

Christian VAN RANDENBORGH, Bielefeld / Würzburg

## **Instrumentelle Wissensaneignung im Mathematikunterricht – Zur Bedeutung historischer Instrumente für die Verständnisentwicklung –**

### **Einleitung**

Immer wieder wurden in der Geschichte der Mathematik Zeichengeräte entwickelt, wie Zirkel & Lineal, Ellipsen- & Parabelzirkel und Pantographen.

Wann aber ist ein historisches Zeicheninstrument ein bedeutsames Instrument? Wie und zu welchem Zweck kann man ein derartiges Zeichengerät im heutigen Mathematikunterricht einsetzen?

Um diese und weitere Fragen beantworten zu können, sind ein theoretischer Rahmen für den Einsatz von Instrumenten und empirische Untersuchungen mit historischen Zeichengeräten erforderlich.

Ausgehend von den theoretischen Modellen der instrumentellen Genese (*instrumental genesis*) und der semiotischen Vermittlung (*semiotic mediation*) wird zunächst aufgezeigt, wie ein historisches Zeichengerät (Parabelzirkel) zu einem Instrument der Wissensaneignung im Mathematikunterricht werden kann.

Die sich daraus ergebenden Forschungsfragen wurden in einer empirischen Studie, die im Schuljahr 2010/11 durchgeführt wurde, untersucht. Dabei wurde der Einsatz des Parabelzirkels von Frans van Schooten (1615 – 1660) im Mathematikunterricht in der 11. Jahrgangsstufe (G9) untersucht. In einer früheren Untersuchung gelang es bereits, erste Einblicke in den Entdeckungsprozess der Schüler zu gewinnen [4]. Die in der aktuellen Studie gewonnenen Ergebnisse wurden nun im Rahmen der instrumentellen Genese und der semiotischen Vermittlung analysiert und interpretiert.

### **Instrumentelle Genese**

Für das theoretische Modell der instrumentellen Genese ist die Unterscheidung zwischen Artefakt (= Gerät) und Instrument (= Werkzeug) grundlegend. Dabei wird unter einem Artefakt ein von Menschen gemachtes Objekt verstanden. Instrument hingegen bezeichnet ein psychologisches Konstrukt.

Im Anschluss an Wygotski (1896 – 1934) kann man auch von technischen und psychologischen Werkzeugen sprechen.

Das theoretische Modell der instrumentellen Genese geht davon aus, dass es einen *wechselseitigen Beeinflussungsprozess* zwischen dem Gerät und dem Subjekt gibt. Dabei sind auf Seiten des Subjekts seine Kenntnisse (Vorwissen) und Fähigkeiten von entscheidender Bedeutung. Auf der Seite des Geräts haben die im Gerät enthaltenen Zwänge (Grenzen) und Möglichkeiten entscheidenden Einfluss auf den Prozess, in dessen Verlauf das Instrument als Werkzeug des Subjekts entsteht.

Wygotski bezeichnet die psychologischen Werkzeuge, die innerlich orientiert sind, also auf die Veränderung des Subjekts (Denkprozesse, Verhalten, Handlungsmuster etc.) zielen, auch als Zeichen. Dieser Begriff des Zeichens ist für das theoretische Modell der semiotischen Vermittlung fundamental.

### **Semiotische Vermittlung**

Für meine Untersuchung ist v.a. der Ansatz interessant, dass das Gerät vom Lehrer im Unterricht als ein „tool of semiotic meditation“ [3] eingesetzt wird.

Grundlegend für meine Analyse des Unterrichtsgeschehens beim Einsatz eines historischen Zeichengeräts ist der Zeichenbegriff von Peirce; insbesondere die triadische Zeichenrelation und die Vermittlungsfunktion von Zeichen.

„Ein Zeichen ... ist etwas, das für jemanden in einer gewissen Hinsicht ... für etwas steht. Es richtet sich an jemanden, d.h. es erzeugt im Bewusstsein jener Person ein äquivalentes oder vielleicht ein weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens. Das Zeichen steht für etwas, sein *Objekt*. Es steht für das Objekt nicht in jeder Hinsicht, sondern in Bezug auf eine Art von Idee ...“ [2]

Diese sehr allgemeine Zeichendefinition wurde mit meine Auffassung des Zeichengeräts als Ideenkonglomerat verbunden. Dadurch gelang es, diese interpretationsfähige Zeichenauffassung zu konkretisieren.

### **Das historische Zeichengerät als Ideenkonglomerat**

Doch nun zurück zu der Eingangsfrage: Wie und zu welchem Zweck kann man ein Zeichengerät im Mathematikunterricht einsetzen? Zur Beantwortung dieser Frage ist es wichtig, ein historisches Zeichengerät als „*Ideenkonglomerat*“ anzusehen. Diese Auffassung, die ich in Anlehnung an Vollrath [5] entwickelt habe, bedeutet für den Parabelzirkel, dass dieser sechs Arten von Ideen enthält. Zunächst hat ein derartiges historisches Zeichengerät eine Einsatzidee. Es wird benutzt, um damit etwas zu

zeichnen. Die mechanische Idee erlaubt die technische Umsetzung und ist somit für die Bauweise des Geräts verantwortlich. Darüber hinaus gibt es eine mathematische Idee, die sich in der Funktionsweise des Geräts wiederfindet. Ein Artefakt kann im Unterricht eingesetzt werden. Es wird dort mit einem bestimmten Ziel, einer bestimmten Absicht eingesetzt. Also kann man sagen, dass das Gerät eine didaktische Idee enthält. Die Schüler analysieren das Zeichengerät. Im Zuge dieses Prozesses entwickeln die Schüler Nutzungs- oder vielleicht besser: *Erklärungsideen*. Zu guter Letzt ist ein mathematisches Gerät bzw. speziell ein Zeichengerät immer in einer bestimmten Zeit und in einer bestimmten Situation entstanden. Daher ist es immer Ausdruck eines bestimmten Interesses an der Mathematik und eines bestimmten Blickes auf die Geometrie. Dieses verstehe ich unter der kulturell-historischen Idee.

Im Mathematikunterricht geht es v.a. darum, die mathematische Idee und die mechanische Idee zu entdecken und ihren Zusammenhang aufzudecken. So kann die im Zeichengerät implizite Mathematik explizit gemacht werden.

### **Die Entstehung von Zeichen**

Bei der empirischen Studie stellte sich heraus, dass die Entwicklung vom Artefakt hin zum Instrument der Wissensaneignung, in bestimmten Phasen verläuft. In diesen Phasen treten bei den Schülern jeweils spezifische Zeichen [vgl. auch 1] auf, die man als verschiedene Zeichenebenen oder Zeichenkategorien auffassen kann: Artefaktzeichen, Schlüsselzeichen und Instrumentzeichen. Den in diesem Prozess, den ich als instrumentelle Wissensaneignung bezeichne, aufgetretenen Instrumentzeichen können dann die Mathematikzeichen entsprechen. Doch wie gelangen Schüler von der einen Zeichenebene zur nächsten? In der Untersuchung stellte sich heraus, dass es Übergangsphasen gibt, in denen eine bestimmte Frage schwerpunktmäßig untersucht wird. So geht es in der ersten Übergangsphase um die Frage, WAS zeichnet das Gerät? In der zweiten Übergangsphase konzentrieren sich die Beschäftigung der Schüler auf die Frage, WIE zeichnet das Gerät? In der letzten Übergangsphase geht es dann um die Frage, WARUM zeichnet das Gerät? Im Laufe dieses Prozesses traten bestimmte Zeichen auf, die über die aktuelle Zeichenebene hinausgingen und für die Beschäftigung in der nächsten Phase wichtig waren. Diese (Übergangs-)Zeichen nenne ich *Trägerzeichen*.

### **Instrumentelle Wissensaneignung**

Dieser Weg, der mit den Artefaktzeichen beginnt und über die Trägerzeichen weiterführt, bildet die stattfindende Verständniseentwicklung

ab. Die Schüler stellen in diesem Prozess auch immer wieder Rückbezüge zu den vorher erreichten Zeichenebenen her. Dieser Verständnisprozess, in dem aus dem Gerät (= Artefakt) ein Instrument der Wissensvermittlung wird, nenne ich *instrumentelle Wissensaneignung*.

Die hierbei festgestellten Zeichen ermöglichen es, die universelle Zeichendefinition von Peirce (s.o.) zu konkretisieren:

Im ersten Satz finde ich in der Bezeichnung „in einer gewissen Hinsicht“ die Erklärungs-idee wieder. Unter den „äquivalenten Zeichen“ (Satz 2) verstehe ich die Artefaktzeichen. Ein „weiter entwickeltes Zeichen“ ist genau das, was ich als Trägerzeichen herausgefunden habe. Unter der Formulierung: „Das Zeichen, welches es erzeugt, nenne ich den *Interpretanten* des ersten Zeichens.“ verstehe ich die Kette von den Artefaktzeichen über die Schlüsselzeichen hin zu den Instrumentzeichen, wobei für den Übergang zu der nächsten Zeichenkategorie die Trägerzeichen die entscheidende Rolle spielen. Im letzten Teil des Peirce-Zitates sehe ich das Ideenkonglomerat angesprochen.

Darüber hinaus konnte ich in diesem Zitat auch die zwei Richtungen der instrumentellen Genese (Instrumentation – Satz 2 und Instrumentalisation – Satz 4 und 5) und vor allem auch die in diesem Prozess entstehenden Erklärungs-ideen (Satz 1 und 3) wiederfinden.

## Literatur

- [1]Bartolini Bussi, M.G. / Mariotti, M.A. (2008): Semiotic meditation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective; in: L. Englisch (Hrsg.): Handbook of international research in mathematics education, New York 2008, S. 746-783
- [2]Hoffmann, M.H.G. (2003): Semiotik als Analyse-Instrument; in: M.H.G. Hoffmann (Hrsg.): Mathematik verstehen. Semiotische Perspektiven, Hildesheim/Berlin 2003, S. 34-77
- [3]Machietto, M. / Trouche, L. (2010): Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories; in: ZDM Mathematics Education (2010) 42, S. 33-47
- [4]van Randenborgh, Chr. (2005): Van Schootens Ortslinienzirkel. Ein entdeckender Zugang zur geometrischen Definition der Parabel; in: PM Praxis der Mathematik in der Schule 47, Köln 2005, S. 36–39
- [5]Vollrath, H.-J. (2003): Zur Erforschung mathematischer Instrumente im Mathematikunterricht; in: L. Hefendehl-Hebecker / S. Hußmann (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie, Festschrift für Norbert Knoche, Hildesheim 2003, S. 256-265