Business Media.
- WP Wissensportal GmbH (Hrsg.) (2017). *Abiturvorbereitung Mathematik*. Verfügbar unter <http://www.abiturloesungen.de/abitur/Hessen> [25.02.2017].