PARAVICINI, Walther & SPRATTE, Verena
Tübingen, Göttingen

Axiome als Grundlage mathematischer Beweise – Annäherungen an die Perspektive von Studierenden

Ein wichtiges Kennzeichen der Mathematik als Wissenschaft ist die Art, wie mathematisches Wissen begründet wird. Dazu gehört seit der Antike einerseits das Beweisen als typische Tätigkeit, andererseits Überlegungen zur Letztbegründung mathematischer Aussagen und der Fundierung mathematischer Begriffe. Das Erlernen des Beweisens ist zentral für die Enkulturation im Mathematikstudium, auch für das Lehramt (Kempen, 2018) und kann, in gewissem Maße, unabhängig von Fragen der Letztbegründung betrieben werden: In der Schule wird dafür zumeist auf das „lokale Ordnen" im Sinne Freudenthals (1973) zurückgegriffen (Hock, 2018, S. 2). Aber mindestens an der Hochschule ist auch zu diskutieren, welche Aussagen und Begriffe die Basis einer gegebenen mathematischen Theorie bilden und wessen Feder diese Basis entstammt (Jahnke & Ufer, 2015). Die axiomatische Methodik ist dabei „ein wichtiger Bestandteil eines abgerundeten Bildes vom mathematischen Beweisen" (Hock, 2018, S. 87).

Beweise und Axiomatik in der Lehramtsausbildung

Eine für uns offene Frage ist, wann die Enkulturation in die axiomatische Methode in der heutigen Mathematikausbildung erfolgt und erfolgen sollte (Hock, 2018, S. 86). Außerdem stellt sich die Frage, an welchen Denkweisen oder Einstellungen der Studierenden man den Fortschritt dieser Enkulturation festmachen kann. Einen möglichen Standpunkt zur ersten Frage umreißt Harro Heuser (1994, S. 12) im Vorwort zu seinem Buch zur Analysis I, also für den Anfang des Mathematikstudiums: Man sollte gleich zu Beginn die Mathematik von Grund auf neu aufbauen und bestenfalls mit den Axiomen der Mengenlehre fundieren. Ein alternativer Standpunkt in Anlehnung an Freudenthal (1963, 1973) legt eher ein spiraliges Vorgehen nahe, in dem in den Grundvorlesungen abhängig vom Thema die Tiefe der axiomatischen Fundierung angepasst wird.

Ein klassisches Gebiet der universitären Mathematikausbildung, in dem in jedem Fall die Axiomatik selbst zum Thema wird, ist die Geometrie. Hier spielen Axiomensysteme insbesondere für Lehramtsstudierende eine gewissen Doppelrolle, da es einerseits darum geht, die ebene Schulgeometrie axiomatisch zu strukturieren, andererseits aber auch darum, Alternativen zur Schulgeometrie präzise zu fassen, etwa die sphärische oder die projektive Geometrie (Jahnke & Ufer, 2015). Im besten Fall erfährt das nunmehr gewohnte Beweisen durch die Beschäftigung mit Axiomatik der Geometrie

In: P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2024.
57. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. WTM.
https://doi.org/10.37626/GA9783959872782.0

eine Umdeutung oder Ergänzung: Nun gerät auch die Begründungsbasis in den Blick. Eine Lehrveranstaltung zur (axiomatischen) Geometrie, wie sie der erstgenannte Autor regelmäßig durchführt, kommt also als Analogon zu einer Veranstaltung in Betracht, wie sie Kempen (2018) für die Studieneingangsphase mit Fokus auf eine Einführung in das Beweisen konzipiert und evaluiert hat. Im Rahmen einer dieser Veranstaltungen planen wir – ähnlich wie Kempen (2018) – Einstellungen und Kompetenzen zur axiomatischen Mathematik zu beschreiben und ihre Entwicklung nachzuvollziehen.

Als zentrale Elemente der Einstellungen zu Beweisen identifiziert Kempen (2018) die Selbstwirksamkeitserwartung (SWE) zu Beweisen und die Beweisaffinität (Bandura, 1997). Für beide Konstrukte legt er jeweils einen Fragenkatalog aus 9 bzw. 6 sechsstufigen Likert-Skalen vor. Dabei beschreibt Beweisaffinität „die subjektive Zuneigung einer Person zum Konstrukt ‚Beweis'" (Kempen, 2018, S. 102). Die beweisbezogene SWE hingegen beschreibt die Überzeugung, kommende beweisbezogene Anforderungssituationen erfolgreich meistern zu können (Bandura, 1997).

Wie analoge Konstrukte einer subjektiven Zuneigung zu Axiomen (Axiom-Affinität) und einer axiombezogenen SWE empirisch erhoben werden können, ist leitende Forschungsfrage dieses Beitrags. Bezogen auf Beweise konnte Kempen (2018, S. 306, 318) zeigen, dass die Beweisaffinität einen noch größeren statistischen Zusammenhang zu den Leistungen in Beweiskonstruktionen aufweist als die SWE. Beweisaffinität und die beweisbezogene SWE stehen dabei in in mittelstarken Zusammenhang zueinander (r=0,336). Ähnliche Wechselwirkungen der Axiom-Affinität, axiombezogener SWE und dem Handeln mit und an axiomatischer Mathematik erscheinen plausibel (Hock, 2018, S. 83-85): Beide Konstrukte prägen den Umgang mit Axiomen über ihren Einfluss auf die Lernmotivation und die Wahl angemessener Lernaktivitäten (Bandura, 1997) Dass Axiome von Studierenden selten selbst formuliert oder gewählt werden, ihr Zugang zu Axiomen oft also deutlich passiver gestaltet wird als der zu Beweisen, könnte diese Zusammenhänge abschwächen.

Messinstrumente für Einstellungen zu Axiomen

Durch die oben beschriebene, enge fachlogische Verbindung zwischen Beweisen und Axiomen erscheint es ein vielversprechender Ansatz zur Fragebogenkonstruktion, zunächst die von Kempen (2018) entwickelten, beweisbezogenen Items auf Axiome zu übertragen. Abbildungen 1 und 2 zeigen die derart entstandenen 6-stufigen Likert-Skalen (1-stimmt gar nicht bis 6-stimmt völlig), die im November 2023 an N=74 Studierenden der Mathematik (davon 39 im B.Sc., 32 im Lehramt, 38 männlich und 28 weiblich) überwiegend des dritten Fachsemesters der Universitäten Göttingen (N=24) und

Tübingen (N=48) erprobt wurden. Die Mehrheit der Proband:innen (N=56) hatte noch keine Lehrveranstaltung zur axiomatischen Geometrie belegt.

Selbstwirksamkeitserwartung zum Umgang mit Axiomen	Mittel	Std	korr. Trennschärfe
Ich weiß, was ein Axiom ausmacht.	3.89 (4.69)	1.38 (1.17)	0.67 (0.68)
Ich weiß, warum in der Mathematik Axiome verwendet werden.	4.95 (5.36)	1.15 (0.98)	0.69 (0.40)
Ich verstehe Axiome, wenn ich sie lese.	4.61 (4.32)	1.04 (1.01)	0.74 (0.69)
Ich weiß, wie man ein Axiom formuliert.	3.54 (4.36)	1.34 (1.05)	0.67 (0.72)
Ich kann beurteilen, ob ein Axiom plausibel ist.	3.41 (3.86)	1.17 (1.24)	0.55 (0.76)

Tab. 1: Pilotierung der Skala zur Selbstwirksamkeitserwartung. In Klammern die entsprechenden Werte für die beweisbezogene Skala.

Die Skala zur SWE wurde gegenüber Kempen (2018) um ein nicht auf Axiome adaptierbares Item reduziert. Die resultierende Skala weist in unserer Stichprobe durchgehend gute korrigierte Trennschärfen auf (Moosbrugger & Kelava, 2020). Cronbachs Alpha beträgt α=0.85. Außer im Fall des Lesens sinken die Mittelwerte aller Items im Vergleich zur beweisbezogenen Skala ab, was gemäß der fortgeschrittenen Enkulturation in die beweisende Mathematik und der geringeren Erfahrung mit Axiomen unseren Erwartungen entspricht. Die durch Mittelwert der fünf Items aus Abbildung 1 gebildete Gesamtskala zur SWE im Umgang mit Axiomen korrelliert mit r=0.63 mit der aus 6 Items gebildeten Skala zur beweisbezogenen SWE.

Axiom-Affinität	Mittel	Std	korr. Trennschärfe (volle Skala)	korr. Trennschärfe (reduzierte Skala)
Ich sehe Axiome als eine intellektuelle Herausforderung, der ich mich gerne stelle.	3.21 (3.15)	1.29 (1.42)	0.37 (0.23)	0.44 (0.30)
Ich mag Axiome.	4.37 (3.29)	1.28 (1.48)	0.48 (0.35)	0.59 (0.28)
Ich sehe keinen Sinn darin, Axiome aufzustellen, die sowieso plausibel sind.	5.01 (4.89)	1.18 (1.19)	0.41 (0.18)	0.40 (0.01)
Ich versuche, Axiome zu verstehen.	4.84 (3.36)	1.15 (1.75)	0.50 (0.01)	0.57 (0.03)
Ich weiß, wie man ein Axiom aufstellt.	2.89 (3.71)	1.38 (1.16)	0.59 (0.27)	0.46 (0.29)
Ich freue mich, wenn in einer Vorlesung mit Axiomen gearbeitet wird.	4.40 (3.18)	1.06 (1.49)	0.49 (0.30)	0.63 (-)
Axiome werden von Expert:innen aufgestellt. Es genügt, wenn man sie nachvollziehen und verstehen kann.	3.18 (4.19)	1.40 (1.20)	0.31 (0.04)	- (-0.09)
Axiome sind etwas, was man selbst auf Grundlage des eigenen Wissens aufstellt.	2.82 (3.36)	1.17 (1.21)	0.23 (0.14)	-
Das Wählen von Axiomen ist eine Aufgabe für fortgeschrittene Mathematiker:innen.	2.73 (4.16)	1.48 (2.08)	0.36 (0.04)	-

Tab. 2: Pilotierung der Skala zur Axiom-Affinität. In Klammern die entsprechenden Werte für die beweisbezogene Skala.

Während die Übertragung der Skala für die SWE als gelungen angesehen werden kann, ergibt sich für die Axiom-Affinität in Abbildung 2 ein differenzierteres Bild. Die drei dort letztgenannten Items weisen relativ geringe korrigierte Trennschärfen auf und tangieren auch inhaltlich die abgrenzbare

Frage nach der Herkunft von Axiomen. Die auf die ersten sechs Items reduzierte Skala weist akzeptable korrigierte Trennschärfen und mit Cronbachs Alpha von α=0.76 hinreichende Konsistenz auf. Die Axiom-Affinität steht in unseren Daten in hoher Korrelation (r=0.72) zur axiom-bezogenen SWE und in mittlerem Zusammenhang mit der beweisbezogenen SWE.

Besonders interessant erscheint der Vergleich der Axiom-Affinität zur Beweisaffinität. Letztere konnte unter den befragten fortgeschrittenen Studierenden nicht verlässlich mit der Skala von Kempen (2018) erfasst werden. Dies könnte auf die deutlich größere Erfahrung unserer Teilnehmenden im Umgang mit Beweisen zurückzuführen sein. Das mittlerweile breite Repertoire bekannter Beweise führt zu deren differenter Betrachtung, was die deutliche Tendenz zur Mitte in den Mittelwerten und die hohe Streuung von Angaben zum eigenen Umgang mit Beweisen erklären könnte.

Ausblick und Diskussion

Die vorgelegten Skalen scheinen geeignet zur Evaluation von Lehrveranstaltungen, die einen besonderen Schwerpunkt auf die Einführung in die mathematische Axiomatik legen. Die vorliegenden Daten sind zugleich ein Indiz, dass zu Beginn des Mathematikstudiums trotz gezielter Enkulturation in die beweisende Fachkultur eine Einführung in die Axiomatik eine untergeordnete Rolle spielt. Eine qualitative Beschreibung der Überzeugungen von Studierenden zu Axiomen erscheint uns als geeigneter nächster Schritt, um die beschriebenen Zusammenhänge zu validieren.

Literatur

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* W.H. Freeman und Company.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? *Der Mathematikunterricht 9*(4), S. 5–29

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett-Studienbücher.

Heuser, H. (1994). *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. 11. Auflage. B.G. Teubner.

Hock, T. (2018). Axiomatisches Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht. https://publications.rwth-aachen.de/record/729016/files/729016.pdf

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–355). Springer. doi:10.1007/978-3-642-35119-8

Kempen, L. (2018). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule*. https://digital.ub.uni-paderborn.de/ubpb/urn/urn:nbn:de:hbz:466:2-30405

Moosbrugger, H., & Kelava, A. (2020). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. 3. Auflage. Springer. doi:10.1007/978-3-662-61532-4