

Multiplikative Strukturen in Punktbildern erfassen - Einblick in eine Eyetracking-Studie mit Grundschulkindern

Die Fähigkeit multiplikativ denken zu können, bildet eine wichtige Voraussetzung für viele Themen des Mathematikunterrichts auch über die Grundschule hinaus (Lamon, 1994). Daher ist eine verständnisbasierte Erarbeitung der Multiplikation im Mathematikunterricht des zweiten Schuljahres von großer Bedeutung. Damit ist gemeint, dass die Kinder die Fähigkeit erlangen, in gebündelten Einheiten denken zu können (Götze & Baiker, 2023). Bei diesem sogenannten Prozess des "unitizing" (Lamon, 1994) werden einzelne Elemente zu gebündelten Einheiten zusammengefasst und mit diesen als Gesamtheit operiert. Dafür ist eine unterschiedliche Interpretation von Multiplikator und Multiplikand zwangsläufig notwendig. Während der Multiplikator die Anzahl der gebündelten Einheiten bezeichnet, gibt der Multiplikand die Größe der jeweiligen Einheiten an (Götze & Baiker, 2023). Um derartige Einsichten in multiplikative Strukturen zu erlangen, hat sich die Vernetzung verschiedener Darstellungsformen als zentral erwiesen, denn mit Hilfe anschaulicher Darstellungen wie z. B. rechteckigen Punktbildern sowie dem verstehensorientierten Diskurs über diese Darstellungen, kann multiplikatives Denken bei den Kindern gefördert werden (Barmby et. al., 2009; Götze & Baiker, 2023; Lamon, 1994). In der Auseinandersetzung mit Punktbildern können aber auch Fehlvorstellungen entstehen, denn nicht selten tendieren Grundschulkindern dazu, lediglich die äußeren Ränder zu fokussieren (Götze & Baiker, 2023). Die Konsequenz ist, dass sie zwar einen korrekten multiplikativen Term zum Punktbild nennen, aber die multiplikativen Strukturen in den Punktbildern nicht wahrnehmen. Den Zusammenhang zwischen spontan fokussierten und tatsächlich verstandenen multiplikativen Strukturen gilt es daher näher zu beforschen.

Forschungsdesign

Um diesem Forschungsinteresse nachzugehen, wurden 15 Kindern einer zweiten Klasse in Einzelinterviews Punktbilder gezeigt, zu denen sie passende Malaufgaben nennen sollten. Die Passung von Aufgabe und Bild mussten die Kinder anschließend mündlich erklären. Die Aufzeichnungen erfolgten mit Hilfe einer Eyetrackingbrille (Tobii Pro Glasses 3), die über eine Video- und Audioaufnahmefunktion verfügt sowie die Blickbewegungen der Kinder erfasst. Die im Anschluss an die Aufnahme generierten "Gaze Plots" (siehe z. B. Abb. 1) dienten der Veranschaulichung der Blickdaten. "Gaze Plots" visualisieren die einzelnen Blickpunkte (Fixationen)

durch Kreise. Die Größe des Kreises gibt Auskunft über die Länge der Fixation. Die Blickpunkte sind in der Reihenfolge der Betrachtung durchnummeriert. Die Interpretation der Blickdaten ist jedoch nicht immer eindeutig, weshalb sich die Ergänzung um verbale Daten oder auch Gesten anbietet (Schindler & Lilienthal, 2019). Daher wurden für die Auswertungen der Interviewdaten die Blickbewegungen, die mündlichen Erklärungen sowie die Gesten trianguliert, um eine möglichst valide Diagnose der durch die Kinder wahrgenommenen multiplikativen Strukturen tätigen zu können.

Einblick in die Datenanalyse der erfassten multiplikativen Strukturen

Im Folgenden werden Einblicke in drei Blickbewegungsmuster gegeben, die sich in den Interviews mit den Kindern wiederholt beobachten ließen. Es erfolgt zunächst eine Analyse der Blickbewegungen, bevor die Erklärungen sowie die Gesten der Kinder in den Analysen Berücksichtigung finden.

Einige Kinder erfassten die Anzahl der Punkte, indem sie die Menge einzeln auszählten (oftmals in Spalten oder in Zeilen). Dadurch konnten sie zwar die Gesamtanzahl an Punkten bestimmen, häufig aber nicht den multiplikativen Term. Abbildung 1 zeigt die spaltenweise Betrachtung von Edda, die zunächst die Punkte in den ersten beiden Spalten anschaute (Abb. 1 links). Nach einer kurzen Pause zählte sie die Punkte in den weiteren drei Spalten (Abb. 1 rechts). Die erhaltenen Teilmengen verknüpfte Edda zu dem multiplikativen Term $8 \cdot 12$.

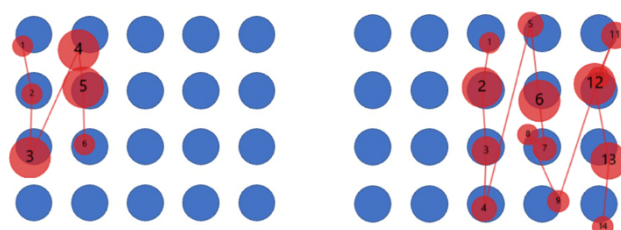


Abb. 1: Eddas Zählen in Spalten führt zum multiplikativen Term $8 \cdot 12$

Übereinstimmend zeigte sich, dass ein punktweises Auszählen in den Blickdaten stets darauf hindeutete, dass die Kinder keine multiplikativen Strukturen in den Darstellungen wahrnahmen.

Bei anderen Kindern war in den Blickdaten eine erste Fokussierung der ersten Spalte sowie der ersten Zeile des Punktbildes beobachtbar (vgl. Abb. 2 links). Die Blicke lagen bei der Erfassung des Bildes also ausschließlich auf den Rändern der multiplikativen Darstellung. Derartige Betrachtungsweisen könnten suggerieren, dass die Kinder keine multiplikativen Strukturen in den Bildern wahrnahmen und damit rein prozedural auf die Ränder des Punktbildes schauten. Durch gezieltes Nachfragen wurde aber deutlich, dass ein rein prozeduraler Blick noch kein eindeutiges Indiz für mangelnde multipli-

kative Deutungen darstellte und eine Auswertung der weiteren Erhebungsdaten stets notwendig war. Die Blickdaten aus Abbildung 2 stammen von dem Zweitklässler Oskar, der das $4 \cdot 5$ Punktebild direkt als „vier Fünfer“ deutete, dabei allerdings nur auf die äußeren Ränder schaute (Abb. 2 links). Das Gesagte und die Blickbewegungen waren somit widersprüchlich. Erst durch die Rückfrage der Interviewerin wurde deutlich, dass Oskar auch einen multiplikativen Blick auf das gesamte Punktebild einnehmen konnte:

I: Wo genau siehst du die vier Fünfer?

O: Also ähm, ganz oben ist ein Fünfer. Ähm der zweite ist ein Fünfer, der dritte und ein vierte.

Im Zuge der multiplikativen Erklärung ("oben ist ein Fünfer") änderten sich ebenso die Blickbewegungen von Oskar, sodass er im Zuge der Erklärung jeden der vier Fünfer fokussierte (vgl. Abb. 2 rechts):

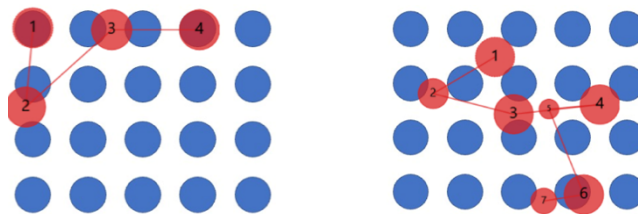


Abb. 2: Fokussierung der äußeren Ränder (links) und Fokussierung der Fünfer (rechts)

Somit zeigt das Beispiel von Oskar, dass ein erstes Fokussieren der Ränder nicht zwangsläufig auf mangelnde Einsichten in multiplikative Strukturen hindeutet. Zeitgleich zeigt das Beispiel, dass Blickdaten und mündliche Erklärungen teilweise widersprüchlich sein können. Erst ein gezieltes Nachfragen lässt weitere Rückschlüsse zu.

Andere Kinder, die ebenfalls lediglich die äußeren Ränder fokussierten, verdeutlichten durch ihre anschließenden Erklärungen, dass sie (noch) keine multiplikativen Strukturen in den Punktebildern wahrnahmen. So erklärte Hannah die beiden erfassten Faktoren, ohne sie in Beziehung zu setzen:

H: Hier ist vier (zeigt auf die erste Spalte) und das eins, zwei, drei, vier, fünf.

Für Hanna passte das Punktebild, da sie vier und fünf Plättchen identifizieren konnte. Eine multiplikative Deutung nahm sie nicht vor.

Andere Blickdaten deuteten unmittelbar daraufhin, dass die Kinder multiplikative Strukturen zur Bestimmung des Terms fokussierten. So betrachtete Leyla (Abb. 3) zunächst die erste Zeile von links nach rechts und die zweite von rechts nach links. Anschließend sprang der Blick zunächst in der mittleren Spalte und dann in der linken Spalte nach unten. Leyla schien demnach die Gruppengröße zunächst an zwei Zeilen zu überprüfen. Vermutlich erkannte sie durch die Anordnung der Punkte (Eins-zu-Eins-Zuordnung), dass

die weiteren Gruppen ebenfalls aus fünf Punkten bestanden, sodass sie nur noch deren Anzahl in zwei Spalten überprüfte. Anschließend nannte sie eine passende Aufgabe zum erfassten Punktebild ($4 \cdot 5$).

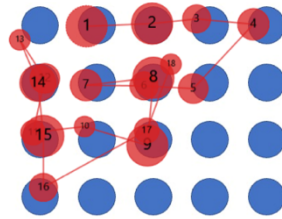


Abb. 3: Leylas Blickdaten zur Erfassung des Punktebildes

Die Passung begründete sie wie folgt:

- L: Ähm, weil ähm, überall wo die Punkte sind, das sind immer fünf, also da oben sind fünf Punkte, da sind auch fünf Punkte, da sind auch fünf Punkte (zeigt rechts auf jede Zeile einmal), aber hier auch und noch, und aber das sind ähm von vier von denen, also vier von denen, ich habe es einfach so nachgezählt.

Sie verdeutlichte durch ihre mündliche Erklärung unterstützt durch Zeigege-
sten sowohl die Gruppengröße als auch deren Anzahl.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Aus den oben beschriebenen Beispielen wird deutlich, dass Grundschulkin-
der verschiedene Blickbewegungen zur Erfassung von Punktebildern nutzen.
Teilweise lassen diese Blickdaten bereits Rückschlüsse auf die erkannten
multiplikativen Strukturen zu. Häufig führen allerdings erst Aufforderungen
zur Präzisierung zu einer Veränderung der Blickbewegungen, sodass die
Blickbewegungen in Kombination mit den aufgenommenen verbalen Daten
Einblicke in mentale Prozesse beim Erfassen und Begründen multiplikativer
Strukturen in Punktebildern geben.

Literatur

- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 217–241. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9145-1>
- Götze, D., & Baiker, A. (2023). Enhancing language-responsive meaning-making processes as an epistemic catalyst for developing multiplicative reasoning in young children. *The Journal of Mathematical Behavior*, 70, 101034. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101034>
- Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (S. 89–120). State University of NY Press.
- Schindler, M., & Lilienthal, A. J. (2019). Domain-specific interpretation of eye tracking data: towards a refined use of the eye-mind hypothesis for the field of geometry. *Educ Stud Math*, 101, 123–139. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-9878-z>