NOSTER, Norbert & SILLER, Hans-Stefan
Würzburg

Repräsentationen von Äquivalenzumformungen und warum das Waagemodell keine ist

Das Lösen von Gleichungen stellt eine wichtige mathematische Fertigkeit dar, die Schülerinnen und Schüler im Laufe ihrer Schulzeit im Bereich der Arithmetik kennenlernen und im Kontext der Algebra ausbauen. Äquivalenzumformungen kommen hierbei eine besondere Bedeutung zu, da sie es erlauben Gleichungen auf symbolischer Ebene so umzuformen, dass die Lösung leicht ablesbar ist, was insbesondere auch dann funktioniert, wenn die unbekannte Variable auf beiden Seiten der Gleichung auftritt (Filloy, Puig & Rojano, 2008; Linchevski & Herscovics, 1996). Dies mag mitunter der Grund sein, weshalb sie von manchen als das wichtigste Werkzeug zum Lösen von Gleichungen betitelt werden (Arens et al., 2015). Daher widmet sich dieser Beitrag dem Begriff der Äquivalenzumformung, wobei der Fokus auf Repräsentationen und dem Einsatz von Modellen, wie dem Waagemodell, liegt, die in diesem Kontext häufig zum Zwecke der Begriffsbildung herangezogen werden (Otten et al., 2019).

Definition Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen können als Umformungen einer Gleichung verstanden werden, die sich nicht auf die Lösungsmenge auswirken (Vollrath & Weigand, 2002). Eine Definition dieser Art lässt vielfältige Interpretationen zu, die unterschiedlich hilfreich und zielführend im Umgang mit Gleichungen sind (Oleksik, 2019a). Im Rahmen dieses Beitrages wird der Begriff der Äquivalenzumformungen auf Waage- und Elementarumformungsregeln (Tab. 1) beschränkt (Malle, 1993), wenngleich weitere Umformungen existieren, wie zum Beispiel das Faktorisieren von Termen, die die zuvor genannten Anforderungen an Äquivalenzumformungen erfüllen.

$A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$ $A \cdot B = C \Leftrightarrow A = C:B \quad (B \neq 0)$	$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$ $A = B \Leftrightarrow A - C = B - C$ $A = B \Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C \quad (C \neq 0)$ $A = B \Leftrightarrow A:C = B:C \quad (C \neq 0)$

Tabelle 1: Elementarumformungsregeln (links), Waageregeln (rechts) nach Malle (1993) S. 219f.

Repräsentation auf symbolischer Ebene

In Tabelle 1 sind Waage- und Elementarumformungsregeln dargestellt. Eine

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

einzelne Umformungsregel wird dabei durch ein Gleichungspaar repräsentiert. Dabei ist anzumerken, dass eine Gleichung den *Ausgangszustand* darstellt, der durch eine Umformung in einen *Zielzustand* - die zugehörige zweite Gleichung - versetzt wird. Dass die Gleichungen zusammengehören und die gleiche Lösungsmenge aufweisen, also äquivalent sind, wird häufig durch einen Äquivalenzpfeil ⇔ zum Ausdruck gebracht. Die Umformung selbst, die die Gleichung vom Start- in den Zielzustand versetzt, ist in den in Tabelle 1 dargestellten Regeln nicht explizit dargestellt. Sie wird erst durch den Vergleich der beiden Gleichungen miteinander erkenntlich. Dieser Umstand mag der Grund dafür sein, dass die angewandte Äquivalenzumformung im Mathematikunterricht zusätzlich angeführt wird, indem beispielsweise neben einer Gleichung |+3 vermerkt wird: $x - 3 = 3 \quad | + 3$. Eine solche Kennzeichnung erleichtert es die angewandte Umformung nachzuvollziehen. In gewisser Weise kann auch eine solche Kennzeichnung durch den vertikalen Strich (von Schüler:innen auch als "Kommandostrich" bezeichnet) als eine Repräsentation einer Äquivalenzumformung gesehen werden, die sich mithilfe der Waageregeln deuten lässt. Wird beispielsweise neben einer Gleichung der Zusatz |+3 angefügt, so heißt das im Allgemeinen, dass auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl Drei hinzuaddiert wird. Eine Interpretation mittels Elementarumformungsregel wiederum ist nicht notwendigerweise eindeutig. Umformungen werden hier eher im Sinne von Bewegungen gedeutet, bei denen ein Term einer Gleichung durch Rechenzeichenwechsel auf die andere Seite einer Gleichung verschoben wird (Oleksik, 2019b; Noster, 2023). In diesem Fall verweist 3 auf einen Term, der auf die andere Seite verschoben wird. Problematisch hierbei ist, dass ungeklärt bleibt auf welchen Term sich der Verweis bezieht und wie das Rechenzeichen zu deuten ist. Hier wäre vermutlich eine richtungsweisende Notation passender, beispielsweise $| + 3 \rightarrow -3$, um auszudrücken, dass der Term 3 von der linken zur rechten Seite übertragen wird, wobei aus dem Plus ein Minus wird. Analog kann der Pfeil umgekehrt werden, um die gegenteilige Operation auszudrücken. Über die Sinnhaftigkeit und Notwendigkeit einer solchen Notation lässt sich freilich streiten. Bedenkt man aber, dass eine Deutung von Äquivalenzumformungen als Bewegung, wie durch Elementarumformungsregeln beschreiben, bei Schüler:innen am Ende der Sekundarstufe nicht selten vorzufinden ist und in der Untersuchung von Noster (2023) die größte Personengruppe ausmachte, scheinen Überlegungen dieser Art diskussionswürdig. Unabhängig hiervon ist festzuhalten, dass Äquivalenzumformungen eine Operation darstellen, die zu einer Änderung einer Gleichung führen. Es ist weder die Gleichung im Startzustand noch die im Zielzustand, sondern das, was dazu führt, dass aus der einen Gleichung die andere resultiert. Es geht also um die Umformung als Operation. Dies lässt sich

auch an Veranschaulichungen mittels Modelle verdeutlichen.

Repräsentation in Modellen

Ein häufig genutztes Modell im Kontext von Äquivalenzumformungen ist das Waagemodell. In diesem Modell wird eine Balkenwaage herangezogen, bei der die beiden Waagschalen jeweils eine Seite der Gleichung repräsentieren und die Gleichheit durch das Gleichgewicht der Waagschalen dargestellt wird. Die Terme werden durch die Objekte in den Waagschalen visualisiert. An diesem Punkt dürfte bereits klar sein, dass das Waagemodell ein Modell einer Gleichung darstellt. Nun können zwar zwei Gleichungen im Sinne der Waageregeln mittels des Waagemodells dargestellt werden, aber auch hier ist noch keine Repräsentation der Äquivalenzumformung gegeben. Denn es ist die Operation die von einer Gleichung zur anderen, oder hier von einem Waagschalenpaar zum anderen führt. Folglich kann auch das Waagemodell selbst keine Repräsentation der Äquivalenzumformung darstellen, vielmehr ist es die Handlung am Modell. Zur Veranschaulichung der Waageregeln kann auf beide Waagschalen jeweils das gleiche Objekt hinzugefügt werden.

Elementarumformungsregeln mit dem Waagemodell durchzuführen, dürfte sich als schwierig erweisen bzw. nicht ohne Weiteres mit einem herkömmlichen Weltbild in Einklang bringen. Für diese Regeln ist das Streckenmodell (Malle, 1993) geeigneter, bei dem einem Term jeweils eine Strecke zugeordnet wird, wobei die Länge der Strecke dem Wert des Terms entspricht. Wenn zwei aneinander gelegte Strecken A und B genau so lang sind wie die Strecke C, dann erscheint es schon fast trivial, dass die Länge der Strecke A der Strecke C verkürzt um die Länge der Strecke B entspricht (was die erste aufgeführten Elementarumformungsregel beschreibt). Auch hier ist festzuhalten, dass die Strecken die Gleichung repräsentieren, die Handlung selbst – das Abtragen der Strecke – der Äquivalenzumformung entspricht. Im Übrigen lassen sich im Streckenmodell auch Operationen im Sinne der Waageregeln durchführen. Wenn an zwei gleichlange Strecken gleichermaßen vervielfacht werden, so resultiert dies wiederum in zwei gleichlangen Strecken.

Fazit

Dieser Diskurs verdeutlicht, dass Äquivalenzumformungen als Operation nur implizit in den Gleichungspaaren dargestellt werden. Dementsprechend ist es nicht ausreichend Modelle für Gleichungen heranzuziehen, um diese zu veranschaulichen. Vielmehr geht es um die Operationen auf den Gleichungen bzw. den Handlungen am Modell. Dabei ist festzuhalten, dass die Modelle teilweise ähnliche und gleichzeitig unterschiedliche Operationen

zulassen. Daher eignen sie sich auch unterschiedlich gut zur Veranschaulichung - und Repräsentation - einzelner Äquivalenzumformungsregeln. Die Operationen an den Modellen lassen sich zusammenfassen (Noster, 2023). So werden Umformungen im Sinne von Waageregeln als "auf beiden Seiten dasselbe tun" beschrieben. Die Elementarumformungsregeln hingegen als "Change-Side-Change-Sign"-Regel, wobei der Rechenzeichenwechsel im Modell als Durchführung der inversen Operation zu verstehen ist.

Vor diesem Hintergrund sollten im Diskurs um Äquivalenzumformungen nicht die Modelle im Vordergrund stehen, da sie diese nicht repräsentieren können. Vielmehr sind es die Operationen an den Modellen, die im Fokus stehen sollten, denn diese lassen sich – gemäß der Umformungsregeln – anhand unterschiedlicher Modelle in ähnlicher Weise veranschaulichen. Dabei ist anzumerken, dass Handlungen an Modellen von Lernenden bei der Übertragung auf die syntaktische Ebene unterschiedlich aufgegriffen und genutzt werden können (Oleksik, 2019b), was die Komplexität des Themas andeutet, dessen angemessener Diskussion es weiterer Forschung bedarf.

Literatur

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., & Stachel, H. (2015). *Mathematik*. Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-642-44919-2

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra*. Springer.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39–65.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.

Oleksik, N. (2019a). Äquivalenzumformung – mehr als nur Regeln. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*. Münster: WTM-Verlag. S.589–592.

Oleksik, N. (2019b). Transforming equations equivalently? – theoretical considerations of equivalent transformations of equations. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.): *Proceedings the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-02416421v1

Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: a systematic literature review. *International Journal of STEM Education, 6*(30). https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2

Noster, N. (2023). *Deutungen und Anwendungen von Äquivalenzumformungen*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-43280-5

Vollrath, H.-J., & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. Elsevier.