

TREIBER, Eva
Freiburg

Doppelter Münzwurf: Studierendenantworten auf zwei Fragen zu einem Zufallsexperiment

Der doppelte Münzwurf stellt ein verhältnismäßig einfaches mehrstufiges Zufallsexperiment dar. Dennoch zeigen sich in Studien wiederholt Probleme von Lernenden bei der Frage nach der Wahrscheinlichkeit, beim Werfen zweier Münzen einmal Kopf und einmal Zahl zu erhalten. Beispielsweise beantworteten bei Carpenter et al. (1981) die Mehrheit der Lernenden die Frage richtig, über 10% entschieden sich jedoch für die Antwort $1/4$. Bei Rasfeld (2004) hingegen wählten fast vier Fünftel der Lernenden die Antwort, dass die Wahrscheinlichkeit für zweimal Wappen genauso groß sei wie für einmal Wappen und einmal Zahl, und nur 16% entschieden sich für die Antwort, dass zweimal Wappen wahrscheinlicher ist. Biehler und Maxara (2005) berichten, dass nur 35% der befragten Studierenden die Frage nach den Wahrscheinlichkeiten für die drei möglichen Ausgänge richtig beantworteten. Bei Rubel (2007) gab zwar etwas mehr als die Hälfte der Lernenden die richtige Antwort $1/2$, knapp ein Viertel antwortete allerdings $1/3$ und 13% gaben $1/4$ als Antwort. Zusätzlich zeigte sich bei ihr, dass Lernende die korrekte Antwort $1/2$ auch durch die fälschliche Übertragung der Wahrscheinlichkeiten bei einer Münze auf mehrere Münzen begründeten.

Fragestellung und Untersuchung

Angesichts der unterschiedlichen Lösungsquoten geht es im vorliegenden Beitrag zunächst darum, wie Studierende die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, genau einmal Zahl zu erhalten, wenn man zweimal eine Münze wirft (Frage 1), beantworten. Da Aufgabenmerkmale sich auf die Beantwortung einer Frage auswirken können (z. B. Weixler, Sommerhoff & Ufer, 2019), wurde den Studierenden zusätzlich eine weitere Frage zum doppelten Münzwurf gestellt, in der nicht nach einem Wert für die Wahrscheinlichkeit, sondern nach den erwarteten Häufigkeiten gefragt wurde. Konkret sollten die Studierenden angeben, wie oft in etwa man wohl jeden der drei denkbaren Ausgänge (zweimal Zahl, einmal Zahl und einmal Kopf, zweimal Kopf) erhält, wenn man 60-mal je zwei Münzen wirft (Frage 2). Der Schwerpunkt des Beitrags liegt darauf, wie konsistent Studierende diese beiden Fragen beantworten.

Die beiden offenen Fragen waren Teil eines Fragebogens zur Wahrscheinlichkeit, den 64 Grundschullehramtsstudierende zu Semesterbeginn ausfüllten. In der Stichprobe waren vom 1. bis zum 8. Fachsemester alle vertreten ($M=4.1$, $SD=1.5$, Median=4).

In: L. Schick, M. Platz & A. Lambert (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2025.

Ergebnisse

Von den 60 Studierenden, die Frage 1 beantworteten, gaben 38 die korrekte Antwort 0.5 und 14 gaben als Wahrscheinlichkeit 0.25 an. Von den verbleibenden Studierenden gaben je 3 die Antwort 0.2 bzw. 1, jeweils eine Person 0.3 bzw. 0.75.

Frage 2 beantworteten 54 Studierende. Gleiche Häufigkeiten für die drei Ausgänge gaben 30 Studierende an; die Erwartungswerte (oder die Wahrscheinlichkeitsverteilung) gaben 20 Studierende als Antwort. Eine Person gab als Häufigkeit für zweimal Kopf bzw. zweimal Zahl je 10 und 40 für einmal Zahl, einmal Kopf an. Die anderen drei Studierenden gaben einen kleineren Wert für einmal Zahl, einmal Kopf an als für zweimal Zahl bzw. zweimal Kopf.

Von 52 Studierenden liegen Antworten auf beide Fragen vor. In der Tabelle sind für diese Studierenden die Häufigkeiten der Antwortkombinationen auf die beiden Fragen dargestellt, wobei alle Antworten, die nur vereinzelt gegeben wurden, unter „andere Antwort“ zusammengefasst sind.

		Frage 1: Wahrscheinlichkeit		
		0.5	0.25	andere Antwort
Frage 2: erwartete Häufigkeiten	gleiche Häufigkeiten	17	8	5
	Erwartungswerte	14	3	2
	andere Antwort	3	0	0

Tab.: Häufigkeiten der Antwortkombinationen auf die beiden Fragen.

Mehrheitlich sind die Antworten auf die beiden Fragen nicht konsistent: Von den Studierenden, die Frage 1 korrekt mit 0.5 beantwortet hatten, gab die Hälfte bei Frage 2 gleiche Häufigkeiten an. Nur bei 14 der 34 Studierenden zeigte sich die Wahrscheinlichkeit 0.5 von Frage 1 als relativer Anteil von einmal Kopf und einmal Zahl bei den 60 Würfeln in Frage 2. Bei den Studierenden, die bei Frage 1 als Wahrscheinlichkeit 0.25 angegeben hatten, zeigte sich in keinem Fall bei Frage 2 die entsprechende relative Häufigkeit; stattdessen gaben 8 gleiche Häufigkeiten an und bei 3 Studierenden spiegelte sich in den Häufigkeiten bei Frage 2 die korrekte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Während bei der Mehrheit der Studierenden, die Frage 1 korrekt beantworteten, die Antwort auf Frage 2 nicht korrekt war, zeigt sich umgekehrt ein

gegenteiliges Bild: Fast drei Viertel der Studierenden, die Frage 2 korrekt beantworteten, gaben bei Frage 1 auch die richtige Wahrscheinlichkeit an. Ebenso gab von den Studierenden, die bei Frage 2 gleiche Häufigkeiten angegeben hatten, mehr als die Hälfte die korrekte Antwort auf Frage 1.

Diskussion und Fazit

Frage 1 wurde von über 60% der Studierenden korrekt beantwortet, womit die Lösungsquote positiv bewertet werden kann, insbesondere im Vergleich zum Ergebnis von Biehler und Maxara (2005). Allerdings könnte der deutliche Unterschied auch darauf zurückzuführen sein, dass einige der hier befragten Studierenden auf Wissen zurückgreifen konnten, das sie bereits während des Studiums erworben hatten. Fast ein Viertel der Studierenden gab jedoch 0.25 als Wahrscheinlichkeit an, was über den berichteten Werten von Carpenter et al. (1981) und Rubel (2007) liegt. Eine naheliegende Erklärung für die Antwort $1/4$ wäre, dass die Studierenden zwar die Pfadregel im Sinne von „Wahrscheinlichkeit für Zahl mal Wahrscheinlichkeit für Kopf“ genutzt haben, aber ohne zu berücksichtigen, dass es zwei Pfade gibt, bei denen genau einmal Zahl vorkommt. Die Antwort $1/3$ wurde dagegen überhaupt nicht gegeben; ob die Antwort 0.3 in diesem Sinne gemeint war, lässt sich nicht feststellen.

Bei Frage 2 waren jedoch gleiche Häufigkeiten die häufigste Antwort. Insofern lässt sich zunächst festhalten, dass nur bei wenigen Studierenden die Antworten auf die beiden Fragen konsistent waren. 17 Studierende gaben bei Frage 1 die Wahrscheinlichkeit 0.5 und gleichzeitig bei Frage 2 gleiche Häufigkeiten an. Während bei Rubel (2007) die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben, aber diese dann nicht korrekt begründet wurde, wird hier die richtige Wahrscheinlichkeit angegeben, die sich dann aber nicht in den angegebenen Häufigkeiten bei Frage 2 zeigt. Auch bei den Studierenden, die bei Frage 1 die Wahrscheinlichkeit 0.25 angegeben hatten, spiegelt sich diese nicht in den Antworten auf Frage 2 wider. Umgekehrt entspricht bei den Studierenden, die bei Frage 2 die Erwartungswerte angegeben haben, zwar in der Mehrheit die Wahrscheinlichkeit, die sie bei Frage 1 angegeben haben, dem relativen Anteil bei Frage 2, aber auch nicht in allen Fällen. Bei den Studierenden, die bei Frage 2 gleiche Häufigkeiten angegeben haben, hat die Mehrheit bei Frage 1 ebenfalls 0.5 angegeben, was nicht dem relativen Anteil bei Frage 2 entspricht.

Offensichtlich werden die beiden Fragen von den Studierenden nicht zwingend konsistent beantwortet. In der untersuchten Stichprobe führte die Frage nach der Wahrscheinlichkeit (Frage 1) zu mehr korrekten Antworten und zur falschen Antwort 0.25, bei der Frage nach den erwarteten Häufigkeiten

(Frage 2) spielte die falsche Antwort 0.25 keine Rolle, wohingegen sich der Equiprobability Bias (Lecoutre, 1992) zeigte, also die Annahme, dass die drei Ausgänge alle die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Eine denkbare Erklärung wäre, dass durch die verschiedenen Fragestellungen für die Studierenden unterschiedliche Herangehensweisen naheliegend sind: Aus dem Schulunterricht könnten die Studierenden die Pfadregeln als übliche Vorgehensweise für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten, wie dem zweifachen Wurf einer Münze, kennen. Bei Frage 2 könnte hingegen das Abzählen von günstigen und allen Möglichkeiten dadurch nahegelegt werden, dass die drei Ausgänge bereits vorgegeben sind. Vielleicht wird im (gleichzeitigen) Werfen zweier Münzen auch die Zweistufigkeit gar nicht erkannt und daher auf das Abzählen der Möglichkeit zurückgegriffen.

Ob den Studierenden die Inkonsistenz ihrer Antworten überhaupt bewusst ist, müsste in einer sich anschließenden Studie untersucht werden.

Literatur

- Biehler, R. & Maxara, C. (2005). Eingangstest Stochastik - Vorkenntnisse von Lehramtsstudierenden. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 91-94). Franzbecker.
- Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Jr., Lindquist, M. M., & Reys, R. E. (1981). What are the chances of your students knowing probability? *The Mathematics Teacher*, 74(5), 342-344.
- Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive Models and Problem Spaces in „Purely Random“ Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557–568.
- Rasfeld, P. (2004). Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empirischen Studie. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25(1), 33-61.
- Rubel, L. H. (2007). Middle School and High School Students' Probabilistic Reasoning on Coin Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 531–556.
- Weixler, S., Sommerhoff, D. & Ufer, S. (2019). The empirical law of large numbers and the hospital problem: Systematic investigation of the impact of multiple task and person characteristics. *Educational Studies in Mathematics*, 100(1), 61–82. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9856-x>