SCHUMANN, Heinz
Weingarten

Ein raumgeometrisches Projekt: 6-eckige und 6-flächige Polyeder

Die Nutzung geeigneter Dynamischer Raumgeometrie-Systeme, welche für die räumliche Elementargeometrie geschaffen wurden, bietet die Möglichkeit, Themen, deren Behandlung bisher erschwert war, im virtuellen Raum zu erschließen. Voraussetzung für eine solche Behandlung ist eine ausreichende raumgeometrische Konstruktionskompetenz bei der Nutzung o. g. Systeme. – Der nachstehende Beitrag ist stoffdidaktischer Natur und versteht sich als ein Beitrag zum projektorientierten Raumgeometrie-Unterricht der oberen Sekundarstufe und der Mathematiklehrerausbildung. – Themen für die Behandlung von Polyedern im virtuellen Raum sind u. a.: Raumgeometrische Konstruktion von Polyedern nach vorgegebenen Eigenschaften, z. B. als Analoga zu Polygonen der ebenen Geometrie. Polyeder aus Polyedern erzeugen, z. B. durch Abschneiden von Körperteilen. Untersuchung von Polyedern, z. B. mittels Zählen, Messen und Berechnen. Klassifikation von Polyedern nach bestimmten Eigenschaften, z. B. nach Symmetrie, Anzahl der Ecken bzw. Flächen. Satzfindung und Beweisfindung an Polyedern. Dieser Beitrag hat vor allem die Klassifikation konvexer Polyeder nach Isomorphie zum Inhalt; in ihm gehen fast alle vorstehenden Themen mit ein.

Klassen isomorpher konvexer Polyeder für die Eckenanzahl 6

Für eine bestimmte Eckenanzahl stellt sich das Problem: Wie viele verschiedene Klassen aus jeweils einander isomorphen Polyeder dieser Eckenzahl gibt es? – Die Klassen isomorpher Polyeder sind die verschiedenen Polyeder-Typen derselben Eckenanzahl. Als Repräsentanten der Klassen wählt man z. B. Polyeder optimaler Symmetrie. Existenz und Vollständigkeit der Klassen sind nachzuweisen. Für die Eckenanzahlen 4 und 5 erkennt man mit einfachen raumgeometrischen Überlegungen, dass es nur den Typ Tetraeder und die Typen vierseitige Pyramide und dreiseitige Doppelpyramide geben kann. Duale Polyeder zu diesen Polyedern sind: das selbstduale Tetraeder, die selbstduale vierseitige Pyramide und das dreiseitige Prisma. Um die Typen für die Eckenanzahl 6 herauszufinden, müsste man – anders als bei der Eckenanzahl 5 – eine Vielzahl von Fällen synthetisch-geometrisch untersuchen. Wir benutzen deshalb die arithmetischen Beziehungen zwischen Ecken-, Kanten- und Flächenanzahlen und insbesondere den Eulerschen Polyedersatz.

Zuerst stellen wir eine Abschätzung für die Flächenanzahlen bei gegebener Eckenanzahl bereit: Aus dem Eulerschen Polyedersatz $e + f = k + 2$

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.
58. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959873307.0

(e: Eckenanzahl, k: Kantenanzahl, f: Flächenanzahl), der auch für konvexe Polyeder gilt, ergibt sich folgende Abschätzung für f:

$$e/2 + 2 \leq f \leq 2e - 4 \quad (*)$$

Mit der Abschätzung (*) folgt mit e = 6, dass f = 5, 6, 7 oder 8 sein kann. Daraus erhalten wir mit dem Eulerschen Polyedersatz für f = 5: k = 9, für f = 6: k = 10, für f = 7: k = 11 und für f = 8: k = 12.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Art der Flächen: Mit f3, f4, f5 (Anzahl der 3-, 4-, 5-seitigen Flächen; 6-seitige Flächen kann ein 6-eckiges Polyeder nicht haben) ergeben sich folgende vier unterbestimmte diophantische Gleichungssysteme mit ihren Lösungen (Abb. 1).

$f = f_3 + f_4 + f_5$, $2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5$ für (f; k) = (5; 9), (6; 10), (7; 11), (8; 12)

Lösung für f = 5, k = 9: $f_5 = f_3 - 2$, $f_4 = 7 - 2f_3$; für $f_3 = 2$: $f_4 = 3$, $f_5 = 0$,
für $f_3 = 3$: $f_4 = 1$, $f_5 = 1$ (entfällt, da sich über einem Fünfeck mit 3 Dreiecken und einem Viereck kein Polyeder bilden lässt).

Lösung für f = 6, k = 10: $f_5 = f_3 - 4$, $f_4 = 10 - 2f_3$; für $f_3 = 4$: $f_4 = 2$, $f_5 = 0$,
für $f_3 = 5$: $f_4 = 0$, $f_5 = 1$.

Lösung für f = 7, k = 11: $f_5 = f_3 - 6$, $f_4 = 13 - 2f_3$; für $f_3 = 6$: $f_4 = 1$, $f_5 = 0$.

Lösung für f = 8, k = 12: $f_5 = f_3 - 8$, $f_4 = 16 - 2f_3$; für $f_3 = 8$: $f_4 = 0$, $f_5 = 0$.

Abb. 1: Berechnung der Anzahlen der Flächenarten

Schließlich wird die Art der Ecken für die vier Fälle bestimmt: Mit e3, e4, e5 (Anzahl der 3-, 4-, 5-kantigen Ecken; 6-kantige Ecken kann ein 6-eckiges Polyeder nicht haben) ergeben sich folgende vier unterbestimmte diophantische Gleichungssysteme mit ihren Lösungen (Abb. 2).

$e = e_3 + e_4 + e_5$ für e = 6, $2k = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5$ für k = 9, 10, 11, 12.

Lösung für k = 9: $e_5 = e_3 - 6$, $e_4 = 12 - 2e_3$; für $e_3 = 6$: $e_4 = 0$, $e_5 = 0$ **Typ 1**.

Lösung für k =10: $e_5 = e_3 - 4$, $e_4 = 10 - 2e_3$; für $e_3 = 4$: $e_4 = 2$, $e_5 = 0$ **Typ 2**,
für $e_3 = 5$: $e_4 = 0$, $e_5 = 1$ **Typ 3**.

Lösung für k = 11: $e_5 = e_3 - 2$, $e_4 = 8 - 2e_3$; für $e_3 = 2$: $e_4 = 4$, $e_5 = 0$ **Typ 4**,
für $e_3 = 3$: $e_4 = 2$, $e_5 = 1$ **Typ 5**,
für $e_3 = 4$: $e_4 = 0$, $e_5 = 2$ (entfällt wegen $f_3 = 6$, $f_4 = 1$, $f_5 = 0$).

Lösung für k = 12: $e_5 = e_3$, $e_4 = 6 - 2e_3$; für $e_3 = 0$: $e_4 = 6$, $e_5 = 0$ **Typ 6**,
für $e_3 = 1$: $e_4 = 4$, $e_5 = 1$ (entfällt wegen $f_3 = 8$, $f_4 = 0$, $f_5 = 0$),
für $e_3 = 2$: $e_4 = 2$, $e_5 = 2$ **Typ 7**.

Abb. 2: Berechnung der Anzahlen der Eckenarten

Die berechneten Daten für Ecken und Flächen werden in der Tabelle 1 gesammelt. Zu diesen sieben Typen müssen nun Repräsentanten gefunden werden. Dazu gehen wir aus von den drei sechseckigen Standard-Polyedern, die jeweils gleichkantig sein sollen (Abb.3): Dreiseitiges Prisma, fünfeckige Pyramide und vierseitige Doppelpyramide (quadratische Doppelpyramide

Typen 6-eckiger Polyeder	Ecken	Flächen	Kanten	3-kantige Ecken	4-kantige Ecken	5-kantige Ecken	Dreiecke	Vierecke	Fünfecke
Typ 1	6	5	9	6	0	0	2	3	0
Typ 2	6	6	10	4	2	0	4	2	0
Typ 3	6	6	10	5	0	1	5	0	1
Typ 4	6	7	11	2	4	0	6	1	0
Typ 5	6	7	11	3	2	1	6	1	0
Typ 6	6	8	12	0	6	0	8	0	0
Typ 7	6	8	12	2	2	2	8	0	0

Tab. 1: Die sieben 6-eckige Polyeder-Typen mit ihren Daten

bzw. Oktaeder bzw. dreiseitiges Antiprisma) und konstruieren aus diesen Körpern mittels ebener Schnitte weitere vier sechseckige Polyeder. Die Schnittebenen werden durch Ecken und Kantenmitten gelegt, sodass die Eckenanzahl 6 erhalten bleibt. In den Schnittköpern sind die Schnittflächen dunkel markiert. Der Schnittkörper des dreiseitigen Prismas wird nochmals geschnitten, damit ein geradensymmetrischer Schnittkörper entsteht. Zwei Gegenecken, die zur Raute des ersten Schnittkörpers aus dem Oktaeder gehören, werden so abgeschnitten, dass man zwei Dreiecksflächen bekommt. Es kann also keine weiteren Typen von sechseckigen konvexen Polyedern geben als die in der Tabelle 1 aufgeführten.

Anmerkung 1: Für die Eckenanzahlen 7 bzw. 8 gibt es bereits computergenerierte Diagramme der 34 bzw. 257 konvexen Polyeder-Typen (Britton & Dunitz 1973), die aber noch als Polyeder darzustellen sind.

Dualisierung: Die sechsflächigen Polyeder-Typen

Um die sieben sechsflächigen Polyeder-Typen zu erhalten, müssen wir nur in der Tabelle 1 die Rubriken „Ecken“ mit „Flächen“ und „n-seitige Vielecke“ mit „n-kantige Ecken“ (n = 3, 4, 5). vertauschen (s. Schumann 2023).

Anmerkung 2: Will man alternativ den umgekehrten Weg gehen, also zuerst die Hexaeder-Typen bestimmen, so ist nur in der Herleitung für die sechseckigen Polyeder-Typen die „Flächen“ mit den „Ecken“ zu vertauschen (Schumann 2023).

Eigenschaften n-eckiger und n-flächiger konvexer Polyeder (n = 4, 5, 6)

Eine nichtmetrische Eigenschaft, die ein Repräsentant einer Klasse isomorpher Polyeder besitzt, besitzen auch alle anderen Polyeder dieser Klasse.

Eine Untersuchung der n-eckigen Polyeder-Typen bringt hervor, dass diese jeweils einen geschlossenen Kantenzug besitzen, der jede Ecke nur einmal durchläuft. Solche Kantenzüge werden „Hamilton-Kreise“ genannt.

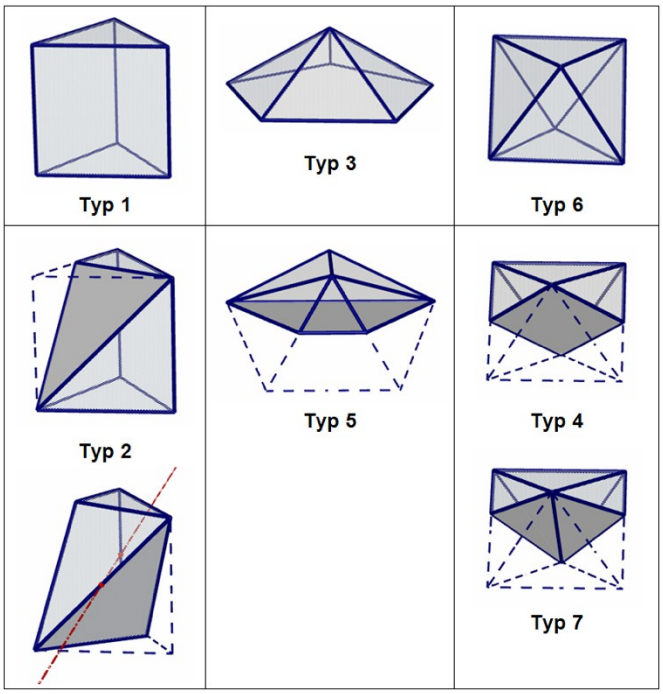

Abb. 3: Die drei sechseckigen Standardpolyeder und die vier sechseckigen Schnittpolyeder aus den drei Standardpolyedern

Anmerkung 3: Für welche n-eckigen Polyeder-Typen (n > 6) gilt diese Aussage noch, abgesehen von einzelnen schon untersuchten Klassen?

Zu der vorstehenden Aussage über n-eckigen Polyeder gibt es eine duale Aussage für n-flächige Polyeder (n = 4, 5, 6): Alle Flächen des Polyeders können nacheinander über kantenverbundene Flächen derart durchlaufen werden, dass jede Fläche nur einmal durchlaufen wird und man zur Ausgangsfläche zurückkehrt. Für die n-flächigen konvexen Polyeder (n = 4, 5, 6) folgt daraus, dass sie in einer entsprechenden Folge „schlangenförmig“ abgewickelt werden können. Die analoge Begriffsbildung zum Hamilton-Kreis ist der Euler-Kreis: Nur der Oktaeder-Typ besitzt unter den n-eckigen Polyeder-Typen (n = 4, 5, 6) einen geschlossenen Kantenzug, der jede Kante nur einmal durchläuft.

Literatur

Britton, D. and Dunitz, J. (1973): A Complete Catalogue of Polyhedra with Eight or Fewer Vertices. *Acta Crystallographica/A, v. 29*. 362-371.

Schumann, H. (2007): *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*. Hildesheim: Franzbecker.

Schumann, H. (2023): *WürfelGEOMETRIE – Ein Zugang zur Raumgeometrie.* Hildesheim: Franzbecker.