

Benjamin ROTT, Timo LEUDERS, Elmar STAHL, Freiburg

## **„Wie sicher ist Mathematik?“ – epistemologische Überzeugungen und Urteile und warum das nicht dasselbe ist**

### **Einleitung**

In den letzten Jahren ist ein zunehmendes Interesse an empirisch abgesicherten Erkenntnissen zum Kompetenzerwerb von Studierenden an Hochschulen zu verzeichnen. In diesem Kontext steht auch das BMBF geförderte Programm KoKoHs (Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor, Blömeke & Zlatkin-Troitschankaja, 2013), in dessen Rahmen sich das Verbundprojekt LeScEd (**L**earning the **S**cience of **E**ducation, Pädagogische Hochschule Freiburg (Leitung) und Universitäten in Freiburg, Göttingen, Landau und Berlin) auf die Kompetenzmessung in bildungswissenschaftlichen Studiengängen konzentriert. An dieser Stelle berichten wir über ein Teilprojekt, welches sich der Erfassung und Erforschung epistemologischer Überzeugungen zum Fach Mathematik widmet.

Die Epistemologie ist ein Teilgebiet der Philosophie, die sich mit der Natur menschlichen Wissens, seinen Grenzen, seinen Quellen und seiner Rechtfertigung auseinandersetzt. Bei epistemologischen Überzeugungen handelt es sich um Beliefs über die Natur des Wissens, beispielsweise zu der Frage, als wie sicher Wissen angesehen wird. Man geht heutzutage davon aus, dass sich epistemologische Überzeugungen in mehr oder weniger unabhängigen Dimensionen von wenig-reflektiert / naiv bis hin zu reflektiert / sophisticated entwickeln (vgl. Hofer & Pintrich 1997). Viele Studien haben einen Zusammenhang zwischen sophisticated epistemologischen Überzeugungen und erfolgreichen Lernstrategien – und damit auch besseren Lernergebnissen – nachgewiesen (vgl. Hofer & Pintrich 1997; Stahl 2011).

### **Theoretische Überlegungen**

Überzeugungen bzw. Beliefs sind Konstrukte für menschliche Kognitionen, mit denen man zu beschreiben versucht, welche (i.d.R.) stabilen, subjektiven Annahmen Personen über sich und ihre Umwelt haben (vgl. Philipp 2007). Beliefs filtern die Wahrnehmung und leiten Handlungen (vgl. ebd.).

In der Mathematikdidaktik werden Beliefs zur Epistemologie oft im Zusammenhang mit „mathematischen Weltbildern“ untersucht und gelten – wie Beliefs im Allgemeinen – als eher stabil und situationsunabhängig. In neueren Studien mehren sich allerdings Hinweise darauf, dass auch kontextabhängige, flexiblere Überzeugungen existieren (vgl. Stahl 2011). Dies wirft Fragen auf in Bezug auf ihre theoretische Verortung und Messung.

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1011–1014). Münster: WTM-Verlag

Stahl (2011) schlägt in diesem Zusammenhang eine Unterscheidung vor von relativ stabilen *epistemologischen Überzeugungen (Beliefs)* und situationsspezifischen *epistemologischen Urteilen (Judgments)*. Letztere

“[...] are defined as learners’ judgments of knowledge claims in relation to their beliefs about the nature of knowledge and knowing. They are generated in dependency of specific scientific information that is judged within a specific learning context. [...] [A]n epistemological judgment might be a result of the activation of different cognitive elements (like epistemological beliefs, prior knowledge within the discipline, methodological knowledge, and ontological assumptions) that are combined by a learner to make the judgment.” (Stahl 2011, p. 38 f.)

### Beschreibung der Studie und Forschungsmethoden

Eine weit verbreitete Methode zur Erfassung von Beliefs sind Fragebögen – deren Verwendung jedoch nicht unumstritten ist, gerade hinsichtlich ihrer Validität (vgl. Stahl 2011, S. 41 f.). Insbesondere erscheint die einengende Form der Befragung durch vorformulierte, aber kontextunabhängig formulierte Items nicht geeignet zu sein, um komplexere Überzeugungsstrukturen und deren Abhängigkeit von möglicherweise verschiedenen Bezugskontexten erfassen zu können. Daher verwenden wir Interviews anstelle von Fragebögen. Interviewpartner sind vorrangig Studierende des Lehramts Mathematik; zur Auslotung der möglichen Breite von Argumentationen wurden zusätzlich Mathematiklehrer, professionelle Mathematiker und Professoren befragt. In diesem Artikel konzentrieren wir uns auf Interviews zum Thema *Sicherheit mathematischen Wissens*.

Für den hier vorgestellten Teil der Studie wurden halbstandardisierte Leitfadeninterviews durchgeführt, die jeweils mit zwei konträren Aussagen von Mathematikern zum Thema begannen (vgl. Tab. 1). Die Probanden sollten zu diesen Zitaten Stellung nehmen; anschließend wurden ihre Position und deren argumentative Tiefe durch kritische Nachfragen und Input in Form von Anekdoten aus der Geschichte der Mathematik weiter ausgelotet.

<p><b>Mathematisches Wissen ist sicher</b>          „In der Mathematik gilt eine Erkenntnis für immer. Ein Satz wird nie falsch. Im Gegensatz zu allen anderen Wissenschaften werden in der Mathematik die Erkenntnisse akkumuliert. [...] Es ist unmöglich, daß ein Satz, der einmal richtig bewiesen wurde, sich aus späterer Sicht als falsch herausstellt. Jeder Satz ist für die Ewigkeit.“          (Albrecht Beutelspacher [2001, S. 235])</p>	<p><b>Mathematisches Wissen ist unsicher</b>          „Es ist die Frage, ob sich Mathematiker über die Wahrheit bestimmter, komplexer, mathematischer Ergebnisse immer absolut sicher sein können [...]. Mit Bezug auf einige sehr komplexe Themen ist mathematische Wahrheit das, was nach Annahme der großen Mehrheit der Gemeinschaft der Mathematiker überzeugende Argumente hat. Und solche Wahrheit ist fehlbar. Auch wenn gravierende Irrtümer natürlich selten sind.“          (Alan H. Schoenfeld [1994, S. 58 f.]</p>
---	---

Tabelle 1: Einstiegszitate für das Interview zur „Sicherheit mathematischen Wissens“

## Ergebnisse

Aus bislang 17 Interviews zum Thema *Sicherheit mathematischen Wissens* werden hier vier in Kurzform präsentiert. Diese Auswahl dient der Vorstellung der vier Extrempositionen die sich aus der Kombination der beiden Merkmale *sicher – unsicher* und *nicht-reflektiert – reflektiert* ergeben.

Der Student T.H. und der Mathematiker A.R. vertreten beide die Position, mathematisches Wissen sei sicher. Auf der einen Seite behauptet T.H. – ohne allerdings konkrete Beispiele nennen zu können: „Wenn ein Satz ist, dann existiert er halt.“ Es könne zwar mal passieren, dass ein Satz widerlegt werde, aber das sei die Ausnahme, mathematisches Wissen sei sicher. Auf der anderen Seite argumentiert A.R. wesentlich reflektierter. Seine These ist, dass mathematische Sätze sicher sind, wenn sie korrekt bewiesen wurden; die Mathematik an sich sei nicht das Problem, Fehler würden von Menschen verantwortet. Als Beispiel führt er unter anderem den „letzten Satz von Fermat“ an, dessen Beweis von Andrew Wiles zunächst fehlerhaft gewesen sei und dann korrigiert werden konnte. In einem solchen Fall, an den momentanen Grenzen der Mathematik, könnten solche Fehler passieren. In mehreren Jahren, wenn die von Wiles verwendeten Methoden geläufiger seien, wäre der Satz so sicher wie Erkenntnisse, die in universitären Lehrveranstaltungen vermittelt würden.

Im Gegensatz dazu vertreten B.G., eine Lehrerin kurz vor Beginn ihres Referendariats, und T.B., ein Professor für Mathematik und ihre Didaktik im Ruhestand, beide die Position, mathematisches Wissen sei unsicher. Für B.G. ist alles Wissen unsicher, es bestehe immer die Möglichkeit, dass man feststelle, dass etwas doch nicht stimme, auch in der Mathematik. Sie kann diese Einstellung gegenüber Wissen allerdings nicht mit Argumenten oder Beispielen stützen. T.B. hingegen führt an, warum es für ihn Bereiche der Mathematik gibt, in denen man nicht von absoluter Sicherheit sprechen könne. Unter anderem erwähnt er, dass verschiedene mathematische Theorien zu verschiedenen Aussagen über den gleichen Gegenstand kommen können. Beispielsweise sei  $0,999\dots$  in der Grenzwertmathematik gleich eins, in der Infinitesimalmathematik hingegen kleiner als 1.

Die vier hier skizzierten Interviews zeigen, dass dieselbe epistemologische Position von verschiedenen Personen unterschiedlich reflektiert vertreten werden kann. Der Einsatz eines klassischen Belief-Fragebogens (CAEB, vgl. Stahl & Bromme 2007) zeigt in diesem Fall sowohl bei T.H. und A.R. als auch bei B.G. und T.B. dasselbe Ergebnis: math. Wissen ist sicher bzw. unsicher. Erst die tiefergehende Analyse mithilfe unserer Interviews deckt darüber hinaus den Grad der Reflexion auf und zeigt damit, dass das alleinige Erfassen von Beliefs durch Fragebögen kein adäquates Bild liefert:

“In a questionnaire with rating scales, [these] persons would give the same answer. However, the conclusion that their responses are an expression for comparable epistemological beliefs would be wrong. Their epistemological judgments are built on different cognitive elements to evaluate the knowledge claim.” (Stahl 2011, S. 49)

## Diskussion

In der vorliegenden Studie können die theoretischen Positionen von Stahl (2011) empirisch untermauert werden: herkömmliche Fragebögen reichen nicht aus, epistemologische Überzeugungen in ihrer Tiefe zu erfassen; darüber hinaus bedarf es einer stärker ausdifferenzierten Theorie, die (stabile) *Beliefs* von (situationsbezogenen) *Judgments* unterscheidet, um die Ergebnisse unserer Studie sinnvoll deuten zu können.

Im nun folgenden Teil der Studie geht es um die Entwicklung und Erprobung eines web-basierten, adaptiven Fragebogens, um epistemologische *Beliefs* und *Judgments* ökonomisch (d.h. mit geringerem Aufwand als mithilfe von Interviews) und gleichzeitig valide zu erfassen. Mithilfe dieses Instruments soll u.a. die Entwicklung der epistemologischen Positionen von Lehramtsstudierenden auch in Beziehung zu ihrem (anderweitig erfassten) mathematischen Wissen untersucht werden.

## Literatur

- Beutelspacher, A. (2001): *Pasta all'infinito – Meine italienische Reise in die Mathematik*. München: dtv.
- Blömeke, S. & Zlatkin-Troitschanskaia, O. (2013): Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor: Ziele, theoretischer Rahmen, Design und Herausforderungen des BMBF-Forschungsprogramms KoKoHs (*KoKoHs Working Papers, 1*). Berlin & Mainz: Humboldt-Universität & Johannes Gutenberg-Universität.
- Hofer, B. K. & Pintrich, P. R. (1997): The Development of epistemological Theories: Beliefs About Knowledge and Knowing and Their Relation to Learning. In: *Review of Educational Research 1997*, 67 (1), S. 88 – 140.
- Philipp, R. A. (2007): Mathematics Teachers' Beliefs and Affect (Chapter 7). In: Lester, F. K. (Hrsg.): *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, S. 257 – 315.
- Schoenfeld, A. H. (1994): Reflections on Doing and Teaching Mathematics (Kap. 3). In: Schoenfeld, Alan H. (Hrsg.): *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, S. 53 – 69.
- Stahl, E. (2011). The Generative Nature of Epistemological Judgments: focusing on Inter-actions Instead of Elements to Understand the Relationship Between Epistemological Beliefs and Cognitive Flexibility (Kap. 3). In: Elen, Jan; Stahl, Elmar; Bromme, Rainer & Clarebout, Geraldine (Hrsg.): *Links Between Beliefs and Cognitive Flexibility – Lessons Learned*. Dordrecht: Springer, S. 37 – 60.
- Stahl, E. & Bromme, R. (2007): The CAEB: An instrument for measuring connotative aspects of epistemological beliefs. In: *Learning and Instruction 17*, S. 773 – 785.