

Christian VAN RANDENBORGH, Würzburg

Zeichengeräte erforschen – Modellieren erleben

Einleitung

Die Entwicklung des Menschen, seiner Kultur und Denkweisen hängt aufs Engste mit der Erfindung von Werkzeugen zusammen.

„Man’s use of mind is dependent upon his ability to develop and use »tools« or »instruments« or »technologies« that make it possible for him to express and amplify his powers.“ [J.S. BRUNER, 1971, S. 24]

In der Mathematik und für den Mathematikunterricht wurden immer wieder Werkzeuge erfunden und verwendet. Im Folgenden konzentrieren wir uns auf Zeichengeräte und gehen der Frage nach, welche Bedeutung historische Geräte für den heutigen Mathematikunterricht haben können. Wie kann ein Zeichengerät eingesetzt werden und was und wie können Schüler dabei lernen?

J.S. BRUNER formuliert mit Blick auf den Mathematikunterricht: „We would suggest that learning mathematics reflects a good deal about intellectual development. It begins with instrumental activity, a kind of definition of things by doing them.“ ([2], S. 68) Ein Beispiel für eine solche »instrumentale Aktivität« ist das Arbeiten mit einem Zeichengerät. Eine neue, weiterführende Perspektive ergibt sich, wenn ein Zeichengerät als *Ideenkonglomerat* unterschiedlicher Ideen, wie z.B. der mechanischen oder der mathematischen Idee, verstanden wird (Genauerer dazu: [3]).

In einer empirischen Studie wurde der Einsatz des Parabelzirkels von FRANS VAN SCHOOTEN (1615 – 1660) und des Pantographen von CHRISTOPH SCHEINER (1573 – 1650) im Mathematikunterricht untersucht. Den Schülern standen zur Erforschung einerseits reale Nachbauten und andererseits digitale Simulationen (mit GeoGebra) zur Verfügung. Die Ergebnisse wurden im Rahmen der Instrumentellen Genese und der Semiotischen Vermittlung analysiert und interpretiert. Aus den hierbei festgestellten Prozessen und Ergebnissen wurde das Modell der *Instrumentellen Wissensaneignung* entwickelt (zum Begriff siehe: [4]).

Der Einsatz von Zeichengeräten im Unterricht

Beim Einsatz von Zeichengeräten, wie dem Parabelzirkel oder dem Pantographen, stehen die mechanische und die mathematische Idee im Vordergrund. Durch das Aufdecken dieser Ideen des Ideenkonglomerats und ihres Zusammenhangs gelangen Schüler zu der im Zeichengerät

verborgenen Mathematik. In unserer Studie konnten bestimmte Beschäftigungsphasen der Schüler festgestellt werden. Bei der Entwicklung vom Artefakt hin zum Instrument der Wissensvermittlung traten jeweils spezifische Zeichen auf, die sich verschiedenen Zeichenebenen oder Zeichenkategorien zuordnen ließen. So konnte zwischen Artefakt-, Schlüssel-, Instrument- und Mathematikzeichen unterschieden werden (vgl. auch [4], [1]). In diesem Prozess der *Instrumentellen Wissensaneignung* gelangten die Schüler durch Trägerzeichen von der einen Zeichenebene zur nächsten. Dieser Weg – beginnend mit den Artefaktzeichen, vermittelt über die Trägerzeichen und entlang der unterschiedlichen Zeichenkategorien hin zu den Mathematikzeichen – bildet die stattfindende Verständniseentwicklung ab. Dabei gibt es auch immer wieder Rückbezüge zu den vorherigen Zeichenebenen. So entsteht aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung. Derartige Prozesse konnten bei unterschiedlichen Zeichengeräten und insbesondere auch bei realen und digitalen Zeichengeräten festgestellt werden (zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden siehe [3]). Dabei spielte die Untersuchung von Grenzen und Zwängen oder von Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle. So konnten sowohl beim Parabelzirkel als auch beim Pantographen sowie sowohl bei digitalen als auch bei realen Modellen im Wesentlichen drei Instrumentalisierungstypen festgestellt werden. Beim ersten Typ spielte das Betrachten, Aufdecken und Erklären von Grenzen und Zwängen des Geräts die entscheidende, die Erforschung bestimmende, Rolle. Vertreter des zweiten Typs interessierten sich besonders für Möglichkeiten und Veränderungsmöglichkeiten des jeweiligen Geräts. Dieses war ihre Leitperspektive. Beim dritten Typ konnte keine Dominanz des einen oder anderen Blickwinkels festgestellt werden.

Die Konsequenzen für die zugrundegelegten Modelle der Instrumentellen Genese und der Semiotischen Vermittlung, die sich aus diesen Untersuchungsergebnissen ergeben, sollen im Folgenden kurz umrissen werden.

Konsequenzen für das Modell der Instrumentellen Genese

Bei dem in unserer Studie beobachteten und erforschten wechselseitigen Beeinflussungsprozess der Instrumentellen Genese ließ sich feststellen, dass die Instrumentation die erste Richtung der Instrumentellen Genese ist. Die inhärenten Zwänge, Grenzen und Möglichkeiten des Artefakts (Zeichengerät) bestimmten die Tätigkeit des Subjekts (Schülers). Auf der Seite des Subjekts wurde die Erforschung des Geräts von seinem Vorwissen, seinen Fähigkeiten und Fertigkeiten bestimmt. Dabei konnte je nach Instrumentalisierungstyp der Blickwinkel bzw. die Leitperspektive für

die Untersuchung des Geräts einerseits die Erforschung von Zwängen und Grenzen oder andererseits ein Veränderungsdenken sein.

In diesem Prozess der Instrumentellen Genese spielten insbesondere die Trägerzeichen eine wichtige und weiterführende Rolle. Die sich hier entwickelnden Erklärungsideen machten es möglich, dass aus dem Artefakt ein Instrument der Wissensvermittlung für die Schüler werden konnte. Die Bedeutung der Trägerzeichen hat auch Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung.

Konsequenzen für das Modell der Semiotischen Vermittlung

Bereits PEIRCE schrieb den Zeichen u.a. eine Vermittlungsfunktion zwischen Subjekt und Objekt zu. Für ihn sind Zeichen Mittel der Erkenntnis. Dieser Grundgedanke lässt sich mit Hilfe der Trägerzeichen noch genauer formulieren. Diese sind es, die zwischen Objekt und Interpretanten vermitteln. Sie führen die Verständniseentwicklung des Schülers voran (vgl. [4]). Diese zentrale Funktion soll nun anhand von zwei mathematik-didaktischen Bedeutungsaspekten verdeutlicht werden.

Bedeutungsaspekt 1: Repräsentationsmodi

Betrachten wir noch einmal die oben bereits erwähnte Auffassung von BRUNER, dass das Mathematiklernen mit einer »instrumentalen Aktivität« anfängt. Dort heißt es dann weiter: „Such operations become represented and summarized in the form of particular images.“ ([2], S. 68) Hier scheinen mir ganz deutlich die Trägerzeichen und insgesamt die Entwicklung von den Artefaktzeichen hin zu den Mathematikzeichen angesprochen zu sein. Geht man nun von den drei Repräsentationsmodi nach BRUNER aus und berücksichtigt, dass es letztlich darum geht, alle drei zu beherrschen, so sind die Übergänge zwischen den einzelnen Ebenen besonders wichtig. Der enaktiven Ebene lassen sich die Artefaktzeichen zuordnen. Die Schlüsselzeichen gehören dann zur ikonischen Ebene. Der symbolischen Ebene sind die Instrument- und Mathematikzeichen zuzurechnen. Der Übergang von der einen zur anderen Ebene wird durch die Trägerzeichen ermöglicht.

Bedeutungsaspekt 2: Modellieren

Legt man den Modellierungskreislauf von SCHUPP (1988) zu Grunde, kann man einerseits sagen, dass die Artefaktzeichen in den Bereich Situation (reale Welt) gehören. Man gelangt über die Schlüsselzeichen zu dem mathematischen Modell (mathematische Welt), zu dem die Instrumentzeichen gehören. Dabei stellen die Schlüsselzeichen den Übergang von realer Welt in die Mathematik dar. In den Bereich

„Konsequenzen“ des Schupp’schen Modellierungskreislaufs sind die Mathematikzeichen einzuordnen. Nun war bei der Untersuchung von Zeichengeräten im Mathematikunterricht deutlich erkennbar, dass es hier weniger einen Kreislauf als vielmehr einen Modellierungs*ablauf* gibt. Dabei finden zwischen den einzelnen Elementen (Situation-Modell, Modell-Konsequenzen etc.) immer schon Kreisläufe oder vielleicht besser Wechselwirkungen statt. Das „Mathematisieren“ ist geprägt durch das Aufdecken von Zwängen, Grenzen und Möglichkeiten. Dadurch gelangen die Schüler von der Situation zum mathematischen Modell. Auch hier kann dann bereits „Validieren“ stattfinden, indem Veränderungsmöglichkeiten realisiert werden. Interessant ist ferner der Übergang mathematisches Modell – Konsequenzen. Hier geht es zentral um die Untersuchung von inhärenten Zwängen des Geräts. Durch das Erklären der inhärenten Zwänge gelangen die Schüler in den Bereich Konsequenzen. Indem sie die Zwänge dann zum Begründen des mathematischen Modells nutzen, gelangen sie von dem Bereich „Konsequenzen“ wieder in den Bereich „mathematisches Modell“. In den Bereich der realen Welt gelangen die Schüler dann wieder durch eine Vernetzung des neu gefundenen Wissens mit dem vorhandenen (Vor-)Wissen. Ist dieser Modellierungsablauf der Instrumentellen Wissensaneignung soweit fortgeschritten, ist das historische Zeichengerät (Artefakt) nun zu einem Instrument der Wissensvermittlung geworden. Wird der Prozess von den Schülern reflektiert, stellen sie eine (erneute) Verbindung zur Ausgangssituation her. Werden außerdem noch Veränderungen am Zeichengerät vorgenommen, beginnt ein neuer Modellierungsablauf.

Literatur

- [1]Bartolini Bussi, M.G. / Mariotti, M.A. (2008): Semiotic meditation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective; in: L. Englisch (Hrsg.): Handbook of international research in mathematics education, New York ²2008, S. 746-783
- [2]Bruner, J.S. (1971): Toward a Theory of Instruction, Cambridge ⁵1971 (1. Auflage 1966)
- [3]van Randenborgh, Chr. (2012): Parabelzirkel real und digital. Wissensaneignung durch Modelle und Simulationen; in: Mathematik lehren 174, S. 11-14
- [4]van Randenborgh, Chr. (2012): Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht; in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2012, Bd. 2, S. 893-896
- [5]Schupp, H. (1988): Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe 1 zwischen Tradition und neuen Impulsen; in: Der Mathematikunterricht 34 (6) 1988, S. 5–16