

D'ERCHIE, Michael; FORSMANN, Claire; SCHNEIDER, Michael & OBERSTEINER, Andreas
München, Trier, Trier, München

Korrelative Beziehungen zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen über Bruchzahlen und Algebra

Theoretischer Hintergrund und Forschungsfragen

Das Bruchzahlwissen von Schüler:innen ist ein starker Prädiktor für ihr späteres Algebrawissen (z. B. Siegler et al., 2012). Algebra wiederum ist wichtig für den Wissenserwerb in der höheren Mathematik (z. B. Booth & Newton, 2012). Bruchzahlwissen könnte daher, mediiert über Algebrawissen, die mathematische Entwicklung von Schüler:innen über Jahre hinweg beeinflussen.

Die bisherige Forschung zum Zusammenhang zwischen Bruchzahlwissen und Algebrawissen weist jedoch Limitationen auf. Erstens enthalten die Items zur Messung von Algebrawissen in einigen Studien Brüche und überschätzen daher möglicherweise die gefundenen Zusammenhänge. Zweitens berücksichtigen bisherige Studien in ihren statistischen Analysen den Messfehler nicht, was umgekehrt zu einer Unterschätzung des Zusammenhangs führen kann. Ferner besteht Konsens darüber, dass mathematisches Wissen sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen umfasst. Die spezifischen Zusammenhänge zwischen dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen über Bruchzahlen einerseits mit dem konzeptuellen bzw. prozeduralen Wissen über Algebra andererseits sind bislang jedoch noch nicht geklärt.

Konzeptuelles Wissen beschreibt dabei ein explizites oder implizites Verständnis von bereichsspezifischen Prinzipien und deren Zusammenhänge. *Prozedurales Wissen* beschreibt das Wissen über Strategien und Algorithmen zur Lösung bestimmter Aufgaben (z. B. Hiebert & Lefevre, 1985).

Die getrennte Messung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen stellt eine methodische Herausforderung dar, da Testitems häufig beide Wissensarten gleichzeitig ansprechen. Um die relativen Stärken von Schüler:innen in der einen oder anderen Wissensfacette zu erfassen, fokussieren Items auf eine der beiden Wissensarten (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Die Entwicklung solcher Items erfordert zunächst eine sorgfältige theoretische Analyse, welche Aspekte für den jeweiligen Wissensbereich zentral sind. Solche Analysen liegen für die Bruchrechnung vor (z. B. Lenz et al., 2020), nicht aber für die Algebra (Viegut, 2021). Lenz et al. (2020) und Schneider et al. (2011) konnten die empirische Trennbarkeit von konzeptuellem und prozeduralem Wissen im Bereich der Bruchzahlen beziehungsweise der Algebra

zeigen. Eine Erfassung beider Inhaltsbereiche innerhalb derselben Stichprobe liegt bislang aber nicht vor.

Die vorliegende Studie (gefördert durch die DFG, Förderkennzeichen: OB 412/4-1 und SCHN 1097/5-1) quantifiziert unter Berücksichtigung des Messfehlers den korrelativen Zusammenhang zwischen Bruchzahlwissen und Algebrawissen mithilfe von Strukturgleichungsmodellen. In einem zweiten Schritt werden die Trennbarkeit sowie die Korrelationen von konzeptuellem und prozeduralem Bruchzahlwissen und konzeptuellem und prozeduralem Algebrawissen bei Schüler:innen der Mittelstufe untersucht.

Methode

Die Stichprobe besteht aus 580 Schüler:innen der neunten und zehnten Jahrgangsstufe aus 26 verschiedenen Klassen aus Bayern und Rheinland-Pfalz. Das Durchschnittsalter der Teilnehmer:innen betrug 14.91 Jahre ($SD = 0.74$).

Konzeptuelles und prozedurales Wissen über Bruchzahlen und Algebra wurde mit jeweils drei Indikatoren gemessen. Die Items für das konzeptuelle Bruchzahlwissen bezogen sich auf die Größenvorstellung von Brüchen, die Dichteigenschaft von Brüchen und Visualisierungen von Brüchen (insbesondere die Fähigkeit zur Übersetzung zwischen symbolischen und ikonischen Bruchdarstellungen). Das prozedurale Bruchzahlwissen umfasste die Addition und Subtraktion, die Multiplikation und Division sowie das Erweitern und Kürzen von Brüchen. Die Auswahl orientierte sich an bisherigen Studien (Hallett et al., 2012; Lenz et al., 2019).

In der Algebra lag der Fokus auf linearen Gleichungen. Die Testitems für das konzeptuelle Algebrawissen basierten ebenfalls weitgehend auf etablierten Instrumenten in der Literatur und umfassten das Verständnis von Variablen, von Äquivalenz und von Gleichungen. Das prozedurale Algebrawissen bezog sich vorwiegend auf das Lösen linearer Gleichungen, sowohl ohne als auch mit Parametern, und das Lösen linearer Gleichungen aus Textaufgaben. Die verwendeten Gleichungen enthielten dabei keine Bruchzahlen.

Um in einem ersten Schritt die Stärke der Beziehung zwischen dem Bruchzahlwissen der Schüler:innen und ihrem Algebrawissen zu quantifizieren, wurde zunächst ein Strukturgleichungsmodell mit zwei interkorrelierten latenten Faktoren für *Bruchzahlwissen* und *Algebrawissen* analysiert. Um in einem zweiten Schritt zu prüfen, ob die verwendeten Maße für konzeptuelles und prozedurales Wissen (jeweils in den Bereichen Bruchzahlen und Algebra) tatsächlich vier unterschiedliche Wissensarten erfassen, wurde ein Strukturgleichungsmodell mit vier interkorrelierten latenten Faktoren für konzeptuelles und prozedurales Wissen jeweils für Brüche und Algebra de-

finiert (Abb. 1). Im Falle der empirischen Trennbarkeit sollte das Vier-Faktorenmodell in einer konfirmatorischen Faktorenanalyse einen guten und statistisch signifikant besseren Modell-Fit als das Zwei-Faktorenmodell zeigen.

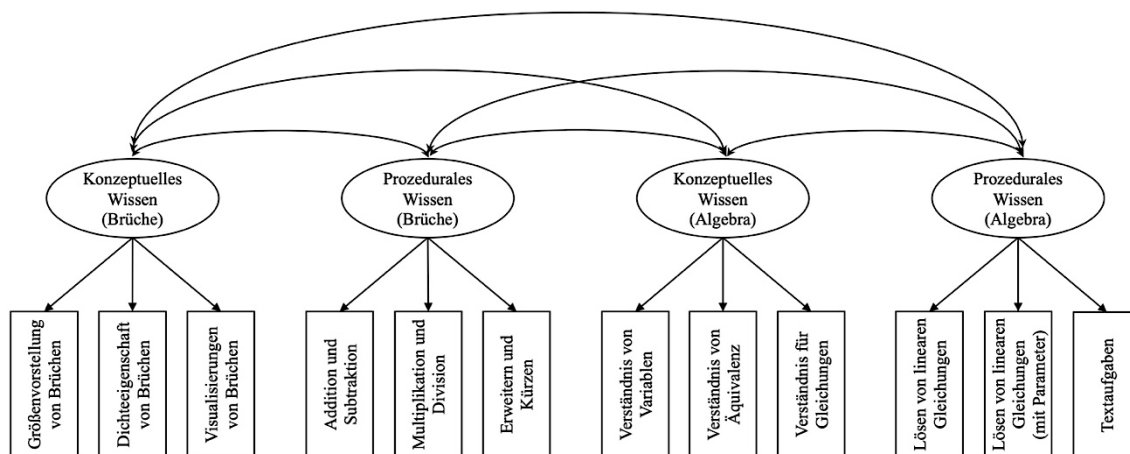


Abb. 1: Vier-Faktorenmodell mit interkorrelierten latenten Faktoren für konzeptuelles und prozedurales Wissen über Brüche und Algebra

Ergebnisse

Das Zwei-Faktorenmodell zeigt einen akzeptablen Modell-Fit. Die Korrelation der beiden latenten Variablen betrug $r = .90$, $p < .001$. Diese hohe Korrelation legt ein Ein-Faktorenmodell nahe, welches jedoch einen signifikant schlechteren Modell-Fit als das Zwei-Faktorenmodell zeigt ($p < .001$).

Zur Untersuchung der Zusammenhänge zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen wurde das Vier-Faktorenmodell herangezogen. Das Vier-Faktorenmodell zeigt einen sehr guten Modell-Fit und einen signifikant besseren Modell-Fit als das Zwei-Faktorenmodell ($p < .001$). Statistisch signifikante Faktorladungen (.50 - .73) weisen darauf hin, dass die Indikatoren in einem sinnvollen Zusammenhang mit den angenommenen latenten Faktoren stehen. Zwischen Brüchen und Algebra zeigen sich für beide Wissensarten hohe Interkorrelationen ($r > .73$) der latenten Variablen. Die sechs Korrelationen zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen (siehe Abb. 1) unterscheiden sich paarweise nicht signifikant voneinander.

Diskussion

Der gewählte Ansatz zur Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Bruchzahlwissen und Algebrawissen mithilfe von latenten Variablen und Strukturgleichungsmodellen bestätigt einen starken Zusammenhang zwischen den beiden Wissensbereichen. Wie erwartet zeigen die Ergebnisse jedoch, dass die bisherigen Studien die Zusammenhänge eher unterschätzten. Die Ergebnisse legen zudem nahe, dass auf Basis der verwendeten Maße die

empirische Trennbarkeit zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen für Bruchzahlen und Algebra angenommen werden kann. Die insgesamt hohen Interkorrelationen zwischen den vier Facetten des konzeptuellen und prozeduralen Wissen über Bruchzahlen und Algebra deuten darauf hin, dass sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen den in bisherigen Studien berichteten korrelativen Zusammenhang zwischen Bruchzahl- und Algebrawissen erklären.

Obwohl korrelative Beziehungen zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen über Bruchzahlen und Algebra gefunden wurden, bleibt die Frage nach der Erklärung für diese Zusammenhänge unbeantwortet. Weitere Studien sollten unter anderem theoretisch diskutierte Mediatoren (z. B. Viegut, 2021) für diese Zusammenhänge untersuchen.

Literatur

- Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001>
- Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(4), 469-486. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.07.009>
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Lenz, K., Dreher, A., Holzapfel, L., & Wittmann, G. (2020). Are conceptual knowledge and procedural knowledge empirically separable? The case of fractions. *British Journal of Educational Psychology*, 90(3), 809-829. <https://doi.org/10.1111/bjep.12333>
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics In R. C. Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (pp. 1118-1134). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525-1538. <https://doi.org/10.1037/a0024997>
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697. <https://doi.org/10.1177/0956797612440101>
- Viegut, A. (2021). Causal pathways from fractions to algebra: Integrating psychology and math education perspectives. <https://doi.org/10.31219/osf.io/dg7ew>